

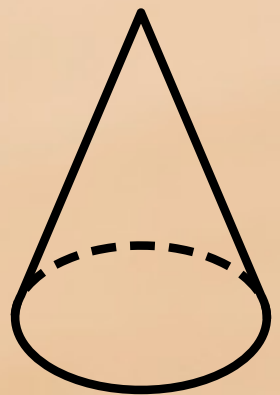
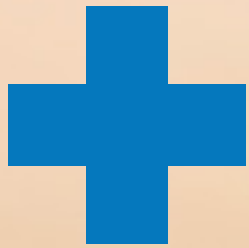
# Matematyka

jest **wszędzie**

rodzinne przygody z matematyką



mBank  
fundator tej książki  
otrzymał za nią nagrodę  
**Złoty Bankier 2018**  
w kategorii  
**Bank wrażliwy społecznie**



Maja Krämer



## **Droga czytelniczko! Drogi czytelniku!**

Ten list jest do Ciebie, bo ta książka jest dla Ciebie. Wygląda, jakby była dla dorosłych, ale każde jej zdanie jest napisane z myślą o Tobie. To właściwie nie jest książka do czytania. Ta książka jest do myślenia! Może Ci towarzyszyć w każdej chwili, zawsze, gdy zechcesz, przez lata. Możesz ją otworzyć w dowolnym miejscu, a gdy coś Cię zainteresuje, możesz zacząć myśleć, główkować, kombinować. Możesz zacząć pytać, dociekać, rozmawiać. Ta książka jest po to, aby nigdy nie było Ci nudno.

Twój mózg jest genialnym urządzeniem do poznawania świata, a nawet wszechświata. Możesz wszystko, pod jednym warunkiem: chcesz! Nie musisz, nikt ci nie każe, chcesz. Czy to nie jest wielka różnica? Niepoliczalne komórki nerwowe w Twojej głowie, zwane neuronami, czekają na pożywienie – ich paliwem jest myślenie, kombinowanie, pokonywanie trudności, rozwiązywanie problemów, odkrywanie. Byle nie było za łatwo, nudno, powtarzalnie ani automatycznie. Bo Twój mózg potrzebuje wyzwania. Żeby się rozwijał, ciągle musi się dziać coś nowego, coś ciekawego, coś ekscytującego. Gdy neurony nie mają co robić, nudzą się, lenią, usypiają. Przestaje im się chcieć. Pomóż im się mnożyć, to bardzo proste. Dostarczaj im wyzwania, gimnastykuj. Wystarczy Twoja naturalna ciekawość, odwaga myślenia i pomysły. Stawiaj wysoko poprzeczkę!

Na każdym kroku Twoim najlepszym przyjacielem będzie matematyka. Ale nie matematyka jako nauka rachowania, a matematyka jako świat wokół. Bo matematyka jest wszędzie, we wszystkim. Szybko przekonasz się, że tak naprawdę jest. Nawet nie zorientujesz się, a zaczniesz myśleć matematycznie. Polubicie się z matematyką na pewno. Założysz się?

Życzymy Ci wspaniałej podróży przez matematyczny świat. I dobrej zabawy!

## **Twoja mFundacja**

### **PS**

Mamy do Ciebie dwie prośby:

- Gdy znajdziesz słowo, pojęcie, określenie, którego nie znasz, nie rozumiesz, pytaj, szukaj. Nie zrażaj się, nie poddawaj. Wszystko wydaje się trudne, nim stanie się łatwe.
- Na listy zwykle odpisuje się, tak tworzy się prawdziwa rozmowa. Nie musisz odpisywać, ale miło nam będzie dostać odpowiedź. Pisz, gdybyś chciała/chciał podzielić się z nami swoimi myślami, porozmawiać o matematyce, zgłosić swoje pomysły na matematyczne aktywności. Czy wrzucisz list do skrzynki, czy wyślesz e-mail, Twoja decyzja. Obiecujemy, że z ciekawością przeczytamy Twój list.

**Nasz adres:** Fundacja mBanku, ul. Senatorska 18, 00-950 Warszawa

**Nasz e-mail:** fundacja@mbank.pl

## **Sprawdź, czy jesteś gotowa/gotowy na przygodę z matematyką. Na początek odpowiedz na 10 pytań:**

- |                                    |     |     |  |     |     |
|------------------------------------|-----|-----|--|-----|-----|
| 1. Czy lubisz obserwować?          | TAK | NIE | 6. Czy lubisz kombinować?                  | TAK | NIE |
| 2. Czy lubisz odkrywać coś nowego? | TAK | NIE | 7. Czy umiesz się dziwić, zadziwiać?       | TAK | NIE |
| 3. Czy lubisz rozwiązywać zagadki? | TAK | NIE | 8. Czy lubisz tajemnice, sprytne sztuczki? | TAK | NIE |
| 4. Czy lubisz grać w różne gry?    | TAK | NIE | 9. Czy lubisz dyskutować, argumentować?    | TAK | NIE |
| 5. Czy lubisz bujać w obłokach?    | TAK | NIE | 10. Czy pytasz „dlaczego”?                 | TAK | NIE |

Gratulacje! Już masz pewność, że matematyka jest dla ciebie i nigdy nie daj sobie wmówić, że jest inaczej.

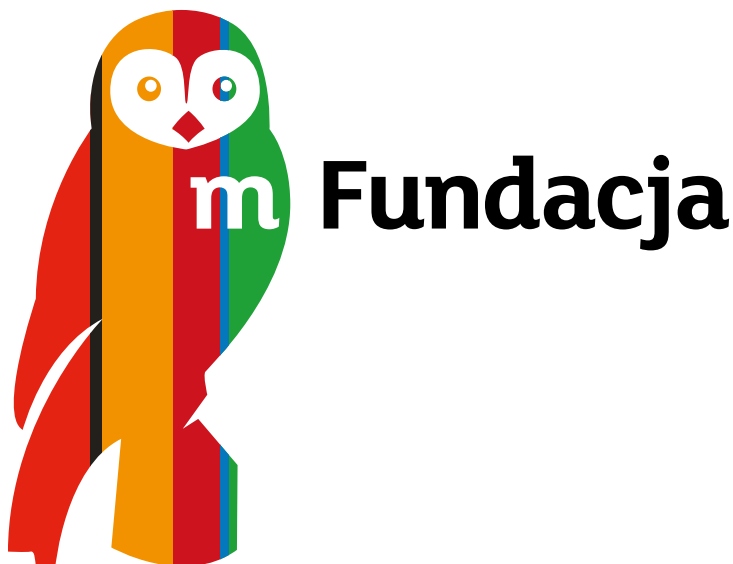
# Matematyka

**jest wszędzie**

rodzinne przygody z matematyką

Maja Krämer

# Dodajemy możliwości, mnożymy talenty



W Fundacji mBanku doceniamy społeczną wagę matematyki, dlatego stawiamy sobie za cel rozwój świadomości matematycznej w Polsce na każdym etapie edukacji.

Matematyka jest fundamentem logicznego myślenia. Pełni ważną funkcję w procesach poznawania i rozumienia otaczającego świata. Myślenie matematyczne pomaga w codziennym życiu. Jest niezbędne przy podejmowaniu świadomych decyzji, również związanych z finansami, jest ważne w życiu zawodowym. Dobra edukacja matematyczna wpływa na wysoki poziom kompetencji absolwentów studiów, specjalistów, szczególnie nauk ścisłych i ekonomicznych, a to jedna z podstaw rozwoju gospodarczego kraju.

W ramach działań Fundacji mBanku wspieramy pasjonatów matematyki – nauczycieli, społeczników i rodziców – w rozwijaniu myślenia matematycznego u dzieci i młodzieży, podejmujemy też działania skierowane do studentów.

mFundacja przekazuje dotacje i granty na projekty matematyczne o zasięgu ogólnopolskim, regionalnym i lokalnym. Ich beneficjentami są przedszkola, szkoły, uczelnie wyższe, organizacje pozarządowe i biblioteki publiczne, a także grupy nieformalne, koła naukowe czy rady rodziców.

Przez ostatnie trzy lata, realizując strategię „m jak matematyka”, wsparliśmy blisko 500 inicjatyw edukacyjnych o łącznej wartości ponad 5 mln zł. Dzięki dotacjom matematyczna misja mFundacji dotarła do ponad 360 tysięcy odbiorców.

Po więcej informacji o dotacjach, programach grantowych, stypendiach, konkursach i badaniach zapraszamy na stronę [mFundacja.pl](http://mFundacja.pl).

# Spis treści





# Matematyka jest wszędzie

**„ Jaka jest teza tej książki? Są dwie: przedmiotem matematyki jest rzeczywistość, matematyka jest uniwersalna: nie ma rzeczy, która by była jej obca**

**Hugo Steinhaus, przedmowa do „Kalejdoskopu matematycznego” (1956)**

Nie wierzysz? Rozejrzyj się. Wszystkie tematy są w zasięgu ręki. Wszystko, no prawie wszystko, co widzisz, ma kształt, da się policzyć, zmierzyć, porównać. Wszystko, co mówisz albo słyszysz, ma rytm. I wymiar logiczny. Przynajmniej powinno. Matematyka jest w kuchni, na talerzu, w koszyku, w portfelu. Bez matematyki nie upieczesz ciasta! Kalendarz i rozkład dnia, czas i przestrzeń, ruch planet to też matematyka. Natura jest najlepszym dowodem na istnienie matematyki i logikę, od zawsze. Podróż, nawet najkrótsza, wybór trasy, ruch pojazdów, godzina przybycia do celu, spalanie benzyny to... matematyka. Mecz piłkarski, gra w karty, kości, go czy w chińczyka, układanie kostek domino, a nawet rzut monetą, ma w sobie matematyczne wymiary. Kąt padania i kąt odbicia piłki, tor lotu piłki czy skoczek na nartach, szybkość, wysokość, wyniki, rekordy, rankingi – sportu bez matematyki nie da się wymierzyć, opisać. Popularne aplikacje na smartfony zajmują się liczeniem – kroków, kilometrów czy kalorii. Muzyka to też matematyka. Matematyka jest niezbędna przy urządzeniu domu, ogrodu, projektowaniu, konstruowaniu, budowie czegokolwiek. Matematyka ma też nieoczywiste oblicza, uruchamiające wyobraźnię – symetria, cienie na ścianie, proporcje, statystyka i prawdopodobieństwo. Abstrakcyjne pojęcia matematyczne: nieskończoność, zero, liczby ujemne, ciągi, procenty, znamy i używamy, rozumiemy intuicyjnie, nawet jeśli o tym nie myślimy. Matematyka też obecna jest w potocznym języku, powiązań i pokrewnych znaczeń jest zaskakująco wiele. Nawet poemat „Pan Tadeusz” Adama Mickiewicza da się opisać matematycznie, nie wspominając o matematyce w innych dziedzinach sztuki. A cokolwiek pomyślimy, to też będzie matematyka, bo język, logiczne myślenie, filozofia czerpią swój sens z matematyki właśnie.

Czy jest jakaś potężniejsza nauka? Od matematyki nie warto uciekać, bo matematyka nie tylko jest w życiu niezbędna, ale i może być przyjemna, a jej poznawanie w praktyce fascynujące. Chodzi o baczną obserwację świata, intuicyjną, ciekawą przygodę z cyframi, liczbami, prawami, relacjami. O myślenie matematyczne.

**Teksty:** Maja Krämer

**Redakcja merytoryczna:** dr Anna Widur

**Redakcja językowa i korekta:** Małgorzata Radomska

**Projekt makiety i skład:** Karolina Krämer

**Rysunki:** Karolina Krämer, Shutterstock

**Zdjęcia na okładce:** Shutterstock

**Produkcja:** Jadwiga Szczęsłowicz

ISBN: 978-83-7781-063-7

© Copyright by Fundacja mBanku

© Copyright by Fundacja „Kocham Polskę”

All rights reserved

Wydanie 1

Warszawa 2017

Fundacja mBanku

www.mFundacja.pl

email: fundacja@mbank.pl

Emoc.pl Agencja Edukacyjna

Fundacji „Kocham Polskę”

www.emoc.pl

email: maja.kramer@emoc.pl



emoc.pl





**” Wysoki stopień ścisłości, jaki osiągnęła obecnie myśl matematyczna, sprawia, że wielu autorów pisze stylem, który niejako zamyka czytelnika w jakiejś zalanej oślepiającym światłem celi, gdzie każdy drobiazg nabiera niezwykłego blasku, zatracając przez to swoją plastykę. Ja natomiast lubię szeroki krajobraz o pogodnym niebie i dalekiej perspektywie, gdzie bogactwo bliskich i wyraźnych szczegółów rozplywa się z wolna na dalekim widnokrzęgu**

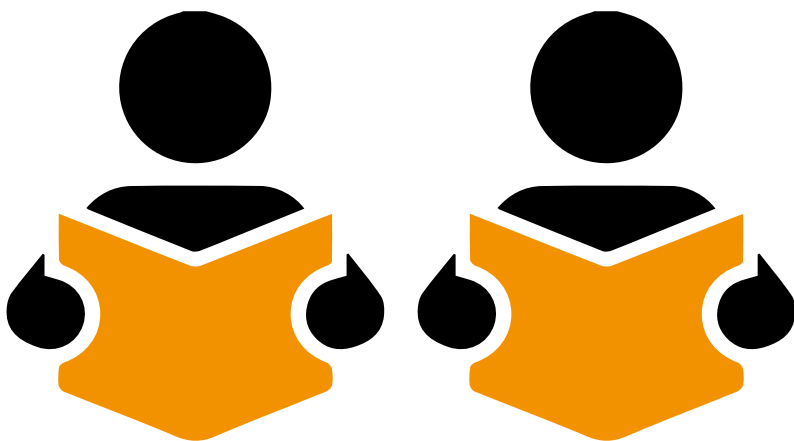
Hermann Weyl

## Czym jest ta książka, czym nie jest?

Ta książka jest inna. I taka miała być. To nie jest kolejna książka polegająca na przerobieniu materiału wymaganego przez podstawę programową. To nie jest zbiór zadań ani zagadek logicznych. Ta książka jest zbiorem inspiracji, przeglądem matematyki w codziennym zastosowaniu, w życiu rodziny, w kulturze i naturze. Czytelnicy nie znajdą tu definicji (z małymi wyjątkami), akademickich i teoretycznych rozważań. Samo życie.

Naszym założeniem było zainteresować Was rozmowami o matematyce, bez wzorów (dajemy gwarancję – tu nie znajdziesz żadnego wzoru z jedynym wyjątkiem : ), bez narzucanych schematów postępowania, choć są inspiracje, zachęty pójścia własną ścieżką.

Ta książka traktuje dzieci poważnie, z zaufaniem i przekonaniem, że dzieci mogą wszystko. W szkole siedmiolatek nie może zainteresować się logiką czy prawdopodobieństwem, musi czekać do liceum. A siedmiolatek już przeczuwa, czym są te pojęcia i prawidłowo odnosi je do swoich doświadczeń.

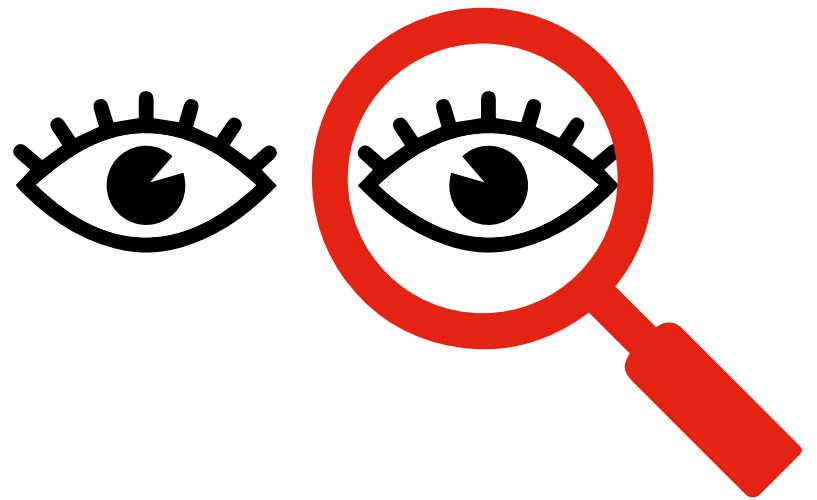


Książka może nie przypaść do gustu doradcom przedmiotowym czy metodykom. Używa języka nieakceptowanego w nauczaniu formalnym – ale zaprasza do rozmowy o matematyce językiem potocznym. Mamy nadzieję, że właśnie dzięki takiemu podejściu wszystkie, nawet uważane za trudne treści, będą zrozumiałe dla nie matematyka, dla ośmiolatka. Może właśnie takie podejście sprawi, że dzieci zaczną patrzeć na świat matematycznie? Może zainteresowany młody człowiek w przyszłości pogłębi wiedzę, a inaczej mógłby nie poznać i nie polubić matematyki wcale?

## Gwarancje

Ta książka nie jest podręcznikiem ani zbiorem zadań, jest zaproszeniem do obserwacji świata i do myślenia. A myślenie wtedy jest najbardziej twórcze, gdy jest wolne. Dlatego gwarantujemy, że nie ma w niej:

- obowiązującej kolejności poznawania świata,
- wzorów ani schematów,
- narzuconych metod działania i jedynej słusznej ścieżki,
- punktów, nagród, przechodzenia na wyższe poziomy,
- ocen ani stopni,
- zgodności ze szkolną podstawą programową.



**” W idealnym programie nauczania nie ma żadnej kolejności i następstwa przedmiotów”**

John Dewey, „My pedagogic creed”, 1897 (sic!)

## Jak korzystać z inspiracji?

Z książki można korzystać na wiele sposobów, każdy może znaleźć i wybrać swój. Tematy są powiązane, bo matematyka przenika się we wszystkich kierunkach, ale nie ma tu żadnej narzuconej kolejności korzystania z inspiracji. Można zacząć od początku, od wybranego tematu albo od dowolnego modułu, z samego środka. Można też wracać do raz wykorzystanych inspiracji. Wszystko zależy od potrzeb, oczekiwań. Czasem wystarczy hasło, czasem potrzebne może być wyjaśnienie, odpowiedź. Struktura jest logiczna i pozwala na intuicyjne korzystanie z treści.

- **Rozdziały** – tematy zebrane wokół głównego zagadnienia, zagadnień.
- **Baza** – krótkie wstępy ogólnie wprowadzające w temat rozdziału.
- **Moduły** – proponowane inspiracje działań: co można zrobić?, jakie aktywności podjąć w powiązaniu z tematem rozdziału? Każdy moduł składa się z trzech (czasami tylko z dwóch pierwszych) części:
  - Krótkie wprowadzenie adresowane do dziecka,
  - Zadanie – propozycja aktywności do samodzielnego wykonania, pomyślenia, tworzenia przez dziecko lub do działania wspólnie z rodziną, przyjaciółmi.
  - Inspiracje/podpowiedzi – wskazówki, przykłady pozwalające lepiej zrozumieć, wyobrazić sobie, na czym polega zadanie, jakie mogą być ścieżki rozumowania.

I już można działać. Wspólnie ustalacie, czy i jak będzie wyglądało wykonanie zadania. Każda aktywność może być dowolnie dostosowana do zainteresowań, możliwości dziecka. Żadna z propozycji nie wyczerpuje tematu, wspólnie możecie dowolnie rozwijać wątki.

Można też podsunąć dziecku, oczywiście dziecko musi już swobodnie czytać, książkę do samodzielnej pracy, ale czy nie milej robić to razem?





## „ Dziecko powinno na matematyce myśleć, a nie ćwiczyć pamięć

Mirosław Dąbrowski w rozmowie z Dorotą Obidniak, „Edukacja. Przewodnik Krytyki Politycznej”, wyd. 2013

### O dzieciach i ich możliwościach

Dzieci nigdy nie są za małe na spotkanie z matematyką, czują matematykę intuicyjnie, mają w sobie niezwykły, cenny, naturalny potencjał. Dlaczego dziecko uczy się w szkole matematyki? Bo musi. A kiedy uczymy się efektywniej? Kiedy sami chcemy, kiedy mamy wewnętrzną motywację, kiedy jesteśmy czymś zainteresowani, kiedy korzystamy z największego kapitału: ciekawości. Dzieci nie różnią się od nas, tyle że wyposażone w naturalne zainteresowanie światem, zawsze gotowe do zabawy, mogłyby chłonąć świat błyskawicznie, otwierać się na naturalne prawa rządzące światem, poznawać jego piękno i logikę. Jednak badania dowodzą, że z każdym rokiem nauki w szkole spada zainteresowanie matematyką jako przedmiotem. W szkole utrwała się przekonanie, że matematyka jest trudna i nudna. Jakie są grzechy nauki matematyki w szkolnych progach? Znamy to z własnego doświadczenia i z obserwacji dzieci: trzeba przerobić materiał po kolei, schematycznie, lekcje są nudne, należy myśleć „po szkolnemu”, a nie „po swojemu”, nie można popełniać błędów, zadania są niezrozumiałe, trzeba wpisywać wynik w rubryczki. Za mało jest odniesień do własnych doświadczeń, do codzienności, a to sprawia, że matematyka dla dzieci jest abstrakcją, przedmiotem, który nie ożywia ich wyobraźni. Pojęcia, które dzieci poznają w szkole, wzory i definicje okazują się najważniejsze, mechaniczne rachowanie jest podstawą. Tymczasem „w matematyce nie chodzi o liczby, lecz o życie”, jak słusznie zauważył pewien współczesny brytyjski matematyk. Bo najważniejsze jest budzenie ciekawości, zachęcanie do samodzielnego myślenia, twórcze podejście do zagadnień. Celem jest myślenie otwarte – matematyczne.



Dom ma wielką misję do wypełnienia: zneutralizować niechęć do matematyki, którą w dzieciach utrwała szkoła, przewyciężyć własne, nas dorosłych, uprzedzenia, które przenosimy na dzieci. Może słabości szkolnej edukacji pod własnym dachem wspólnie zamienimy w pasję? A już w twoim dziecku drzemie pasja do matematyki? Kluczy do tych drzwi jest naprawdę wiele.

## „ Najbardziej jesteśmy sobą, kiedy osiągamy powagę bawiącego się dziecka

Heraklit

### O wspólnych matematycznych odkryciach

Dom to miłość, bezpieczeństwo i naturalny grunt rozwoju, nauka życia poza szkołą. Chociaż wszyscy narzekamy na brak czasu, jednak codziennie sporo czasu spędzamy razem. Te bezcenne chwile można i warto wykorzystać na wspólne odkrycia. Skąd brać pomysły? Z życia, a gdyby ich zabrakło, to proponujemy inspiracje, które, mamy nadzieję, pomogą. Podpowiadamy tematy, okoliczności, które można wykorzystać do matematycznego myślenia. Materiały wprowadzające są przygotowane tak, by nawet opiekun, dla którego matematyka nie jest żywiołem, mógł się na nich oprzeć.



Zapraszamy do wspólnej zabawy, przy każdej okazji, bo każda okazja jest dobra.

- Robimy w pośpiechu kanapki czy zupę? Wspólnie wymyślamy pomysły na matematyczne odkrycia w kuchni.
- Idziemy po zakupy? To doskonała okazja do szukania matematycznych motywów w sklepie, w koszyku z zakupami.
- Jedziemy do babci, na basen czy na wczasy? Pełno wokół nas geometrycznych tematów.
- Oglądamy rozgrywki sportowe, czekamy w przychodni, wyprawiamy się do lasu? Właściwie nie ma okoliczności, które nie dawałyby szansy na matematyczne poszukiwania.

Osobnym poligonem matematycznym jest język, którym się komunikujemy. Matematyczne pojęcia osadzone są w języku, a bez logiki i rządzonej jej prawami retoryki trudno byłoby się w ogóle porozumieć. Codzienne rozmowy też mogą być wdzięcznymi zaczepkami do matematycznych rozważań.

**Będzie ciekawie.  
Powodzenia!**

## „ Dzieci nie są takie głupie, jak pedagodzy myślą. Rozumieją bardzo dużo, może tylko widzą rzeczywistość bardziej wycinkowo

prof. Jerzy Vetulani, „Gazeta Wyborcza”, 8-9 kwietnia 2017

### O metodzie, czyli i tak to robimy na co dzień

Od nas, dorosłych, zależy, jak wprowadzimy dzieci w świat myślenia, rozumowania matematycznego. Czy dzieci będą się obawiać matematyki, czy potraktują ją jako naturalny element otaczającego świata, narzędzie do jego odkrywania, do zrozumienia większości aspektów życia.







Przejdźmy z dzieckiem przez kolejne etapy. Każdy z modułów pozwala na rozmowę i zabawę na poziomie odpowiednim dla dziecka. Każde dziecko (samo lub wraz z opiekunem) zdecyduje, jaki temat, jaki etap jest mu bliższy, jaki je wciągnie. Nie ma ścieżki jedynie słusznej, obowiązkowej. Można „przerabiać” materiał po kolei, ale lepiej wybierać to, co dziecko interesuje. Każdy ma swoje tempo, swoje zainteresowania. I tak jest dobrze. Aktywność dzieci w kolejnych krokach będzie rozwijać się stopniowo:

- „O, widzę to” – czyli uważność, dziecko obserwuje świat wokół, świadomie kieruje uwagę, zauważa otoczenie, śledzi zmiany.
- „To jest ciekawe” – czyli ciekawość, w dziecku ożywia się naturalne, niewymuszone, nienarzucone zainteresowanie otoczeniem – rzeczami, zjawiskami, relacjami.
- „A dlaczego?” – czyli analiza, dziecko stawia pytania – sobie i dorosłym – szuka odpowiedzi, porównuje, dopatruje się podobieństw i różnic, docieka sedna, zauważa zależności.
- „Chyba wiem, o co chodzi!” – czyli synteza, dziecko wyciąga wnioski, stawia tezy, buduje koncepcje, szuka własnej drogi, działa na próbę, a przy tym popełnia błędy, myli się, gubi tropy, dochodzi do rozwiązań.
- „Działam, tworzę, mogę!!!” – czyli twórczość, dziecko tworzy własne koncepcje, modele, teorie, metody, dzieła, proponuje nowe rozwiązania, oryginalne zastosowania, twórczo i krytycznie rozwija własne spojrzenie na świat.

A zatem – wspólnie spojrzmy matematycznym okiem na świat. Razem – dzieci i ich opiekunowie. Powiązanie nowych informacji, nowych danych z wyobrażeniem wynikającym z doświadczenia, da szansę na stworzenie trwałych podstaw, nie schematów, kalek myślowych, wykutych wzorów, a prawdziwej wiedzy. Nasz mózg uczy się cały czas, tak jest zaprogramowany. Wymaga nieustającej pożywki, a neurony, jak biceps, potrzebują ćwiczeń, by być w formie. Matematyka jest najlepszym ćwiczeniem, siłownią dla mózgu. Gdy dostarczymy mu ambitnych wyzwań do rozwoju, będzie wdzięczny, będzie nam sprawniej służyć.

## ” Sposoby dziecięcego myślenia są czasem tak inteligentne, że my, dorośli, mamy duże trudności w rozpoznaniu ich oryginalności i kreatywności

Hartmut Spiegel

### Jak wykorzystać pytania dzieci?

Dzieci zasypują dorosłych pytaniami. Czasami pytania wydają się banalne, a może wcale takie nie są? Każde pytanie dziecka to skarb, można go zlekceważyć albo wykorzystać do maksimum. Każdy rodzic wie, że nie da się odpowiedzieć poważnie, wyczerpująco i inspirująco na każde pytanie, bo są ich tysiące, ale warto wiedzieć, jaki potencjał rozwoju myślenia dziecka mają odpowiedzi nawet na te oczywiste z naszego dorosłego punktu widzenia.

Dziecko pyta:

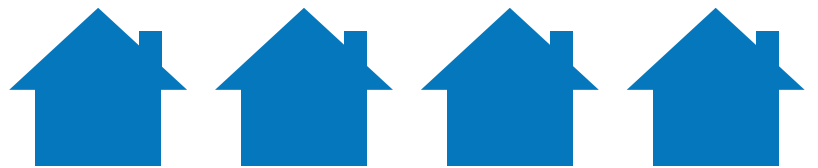
**„Dlaczego domy mają proste ściany?”**

Jak dorośli mogą poprowadzić rozmowę?

- „Co to za dziwne pytanie?” – dziecko prawdopodobnie zawstydzi się, wycofa.
- „Domy muszą mieć proste ściany, bo to domy” – dziecko nie dowie się niczego, czego nie wiedziało, pytając. Pytanie, czy będzie drażnić temat?
- „Domy muszą mieć proste ściany, bo w domach są mieszkania”

– może dziecko pomyśli nad tym, jak łączą się te dwa fakty, może nie. Może zada kolejne pytanie, np.: „A jak to jest z biurowcami, przecież tam nie ma mieszkań?”

- „A jak myślisz? Co by było, gdyby domy miały krzywe ściany?” – dziecko automatycznie uruchomi swój mózg do myślenia. Coś przyjdzie dziecku na myśl na pewno, może samo zacznie spekulować, szukać możliwości wytłumaczenia, pewnie zada kolejne pytania.
- „Większość domów ma proste ściany, ale nie wszystkie. Jak myślisz, dlaczego większość domów buduje się jednak podobnie? Może przyczyną jest najlepsze wykorzystanie miejsca? A może to kwestia wytrzymałości materiałów? Może klimat ma znaczenie? A może fantazja architekta?” – to już konkretna porcja materiału do przemyślenia. Mózg dziecka podaży we wskazanych kierunkach, rozważy różne możliwości, może rozwinie listę przyczyn.



- „To ciekawe pytanie. Musimy sprawdzić, czy i gdzie na świecie są domy, które mają inne kształty. Zastanowimy się, z czego wynikają takie decyzje” – dziecko zachęczone pochwałą ma szansę zebrać wiele informacji, z różnych nienarzuconych z góry obszarów, na bazie zebranych danych aktywnie weźmie udział we wspólnym wnioskowaniu.
- „Super temat. Najpierw spróbuj zbudować różne konstrukcje, z różnych materiałów. Potem poszukamy odpowiedzi. Ciekawe, do jakich dojdziemy wniosków” – odpowiedź wzorcowo wspierająca rozwój. Dziecko chce, bo wie, że może, przejąć inicjatywę, coś własnoręcznie wykonać, doświadczyć, poeksperymentować, poszukać w źródłach. Staje się świadomym partnerem w dochodzeniu do odpowiedzi na swoje pytanie.

Codziennie, każdy dorosły musi się zmierzyć z ciekawością własnego dziecka. Na miarę możliwości.

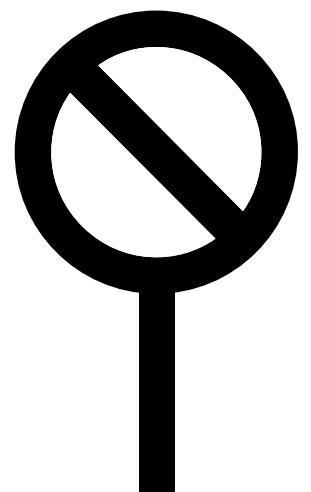
## ” Zakazuje się zakazywania

Maja Krämer

### Prośba do opiekunów

Nikt nie lubi zakazów, dlatego ta książka podpowiada, inspiruje, ale nie zakazuje, niczego nie narzuca. Jest jednak kilka żelaznych reguł, których my, dorośli, MUSIMY przestrzegać, żeby dzieci rozwijały się chętnie, bez kompleksów, bez ograniczeń, swobodnie i radośnie:

- Nie zabraniaj!
- Nie przeszkadzaj!
- Nie pouczaj!
- Nie narzucaj!
- Nie ograniczaj!
- Nie poganiaj!
- Nie dawaj gotowych odpowiedzi!
- Nie podpowiadaj rozwiązań!
- Nie wtłaczaj w schemat!
- Nie porównuj dziecka z innymi!
- Nie oceniaj!
- Nie krytykuj!





# Badania naukowe, czyli jak odkrywać świat

Jeśli się nie przewrócisz, nie nauczysz się chodzić. Sparzyć trzeba się we własny palec. Nie opanujesz jazdy na rowerze przez pogadankę. Te powiedzenia są mądrością ludową albo życiową, tak jest, każdy to wie. Żeby do czegoś dojść, czegoś się nauczyć, coś odkryć, trzeba tego doświadczyć. Już niemowlęta instynktownie badają świat i otoczenie. Wyobraźmy sobie, że w ich głowach toczy się dialog wewnętrzny, zgoła matematyczny: „Co będzie, jeśli po raz enty wyrzucę grzechotkę z tóżka? Czy jest jakaś granica, po przekroczeniu której już mi nie podadzą, a zabiorą zabawkę? Popróbuję do skutku. Ciekawe, czy „skutek” za każdym razem następuje po takiej samej liczbie prób, czy też zależy od czegoś? Ciekawe, od czego?”. Dzieci to mali badacze świata. Mają w sobie niezmierny potencjał oraz wrodzoną ciekawość i skłonność do eksperymentowania. Uczą się poprzez działanie – obserwują, próbują, penetrują. Przyswajają wiedzę, gdy są zaangażowane i gdy temat je ciekawi. Poznają świat na zasadzie prób i błędów, szacowania, negocjowania. Te naturalne skłonności u dzieci mogą się rozwijać w pełni przy projektach badawczych, prowadzonych choćby w domu, na podwórku, na wakacjach. Wszędzie, całodobowo. Dziecięcy wymiar badań wcale nie znaczy, że są one nieważne. To podobnie jak z podróżą, wejście w świat nauki również zaczyna się od pierwszego kroku. Dorośli mogą pomóc twórczo, ale i pasywnie: nie zabraniając, ośmielając, podążając za zainteresowaniami dziecka, a nie przedstawiając na swoje tory, nie zapominając, że wiele zależy od podejścia. Czy można się dziwić, że dzieci chętniej piszą historyjki niż wypracowania, z ochotą uratują świat, wynosząc śmieci, niż zwyczajnie wyniosą śmieci, z zapalem przeprowadzą badania naukowe samochodów parkujących pod domem, niż je tylko policzą. Dajmy im szansę. Nagrodą dla wszystkich będą wypieki na twarzy dziecka i obłędny wzrok, charakterystyczny dla szalonych naukowców, pasjonatów na tropie. Warto to przeżyć :).

## □ Najważniejsze pytanie?

Zagadka: Jakie jest najważniejsze pytanie w życiu? Nie chodzi o pytanie fundamentalne („Jak żyć?”, „Czy mnie kochasz?”) ani konkretne („Co dziś będzie na śniadanie?”, „Jak długo będziemy jechać do domu?”, „Jak daleko jest stąd do Krakowa?”), ani banalne o coś oczywistego („Czy dziś jest środa?”). Chodzi o specjalny rodzaj pytania, czyli o takie, które wynika z zainteresowania, z zadziwienia, z chęci poznania, dotarcia do sedna. Chodzi o pytanie doskonałe, które porusza nowe tematy, z którego coś wynika, które może zmieniać świat, które otwiera kolejne drzwi. Bez niego nie byłoby żadnego odkrycia, żadnego wynalazku, nie byłoby postępu. Gdyby ludzie nie zadawali sobie, innym, naturze, nauce tego pytania (dzieci oczekują prostych rozwiązań, dorośli prowadzą badania naukowe) i nie szukali odpowiedzi, być może nadal mieszkalibyśmy w jaskiniach, bez internetu. Kto wie?

” **Pragnienie wiedzy jest naturalną cechą ludzi dobrych**

Leonardo da Vinci

Masz pomysł, jakie to pytanie?

Tak. To podstawowy dylemat wszystkich dzieci na świecie, roztrząsany w nieskończoność, miliony razy, do zamęczenia rodziny. Ciekawe, DLACZEGO z biegiem czasu wiele dzieci traci ciekawość i tak jakby zapomina o tym pytaniu. Przestają się dziwić, trudno je zainteresować, a ciekawość nie jest ich znakiem firmowym. Nie zapisuj się do tego zbioru, dołącz do grona badaczy. Pilnuj magicznego klucza do drzwi nauki, pytaj: DLACZEGO?

Na marginesie: chodzi o twórcze i produktywne pytania: „Dlaczego?”. To słowo pełni też niekonstruktywną rolę, gdy służy np. do rozliczania: „Dlaczego nie posprzątałaś pokoju?”, „Dlaczego spóźniłaś się na kolację?”. Nie tędy droga.

## □ Czego można dociekać?

Można zainteresować się, badać, analizować naprawdę wszystko i bez wyjątków. Nie ma sensu wyliczać, czym interesują się naukowcy, bo to i tak nie odda bezmiaru tematów. Oczywiście nikt nie jest w stanie zaciekawić się „wszystkim”, ale „wszystko” jest tematem, tyle że każdy wybiera





z tego ogromnego zbioru coś dla siebie. I drąży zagadnienie, odkrywa nowe światy, poszerza horyzonty. To jest pasja naukowa. Każdy zajmuje się tym, co z różnych względów go interesuje. Jeden lubi badać budowę planet, drugiego pasjonują konie, ktoś zakochał się w Rowie Mariańskim i podobnych głębinach, inny w badaniu wiecznej zmarzliny, a ktoś w malarstwie renesansowym. Najważniejsze – trudno sobie wyobrazić naukowca-pasjonata, który nie lubi tego, czym się zajmuje. I o to chodzi.

Zrób rodzinne zebranie i poproś bliskich, żeby zastanowili się i wypisali wszystkie twoje mocne strony oraz zainteresowania. Niezależnie od tego, czego się dowiesz, stwórz listę swoich pasji i talentów (masz co najmniej jeden talent na sto procent!!!). Ciekawe, czy listy będą zbieżne. Podpowiedź: to nie muszą być wyłącznie poważne sprawy. Nigdy nie wiadomo, co jest ważne i co z czego w przyszłości wyniknie. Chodzi o uważność – być może najlepiej z rodziny wkładasz naczynia do zmywarki. To wcale nie byle co, a wielki kapitał. Albo zawsze znajdujesz najwięcej grzybów, kucasz przy każdym żuczku, albo wiesz, gdzie jest północ. To wszystko ma znaczenie i się liczy.

## O co by tu zapytać?

Nie masz już 5 lat, lecz więcej. Trochę już wyrosłaś/wyrosłeś z nieustannego zadawania pytań: „A dlaczego...?”. Nic straconego.

Propozycja nie do odrzucenia: powróć do dzieciństwa i stawiaj pytania o rzeczy, które cię dziwią, interesują, zastanawiają. Trzy propozycje:

- Od ręki wymyśl, jak najwięcej pytań „Dlaczego?”, o wszystko. Kiedy spojrzysz na świat pod tym kątem, nagle okaże się, że te pytania same cisną się do głowy.
- Systematycznie, codziennie, kiedykolwiek – rano, w południe albo przed snem, wymyślaj jedno pytanie: „Dlaczego?”.
- Program na życie – zadziwiaj się wszystkim, co jest wkoło ciebie, pytaj: „Dlaczego tak?”, „Dlaczego nie?”.

Czy zadasz te pytania komuś, czy będziesz samodzielnie szukać odpowiedzi, czy poeksperymentujesz – na początek wszystko jedno, ważne, żeby zauważać tematy, odnotowywać zdziwienia, żeby stawiać pytania i robić krok dalej, szukać drogi do odpowiedzi. Czasem ta droga jest długa, wymaga drążenia tematu. Czasem nie ma rozwiązania, czasem nie da się go znaleźć. Może być różnie, ale zawsze będzie ciekawie, ciekawiej, niż gdyby pytań nie stawiać. Zakład?

## Nie ma głupich pytań?

Powiedzenie mówi: „Nie ma głupich pytań, są tylko głupie odpowiedzi”. Czasami, każdy naukowiec to potwierdzi, najgłupsze pytania otwierają drogę do wynalazków, odkryć, do

zrozumienia tematu. To momenty, dla których warto myśleć, naukowcy krzyczą wtedy za Archimedesem\*: „HEUREKA!!!”, co oznacza po grecku: „Znalazłem!!!”. Isaac Newton, angielski fizyk i matematyk żyjący na przełomie XVII i XVIII w. (chodzi o ojca świadomości grawitacji, w swoim czasie będziesz to przerabiać na fizyce), zadał, mogłoby się wydawać, głupie pytanie: „Dlaczego jabłko spadło mi na głowę?”. I zapisał się na kartach historii nauki.



Słyszysz jakieś pytanie, przepuść je przez własną, tajną cenzurę: bardzo mądre pytanie – 1, beznadziejne pytanie – 0. I między nimi spektrum możliwości – oceniasz opisowo albo w procentach (80 procent – całkiem, całkiem), albo ułamkami zwykłymi (1/7, czyli słabo), dziesiętnymi (0,1 – blisko dna), albo w kolorach (białe – czarne czy pepitka). Szybko zorientujesz się, z jakimi pytaniami się spotykasz. Przy okazji poćwiczysz matematykę. Po co? Po to, by wyrobić sobie nawyk oceny, czy masz do czynienia z pytaniem ważnym, godnym uwagi i powagi odpowiedzi, czy też nie. Z czasem będziesz wiedzieć i już. Pytania neutralne w rodzaju: „Która godzina?” zostaw w spokoju, nie ma co ich analizować, bo raczej nie mają potencjału zmiany świata.

\*Archimedes – grecki filozof i matematyk, żył w III w. p.n.e., wyskoczył z wanny z tym okrzykiem, gdy zauważył, że ciała zanurzone w cieczy pozornie tracą na wadze tyle, ile waży wyparta przez nie ciecz.

## Pytanie to klucz

W badaniach społecznych podstawowym źródłem wiedzy do analiz są odpowiedzi ludzi na zadane pytania. Badając cokolwiek, można pytanie zadać dobrze, to znaczy jednoznacznie, albo źle, pozostawiając pole do interpretacji dla odpowiadającego. Od odpowiedzi zależy wynik badań, interpretacja wyników, a po co komukolwiek diagnoza, która nie będzie odpowiedzią na zadane pytanie albo będzie w praktyce odpowiedzią na pytanie, które swobodnie, niekoniecznie zgodnie z intencją pytającego, zinterpretował sobie badany? Takie badanie jest nie tylko bez sensu, może być groźne, może wprowadzać w błąd, bo wynik wypaczy stan rzeczywistości. (Uwaga: Jeszcze gorzej, gdy pytania nie są neutralne, a stoi za nimi intencja, narzucona

teza. To niedobrze. Trzeba umieć się orientować). Dlatego być może najwięcej czasu trzeba poświęcić na przemyślenie i dobre, logiczne sformułowanie pytania?

Jak odpowiesz na tak zadane pytania?

- „Czy chcesz zmian w Konstytucji?” – Albo tak, albo nie. Jak na to odpowiedzieć? O jakie zmiany chodzi? Nie da się udzielić racjonalnej odpowiedzi na pytanie, którego celu się nie zna.
- „Czy uważasz, że dzieci powinny mieć prawo głosu?” – Może tak, może nie, ale w jakich sprawach? W jakich sytuacjach? Trudno to w ogóle odnieść do jakichś realnych okoliczności.
- „Czy jesteś za zakazem handlu produktami z GMO?” – Kto to wie? Czy ludzie, tak zwani statystyczni obywatele, wiedzą coś na ten temat? Czy znają fakty potwierdzone badaniami naukowymi?

Przepytaj też rodzinę. Ciekawe, czy każdy zrozumie te pytania tak samo, czy będą mieć wątpliwości, czy poproszą o doprecyzowanie. Słuchając pytań, przed odpowiedzią, analizuj, czy są postawione jednoznacznie.

## Pytania zamknięte czy otwarte?

Pytania są różne, ale generalnie zadaje się je po to, żeby dowiedzieć się, co myśli pytany. A ten może odpowiedzieć: tak, nie, lub coś pomiędzy tak i nie, opisowo albo odmówić odpowiedzi. Badacze, gdy mają zbadać opinie, muszą zdecydować, jakich odpowiedzi oczekują: zamkniętych czy otwartych. To nic, czego nie znalibyśmy z codziennego życia, choć praktyka może być różna. Jak odpowiedzieć na pytanie: „Jak było w szkole?”?



Wersja pierwsza, zamknięta, prosto z życia, przykład tak zwanej skali Likerta, do wyboru: super, dobrze, jak zawsze, tak sobie, źle: „Super, pa i lecę grać w piłkę”.

Wersja druga, otwarta, opisowa, swobodna wypowiedź na temat: „Wiecie, dzisiaj do naszej klasy przyszła nowa koleżanka. Przyjechała z zagranicy. Przyniosła pyszne ciasto. Jest bardzo fajna, słabo mówi po polsku, ale to nic, będziemy z nią dużo rozmawiać, to szybko się nauczy. Pani zabrała nas do parku i rozpoznawaliśmy gatunki drzew. Było ciekawie, bo każde drzewo jest inne! Wiecie o tym? Przybiegła do nas wiewiórka, to było świetne. Podchodziła do





ręki, w ogóle się nie bała. Gdy okazało się, że Kuba ma w kieszeni orzechy laskowe, podeszła do niego, porwała je i w długą, chyba spieszyła się, żeby pokazać rodzinie zdobycz. Potem wróciliśmy do szkoły na obiad. Były pyszne klopsiki i znośna zupa. No i kompot z jabłek, całkiem ok. A po obiedzie graliśmy na dzwoneczkach i tamburynach, byliśmy taką prawdziwą orkiestrą! No w sumie fajnie było. A jutro...”

Jak uważasz, czy pytanie: „Jak było w szkole?” jest pytaniem zamkniętym, czy otwartym? Odpowiedzi się różniły, nie da się nie zauważyć. I pytania, i odpowiedzi mogą być otwarte albo zamknięte, zależy, w jakim celu się pyta, do czego ma posłużyć odpowiedź. Poćwicz. Zwracaj uwagę, jakie pytanie ktoś ci stawia, jakie pytania sama/sam stawiasz.

## □ Bliskie spotkanie z nauką

Czy nauki można dotknąć? Czy w naukę można wejść? Czy można ją zobaczyć na własne oczy? Można, to mało powiedziane. Trzeba. Rzadko coś trzeba koniecznie, ale w tym wypadku tak jest.

Koniecznie musisz (to słowo pojawia się tu po raz pierwszy i jedyny, ale to naprawdę musisz, choć zapewne bardzo chcesz :) wybrać się do jakiegoś centrum nauki. Już wiele miast ma takie placówki, najbardziej znane i największe w Polsce jest warszawskie Centrum Nauki Kopernik, ale inne też są wspaniałe. Zmusz rodzinę, powiedz, że od tego zależy twoja przyszłość. Zrezygnuj z wakacji nad morzem, nowego roweru, ale tam musisz być. Może wzmacniającym argumentem dla twoich opiekunów będzie fakt, że liczba gości w „Koperniku” zbliża się do 10 milionów?



## □ Badania społeczne (badania opinii)

Badanie opinii, zwane też sondażem, ma pokazać, co ludzie myślą na dany temat. Instytucje badawcze na zlecenie różnych podmiotów pytają: „Czy chce Pani/Pan, żeby Pani/Pana miasto było metropolią?”, „Czy chce Pani/Pan reformy edukacji?”, „Woli Pani/Pan napój na P czy na C?”, „Jak Pani/Pan wiesza rolkę papieru toaletowego?”. Może ci się wydawać, że to ważne i nieważne pytania, ale widocznie dla kogoś, te niby nieważne, też są ważne. Nie ma badania opinii bez matematyki. I to naprawdę jest wysoka półka. Badaniami społecznymi zajmują się socjologowie, żeby interpretować wyniki badań, muszą dobrze znać matematykę i umieć z niej korzystać.

Pomóż im i zasugeruj tematy. Niech to będzie dziecięcy punkt widzenia. Czego byś chciała/chciał się dowiedzieć z takich badań? Na jaki temat chciałabyś/chciałbyś się swobodnie wypowiedzieć?

Na przykład (oczywiście możesz mieć własne odlotowe propozycje):

- Jaka powinna być szkoła?
- Czy dzieci lubią wstawać na godzinę 8 do szkoły?
- Czy wakacje są wystarczająco długie?
- Jak powinno wyglądać drugie śniadanie marzeń?

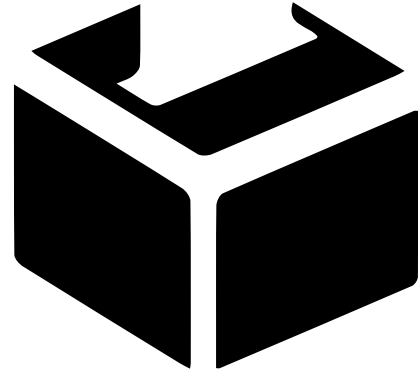
” **Rozumowanie jest to posuwanie się krok za krokiem, od wniosku do wniosku**

Galileusz

- Ile powinno wynosić tygodniowe kieszonkowe?

## □ Referendum (albo wybory)

To też matematyka, tyle że na szczeblu państwowym. Ale można sobie wyobrazić referendum w szkole, nawet w rodzinie. Pytanie może być dowolne: „Czy chcesz pić mleko, czy jeść lody?”, „Czy przerwy powinny być dłuższe?”, „Czy lekcje mają być ciekawsze, bardziej inspirujące?”, „Czy w szkole mają być stawiane stopnie?”. Masz zdanie na każdy temat? Masz. Gdyby było referendum w twojej szkole, weź udział, oddaj głos, daj sobie szansę. Jak się nie wypowiesz, wypadasz z gry. Dostawiasz – tracisz głos, tracisz wpływ. Na własną prośbę. W konsekwencji to inni decydują za ciebie, czy pijesz mleko, czy jesz lody. Czy to ma sens? Nie ma. Dlatego lepiej oddać głos, tym bardziej że fatyga jest niewielka. Stawiasz krzyżyk i wrzucasz kartkę do urny. Tak samo jest w świecie dorosłych. Do wyborów warto iść, bo tylko wtedy twój głos się będzie liczyć.



Dla rozgrzewki zorganizuj domowe referendum. Wybierz jakąś ważną sprawę. Sformułuj pytanie, zbierz głosy, podsumuj. Może uda się załatwić jakiś domowy problem? A może zainicjujesz referendum w twojej szkole? Jaki byłby temat, jakie pytanie/pytania? Może wejdiesz do komitetu wyborczego, gdy będą wybory do samorządu? Pamiętaj, że potem trzeba podliczyć głosy i podsumować wyniki. To praktyczne zadanie z matematyki.

## □ Badania domowe na każdy dzień

Badać można wszystko. Mogą to być proste obliczenia dla orientacji albo bardziej ogólne podsumowania, z których cokolwiek wynika. Choć nie zawsze muszą być to badania śmiertelnie poważne.



Badaj, co ci wpadnie na myśl. Możesz zgłębiać codzienne sprawy, nie zastanawiając się nad dziedziną naukową, to przyjdzie z czasem, ale możesz już wiedzieć albo przeczuwać, co cię interesuje najbardziej i brać pod lupę tematy zgodnie ze swoją pasją (np. weterynaria, konstrukcje, gry planszowe, sport, muzyka).

Rozejrzyj się. Co cię interesuje? Co cię dziwi? Co cię zastanawia? Przykłady:

- Ochrona konsumenta: Czy kupowane produkty ważą tyle, ile jest wskazane na opakowaniu?
- Medycyna: Jakie kolejne fazy przechodzi siniak?
- Chemia gospodarcza: Który płyn do naczyń zmywa skuteczniej?
- Dietetyka: Na czym najlepiej smażyć: na maśle, na maśle klarowanym, na oleju, na oliwie? (po ustaleniu, co znaczy „najlepiej”)?
- Psychologia: Zależność humoru od nogi, którą się wstaje.
- Weterynaria: Jaką karmę, pożywienie pies/kot lubi najbardziej?
- Estetyka: Jakie kształty, wzory mają wycieraczki sąsiadów w całym domu?
- Moda: W jakich kolorach są ubrania przedszkolaków?
- Finanse rodzinne: Wydatki rodziny w podziale na podstawowe gru-





py kosztów (jedzenie, transport, mieszkanie, przyjemności, cele charytatywne...).

- Gospodarka odpadami: Ile kilogramów papieru, kartonu i innych suchych opakowań „produkuje” przez tydzień rodzina?
- Historia: Badanie dziejów rodziny (wykreślenie drzewa genealogicznego).

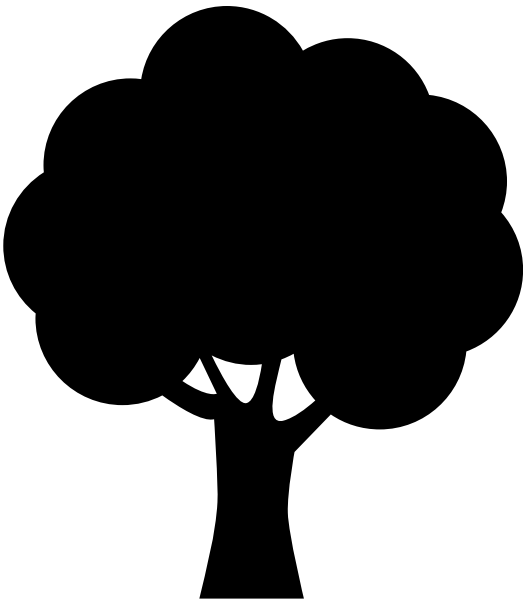
## ☐ Badania terenowe

Dociekania równie dobrze można prowadzić w terenie, może to być bardzo ciekawe. Co kto lubi. Znowu bezcenna podpowiedź – wszędzie można badać wszystko. Każde miejsce jest dobre – w mieście, w lesie, na plaży.

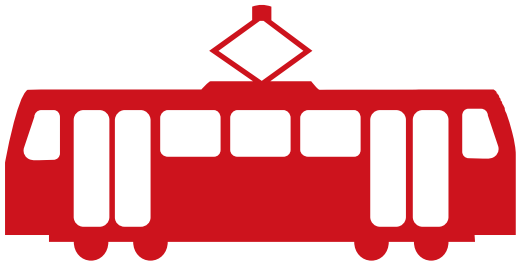
Wydź z domu i rozejrzyj się. Co cię interesuje? Co cię dziwi? Co cię zastanawia?

Przykłady:

- Urządzenie zieleni: Co ludzie robią w parkach miejskich?
- Przyroda: Jakich gatunków drzew jest najwięcej przy ulicach twojego miasta?



- Ornitologia: O której godzinie ptaki zaczynają, a o której kończą śpiewy?
- Komunikacja: Jak wygląda punktualność autobusów/tramwajów?



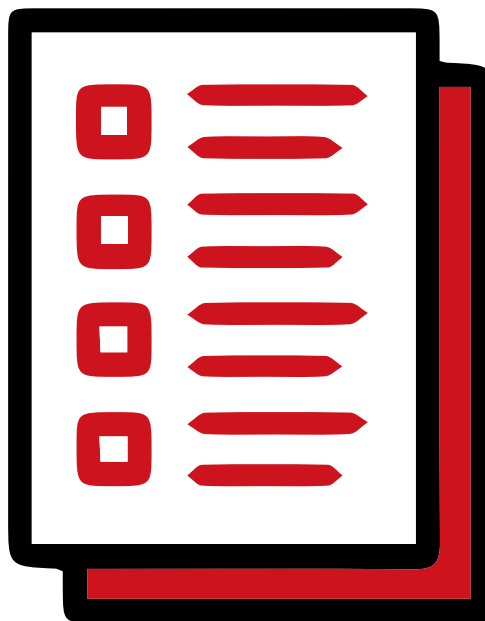
- Meteorologia: W jakim stopniu pogoda zgadza się z prognozami w smartfonie?
- Socjologia: Dlaczego ludzie chętniej wybierają te, a nie inne ogródki kawiarni?
- Gospodarka miejska: Dlaczego w centrum miast więcej jest aptek niż księgarni?
- Zarządzanie ruchem: Czy i dlaczego w pewnych miejscach drogi częściej się korkują?

# ” Wyjątki nie zawsze są potwierdzeniem starej reguły; mogą być zapowiedzią nowej

Marie von Ebner-Eschenbach

- Ubiór: Więcej kobiet na plaży nosi kostiumy jedno- czy dwuczęściowe?

## ☐ Fazy badań



Każde badanie powinno być zaplanowane. Badanie i chaos mało mają wspólnego, choć historia na pewno zna przypadki, gdy z chaosu wyłoniły się nowe idee. Badania domowe, codzienne trochę się różnią od Bardzo Poważnych Badań na Bardzo Poważne Tematy, ale od czegoś trzeba zacząć.

Dla wprawki, za każdym razem, kiedy wpadniesz na pomysł na jakieś badania (choćby to była odpowiedź na pytanie), możesz bardziej lub mniej formalnie podzielić proces badawczy na fazy:

- Jaki będzie temat badań?
- Czy masz wstępne hipotezy?
- Jakie przyjmiesz założenia wyjściowe (czas badania, ile osób obejmie badanie, jaki teren...)?
- Jak będziesz zbierać materiał do badań (wywiady, kwestionariusz pytań, dane liczbowe...)?
- Analiza wyników (Jak zestawisz wyniki?).
- Jakie wnioski dało się wyciągnąć z badań?
- Komu i jak zaprezentujesz rezultaty?

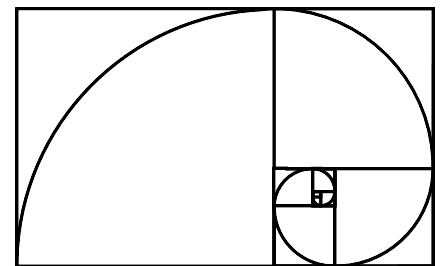
## ☐ Nowa droga

Pamiętaj: W badaniach nie ma co trzymać się sztywno schematu. Być może jedynie wyjście poza rutynę pozwoli dotrzeć do czegoś nowego? Zrozumieć coś, odkryć. Inaczej zinterpretować dane. Stawiać twórcze hipotezy, spekulować. Podążanie utartymi ścieżkami raczej nikogo do „Heureka!” nie doprowadzi. Wyobraźnia, fantazja, odwaga w myśleniu to umiejętności i sprawności, które trzeba wyćwiczyć.

Czyli myśl, kombinuj. Twoim naturalnym sojusznikiem jest twój mózg. Co przyjdzie ci z pomocą? Matematyka!

## ☐ Badanie złotego podziału

150 lat temu niemiecki psycholog Gustav Fechner przeprowadził badanie, które miało wykazać, jaki format prostokąta wydaje się najbardziej atrakcyjny. Oczywiście chodziło o potwierdzenie albo wykluczenie naturalnego wyboru proporcji boków zgodnych ze złotym podziałem (zajrzyj do rozdziału o proporcjach). Badania przeprowadzono na grupie ponad 300 osób, więc wyniki raczej nie mogły być przypadkowe. Jaki rezultat otrzymano?



Zgadnij albo sprawdź. Sporo czasu minęło od tamtych badań, może spróbujesz jeszcze raz? Przygotuj kilka prostokątów o rozmaitych proporcjach. Możesz ustalić je dowolnie, byle wśród badanych prostokątów znalazł się kwadrat, prostokąt o bokach zgodnych ze złotym podziałem 1 do 1,618, jakiś ewidentnie długi kształt. Wielkości modeli nie są ważne, ważne są proporcje. Pokazuj prostokąty różnym osobom i każdemu badanemu zadawaj pytanie: „Który z prostokątów wydaje ci się najatrakcyjniejszy?”. Notuj wskazania. Ciekawe, jak ułożą się odpowiedzi. Zgodnie z logiką, im więcej odpowiedzi pozyskasz, tym wynik będzie bardziej reprezentatywny.





# Bryły, czyli praktyczne ćwiczenia z wyobraźni

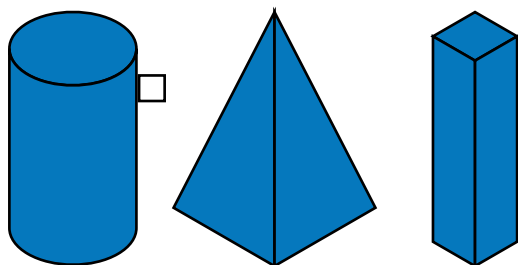
Bryła to figura przestrzenna. Ma trzy wymiary – długość, szerokość i wysokość. Już dziecko, bawiąc się klockami, poznaje kształty brył, niekoniecznie prawidłowo je nazywając. Bryła to zasadniczo (bez wnikania w ścisłą definicję) każda trójwymiarowa figura geometryczna. Bryły, którymi matematyka zajmuje się szczególnie, to wielościany, których ściany są wielokątami (wśród nich są między innymi prostopadłościany, graniastopy, ostrosłupy) oraz bryły obrotowe, powstające poprzez obrót figury płaskiej wokół osi (to np. walec, kula, stożek). Arystokracją wśród brył geometrycznych są wielościany foremne – ich ściany są wielokątami foremnymi, znanymi już od czasów greckiego filozofa Platona. Jest ich zaledwie pięć. Bryły geometryczne są przedmiotem zainteresowań matematyki, ale pojęcie „bryła” funkcjonuje też w języku potocznym. Często coś do nich porównujemy – nawet, gdy nie są to bryły regularne, kojarzą się z podstawowymi kształtami znanymi z geometrii. Właściwie każdy, a więc nawet bardzo nieregularny kształt, to też bryła. Kamień, koszyk, butelka, samochód – wszystko, jeżeli da się ograniczyć bocznymi powierzchniami i ma trzy wymiary, możemy nazwać bryłą. Bryłami architekci nazywają formy budynków, to jasne, bo budynki przeważnie przyjmują kształty geometryczne. Ciekawe, czy istoty żywe są bryłami? Pytanie, czy bryłą można nazwać zwierzę, drzewo?

## □ Prosta obserwacja

Bryły geometryczne występują w polu widzenia, ale więcej jest obiektów prawie geometrycznych, takich jak, takich tak jakby, przypominających coś.

Rozejrzyj się. Na początek z jednego miejsca, potem możesz rozszerzyć teren obserwacji. Co widzisz? Jakich brył i wariacji na ich temat jest najwięcej? Czy to jest zaskakujące? A teraz odwróć sytuację. Spróbuj do każdej z podstawowych brył dopasować coś, obiekt występujący w rzeczywistości, który kojarzy się z geometrycznym kształtem (jeśli czegoś nie rozumiesz, spytaj starszych albo zobacz w internecie).

- Kula (piłka, kula ziemiska)
- Walec (walec drogowy, kielich miksera)
- Sześcian (kostka do gry, szafka kuchenna)
- Ostrosłup (piramida w Gizie, świeca)
- Stożek (misa na owoce, abażur)
- Czworoscian (piramidka z herbata)
- Prostopadłościan (karton z mlekiem, blok mieszkalny)



## Zrób sobie platońską bryłę!

Czy są bryły idealne? Są. A co to są bryły idealne? Wymóg niby prosty, tylko trzy warunki:

- wszystkie ściany muszą być takie same, a każda musi być wielokątem foremnym,

” **Platon wierzył, że istnieje idealna kula. Jedynym jej modelem jest bańka mydlana**

**Hugo Steinhaus**

- w każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba krawędzi,
- wszystkie kąty wewnętrzne są wypukłe.

Ideał w czystej formie. Ale tylko pozornie to proste kryteria. Do tego elitarnego klubu należy tylko 5 (sic!) brył. Zwane są bryłami platońskimi, bo to grecki uczyony Platon wraz z uczniami, już w VI w. p.n.e., dowiedli, że takie warunki spełnia tylko pięć brył.

A zatem chyba warto je poznać? Do klubu należą:

- czworoscian foremny, czyli z greckiego Tetraedr
- sześcian, czyli z greckiego Heksaedr
- ośmiościan foremny, czyli z greckiego Oktaedr
- dwunastościan foremny, czyli z greckiego Dodekaedr
- dwudziestościan foremny, czyli z greckiego Iksaedr

Po pierwsze: wyobraź sobie te bryły. Proste? Trudne?

Po drugie: znajdź wzory ich siatek (wiele jest dostępnych w internecie), przenieś na papier albo wydrukuj, wytnij, sklej modele. Jeśli zrobisz to dokładnie, będziesz mieć nawet niezłą dekorację biurka. Może opatentujesz pomysł na prezenty dla bliskich?

Po trzecie: może nauczysz się ich greckich nazw? Może ta wiedza przyda ci się kiedyś w teleturnieju: „Milionerach” albo „Jeden z dziesięciu”?

## □ Symbolika brył platońskich

Platon, grecki filozof, i jego uczniowie utożsamiali geometrię ze Wszechświatem i Wszechświat z geometrią. Dla nich bryły idealne były symbolami żywiołów: ognia, ziemi, powietrza, wody i kosmosu.

Nie podglądając, jaka jest odpowiedź poniżej, wyostrz wyobraźnię. Możesz zamknąć oczy albo nie, patrzeć na modele brył albo na ich obrazy,





technika dowolna, cel – i po swojemu połączyć w pary bryły idealne i żywoły. Czy twoja intuicja zgadza się z wizją mędrca?

- Czworoscian to ogień
- Sześcian to ziemia
- Ośmiościan to powietrze
- Dwunastościan to kosmos (eter)
- Dwudziestościan to woda

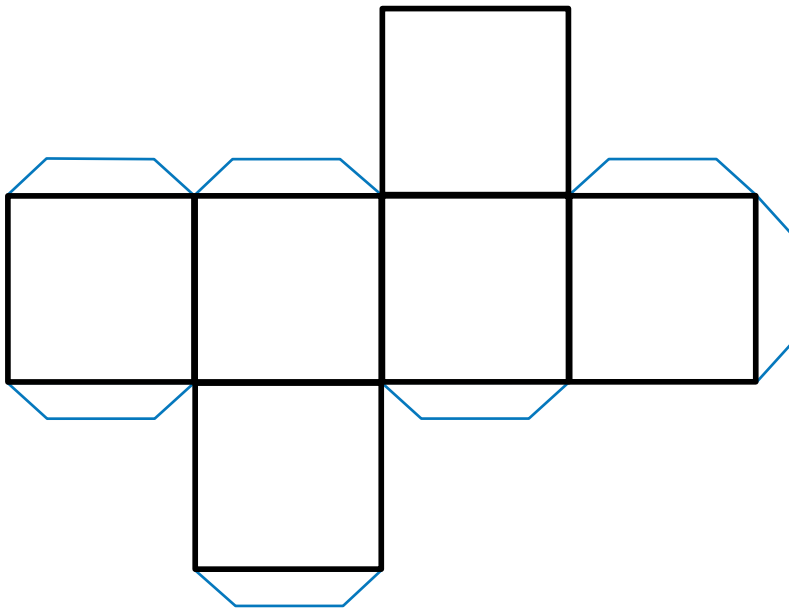
## □ Co ma bryła?

Bryła ma... trzy wymiary. Ma też ściany, krawędzie i wierzchołki.

Wszystko jedno, czy masz już własnoręcznie zrobione modele brył, czy też nie, możesz wykorzystać cokolwiek, coś, co jest bryłą. Najlepiej, gdy znajdziesz różne kształty, żeby zgłębić konstrukcję bryły. Policz ściany, krawędzie, wierzchołki. Ciekawe będą także obserwacje, ile krawędzi wychodzi z jednego wierzchołka, do ilu ścian należą te krawędzie.

## □ Siatka nie tylko na zakupy

Jak zbudować bryłę wielościenną? To nie jest trudne. Wystarczy kartka papieru i przepis albo intuicja. Siatka to nie tylko rozrysowane krawędzie, ale też układ ścian, wzajemne ich powiązanie.



Znajdź w internecie siatki różnych brył, nie tylko platońskich. Zobacz, jak są one różne. Gdy patrzy się na nie „na płasko”, łatwiej zobaczyć, z jakich kształtów się składają, czy wszystkie są takie same (nie muszą), jak łączą się ze sobą, ile kształtów łączy się w jednym punkcie. Może pokusisz się o stworzenie własnej siatki? Zwróć uwagę, żeby w odpowiednich miejscach zostawić marginesy, które posłużą do sklejenia modelu.

## □ Twórz wyobraźni

Jakie możliwości mają bryły? W realu trudno coś konstruktywnie zrobić z istniejącą bryłą. To ćwiczenie dla wyobraźni. Tam nic cię nie ogranicza. Nic nie jest za krótkie, za sztywne, pełna elastyczność, pełna dowolność.

Pokombinuj, jak można przekształcać bryły. Są różne metody, nieograniczone możliwości, więc nie trzymaj się schematów. Dla rozgrzewki wyobraź sobie, że przekształcasz jakąś znaną ci bryłę. Co będzie, kiedy pochylą się krawędzie? W jedną stronę, a może każda w inną? Kiedy przetnisz bryłę jakąś płaszczyzną? Kiedy ją rozciągniesz? Może połączysz z inną bryłą? A nuż wymyślisz coś odkrywczego? Może takie wyobrażenie sobie wyprze starą metodę liczenia baranów przed snem? Może przyśni ci się nowa bryła? Jeśli tak, koniecznie przenieś na papier twórz wyobraźni.

## □ Nowa bryła – K-dron

Czy wiesz, że nie jest dziś łatwo wymyślić coś nowego w świecie matematyki, geometrii? Od zarania dziejów przed ludzkością stało zadanie o niewyobrażalnych konsekwencjach – ktoś kiedyś musiał wymyślić koło. Czasy takich epokowych odkryć dawno za nami, czy zatem wszystko już było? Nic nie da się wymyślić? Jednak jest nadzieja. Janusz Kapusta, polski nie-matematyk, wymyślił nową bryłę, którą nazwał K-dron. Ma jedenaście ścian, dwa K-drony tworzą sześcian, w jej budowie pojawia się (czy to nie oczywiste?) złoty podział. Bryła jest bardzo użyteczna, sam autor szuka dla niej zastosowań, bo ma ona niesamowite możliwości i oblicza.

Znajdź w internecie ilustracje, animacje tej bryły.

Zobacz, jak wielkie możliwości ma ta bryła i połączenie wielu K-dronów (sam autor zaproponował ponad 160 zastosowań!).

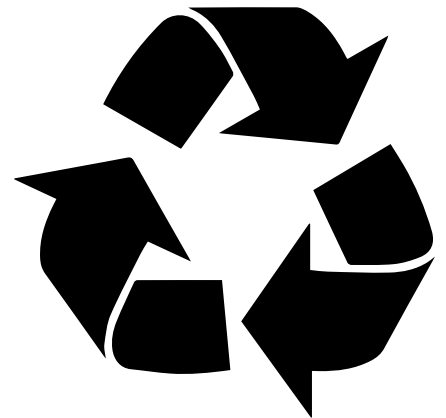
Możesz samodzielnie złożyć swój model K-dronu – wystarczy znaleźć siatkę, wyciąć i skleić. Na własne oczy sprawdzisz, „jak to wygląda”.

Na modelu zbadasz, gdzie są złote podziały (zobacz więcej na ten temat w rozdziale o proporcjach).

Możesz obejrzeć film z tą nową bryłą, gwiazdą światowego formatu w roli głównej. To na zachętę i dla inspiracji.

## □ Miasto z recyklingu

Codziennie każda rodzina produkuje śmieci, a wśród nich większość to odpady segregowane, z których w przyszłości powstaną nowe byty. Kartoniki po paście do zębów i pudełka po butach. Rurki po papierze toaletowym, po ręcznikach kuchennych. Nakrętki butelek, butelki – w różnych kształtach, puszki, wytłoczki po jajkach, słomki, torebki, sreberka... Bogactwo kształtów.



Daj im jeszcze jedno życie, nim trafią do recyklingu. Z odpadów, czyli brył, możesz zbudować cuda. Dowolną konstrukcję, miasto, kosmiczne byty, a nawet szopkę krakowską. Każda budowla będzie bryłą z brył. Przy okazji odbierzesz praktyczną lekcję konstruowania, bo ważne, żeby nic się nie zawaliło.

## □ Praktyczne i filozoficzne pytania o bryły

Bryły są wszędzie, różne, ważne i nieważne.

Rozglądaj się, wyszukuj tematy, zastanawiaj się, zadawaj pytania, szukaj odpowiedzi.

Przykłady pytań:

- Czy coś, co ma 1 mm wysokości, już jest bryłą?
- Dlaczego łatwiej transportować krzesła, abażury, które mieszczą się jedno w drugim?
- Czy drzewo jest bryłą?
- Czy coś wklęsłego może być bryłą?
- Co nie jest bryłą?
- Dlaczego wiele napojów jest sprzedawanych w prostopadłościennych kartonach?
- Czy w skrzynce zmieści się więcej prostopadłościennych kartonów z sokami, czy może butelek o okrągłym przekroju (o tej samej objętości i wysokości)?





## □ Bryły w piaskownicy (i na plaży)



Czy babka z piasku jest bryłą? W pełni, czyli na 100 proc. Ale jaką jest bryłą? To zależy od kształtu wiaderka czy foremki, bo te są różne. Babki z piasku są dla dzieci, ale budowanie rozmaitych konstrukcji, brył na plaży jest wyższą szkołą jazdy. Warto wiedzieć, że zorganizowane są konkursy na

budowę największych, najpiękniejszych obiektów. Nie każdy musi brać udział w międzynarodowych zawodach ani marzyć o rekordzie Guinnessa, ale w sumie, dlaczego nie?

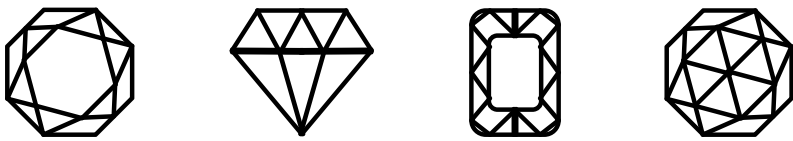
Pomysł na plażę dla całej rodziny – budujcie zamki (i nie tylko zamki) z piasku!

## □ Bryły w skali mikro

Czy wiesz, jak wyglądają i co to są kryształy? Naturalne ciała stałe o geometrycznej budowie, których płaskie ściany zawsze układają się względem siebie pod takimi samymi kątami. Kryształy narastają w różnym tempie, w różnych kierunkach, dlatego nie muszą mieć formy regularnej, nie muszą być symetryczne. Obserwacja kryształów – czy to pod mikroskopem, czy w albumie, w internecie, czy ich hodowanie cieszy każdego, niezależnie od wieku. Bo w procesie krystalizacji jest magiczna powtarzalność.

Obserwuj. Najprościej zobaczyć to na przykładzie własnej hodowli kryształów soli, ale są i inne metody:

- Wyhoduj kryształy soli. Przepis bez trudu znajdziesz w internecie. Spodoba ci się – kontynuuj badania z kryształami cukru, ałunu, boraksu (te substancje można kupić w sklepach chemicznych, w aptece). Ciekawe, jakie bryły uzyskasz?
- Obserwuj strukturę lodu w zimie. Możesz też hodować kryształki lodu.
- Przyjrzyj się oszlifowanym kamieniom szlachetnym – w biżuterii, w salonie jubilerskim.
- Obejrzyj szlifowane powierzchnie kamienne – robi się z nich elewacje, blaty. Cięcie przecina strukturę skały, a ty możesz zobaczyć, jakie kształty miały kryształy.



Mikroświat jest fascynujący, lecz trzeba się zatrzymać, pochylić. Pod mikroskopem widać najlepiej.

## □ Dwa wymiary

Intuicyjnie zdarza nam się nazywać kształt brył, korzystając z określeń zastrzeżonych w geometrii dla opisu figur płaskich. Widzisz dwa wiadra. Jedno klasyczne, w kształcie odwróconego ściętego stożka albo walca, drugie prostopadłościenne z kwadratową podstawą. Jak je nazwiemy? Raczej odwołamy się do rzutów brył – gdy patrzymy na nie z góry, widzimy kształt płaski: koło lub kwadrat. Sięgnijmy więc raczej po wiadro okrągłe, a nie w kształcie walca czy stożka, wybierzemy kwadratowe, a nie prostopadłościenne.

Spróbuj spojrzeć na otaczający świat w taki sposób – wyobrażając sobie kształty przestrzenne jako płaskie. I odwrotnie. Widzisz płaską formę – nadaj jej głębię. Wyobraź sobie, że ma trzeci wymiar.

## □ Trzeci wymiar

Bryły obrotowe powstają poprzez obrót figur płaskich. Jakie znamy figury płaskie? Koło, trójkąt, kwadrat, prostokąt, trapez, pięciokąt, sześciokąt i tak dalej.

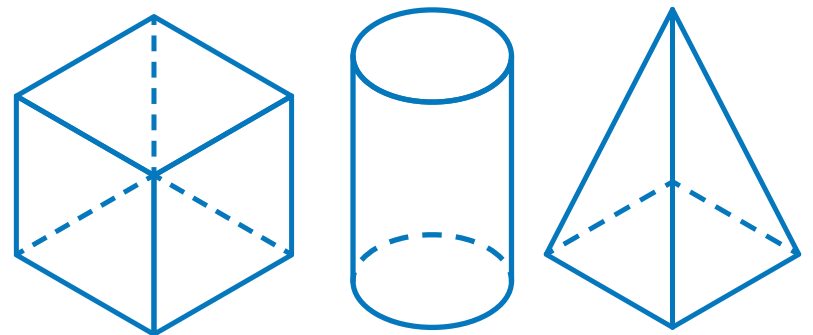
Wyobraź sobie, że jeden z boków wybranej figury zamienia się w oś wirującą pionowo. Reszta figury zatacza wirtualnie ślad dookoła osi. Czy widzisz te kształty?

A teraz wyobraź sobie skakankę, której rączki są umocowane na sztywno, a lina wprowadzona w ruch. Jaki kształt zakreśli w powietrzu? (No jasne – to zależy od tego, jak daleko od siebie będą zamocowane rączki).

## □ Od czegoś trzeba zacząć

Jak narysować bryłę na papierze? Przecież papier jest płaski? Nie szkodzi. Są metody, by oddać głębię na rysunku. Jak przenieść obraz na papier z efektem 3D (to z języka angielskiego – 3 dimensional oznacza przestrzeń trójwymiarową – jest grafika 3D, filmy 3D, kino 3D)?

Możesz zacząć od narysowania prostej figury w 3D – niech to będzie kwadrat, efektem będzie oczywiście... sześcian. Rysujesz kwadrat, z każdego wierzchołka wyprowadzasz skośne kreski w tym samym kierunku po skosie. Muszą być tej samej długości (zorientujesz się, jaką mają mieć długość, by efekt był zgodny z zamierzonym). Końce kreseczek łączysz liniami, to jest identyczny kwadrat, tylko wydaje się, że jest dalej, w głębi. Właśnie narysowałeś/narysowałaś coś w trzech wymiarach. Od tej pory zawsze będzie łatwo.



Uwaga: szybko się domyślisz, jaka jest różnica, gdy rysujesz siatkę albo coś przezroczystego (wtedy widać wszystkie krawędzie), a gdy rysujesz coś, co chcesz, żeby nie było przezroczyste. Kiedy ma nie być przezroczyste, musisz ukryć, np. wygumkować, niektóre krawędzie albo w ogóle ich nie rysować. Szybko zorientujesz się, które krawędzie są niewidoczne, ale zawsze możesz sobie pomóc, analizując model na żywo – wystarczy, że weźmiesz jakieś pudełko, popatrzysz i już wiesz.

## □ Rysunek z natury

Wielu malarzy, grafików inspirowane martwa natura, czyli nieożywione obiekty, ich kompozycje. Ważne nie tylko, co się maluje, ale i jak. Ty też możesz. Spróbuj.

Wybierz jakiś obiekt – cokolwiek, byle było prostą formą, nie bardzo skomplikowaną na początek – i spróbuj narysować tak, by wydobyć trzeci wymiar. Co to może być? Pojedynczy klocek, piramida z klocków, butelka, wazon. Kluczem jest obserwacja – zobacz, jak w rzeczywistości układają się cienie, jak rozkłada się kolor, jak ująć perspektywę. Pamiętaj, by oddać proporcje. To może być obraz w dowolnej technice, stylistyce. Od hiperrealizmu do surrealizmu. Potem pokaż domownikom. Niech zgadną, co to jest. Zorganizuj rodzinny konkurs. Niech każdy sportretuje ten sam obiekt. Porównacie efekty, porozmawiacie.







## □ Wprawka w 3D

Każdą literę, cyfrę, płaski znak możesz zamienić na papierze w wersję 3D. Jak to zrobić?

Musisz nadać literom głębię. To bardzo proste – opis jest trudniejszy niż praktyka, w praktyce każdy chwytą to w mig. W skrócie – napisz słowo tak, żeby każda litera była obramowana konturem i osobno, niech nie łączy się z kolejną. Do każdej litery, pod kątem, skośnie, w prawo dorysowuj kreseczki – krótsze lub dłuższe, od każdego wierzchołka, a w obłych literach od granicy załamania. W drugim rzędzie, na zakończeniu kresiek musisz powtórzyć kształt liter. Teraz możesz dodać cienie, pokolorować. Twoje litery mogą mieć różne fasony – to będą twoje kroje czcionek.

## □ Ziemia jest kulą?

Czy wiesz, że żyjesz na bryle? Kula ziemiska jest bryłą, prawie kulą. Przez wieki ludzie wierzyli, że nasza planeta jest płaska. Z naszego punktu widzenia tak to może wyglądać, ale my już wiemy, że to nieprawda.



Gdy będziesz nad morzem, popatrz na horyzont. Ziemia zakrzywia się, więc nie widzimy dalszego ciągu i nie jest to kwestia słabego wzroku, lecz fakt. Pomyśl, co jest metr dalej, za linią horyzontu? Wyobraź sobie.

## □ Struktura własnej roboty

Czy wiesz, jak wygląda monumentalna rzeźba Atomium w Brukseli, projektu André i Jeana Polaków? To model kryształu żelaza. Tak umownie obrazuje się budowę kryształów, budowę cząsteczek związków chemicznych. Można tak przedstawić bryły. Tym razem nie chodzi o pełną bryłę, ale jej konstrukcję – krawędziowy model bryły.

Wymyśl plan i zbuduj jakiś przestrzenny model bryły. Przydadzą się do tego słomki albo inne patyczki (np. do szaszłyków) jako krawędzie. Do tego plastelina albo inna masa, łącząca elementy w wierzchołkach. Czy to będzie klasyczna regularna bryła (sześcián najprościej), czy coś nowatorskiego, odłotowego jak rakieta kosmiczna (rakieta to też bryła) – twój wybór. Im bardziej skomplikowany efekt osiągniesz, tym ciekawiej i satysfakcja większa. W nagrodę nie musisz nic nazywać. Ciesz się dziełem własnych rąk i wyobraźni.

## □ Przekrój (teoretycznie)

To nie tylko nazwa popularnego niegdyś pisma. Ani komenda, prośba, która pada, gdy ktoś chce,

żeby ktoś inny dokonał cięcia przez coś albo czegoś. Ale to już blisko. Przekrój w geometrii to właśnie płaski kształt, powierzchnia powstała po umownym cięciu. Gdy kroisz coś nożem, z reguły (choć zakład, że o tym nie myślisz) nie jesteś zaskoczona/zaskoczony. Kroisz parówkę pod kątem prostym – dostajesz kółka, czyli okrągłe plasterki, kroisz skośnie – dostajesz plasterki w kształcie elipsy. Kroisz pomarańcze na pół – co widzisz? Też kółko. Przekrój przez chleb tostowy to prawie kwadrat. Takie cięcie jest sposobem spojrzenia na obiekt od środka. Tak dzieje się np. podczas skanowania ciała człowieka w czasie badania rezonansem magnetycznym. Efektem są „plasterki” ciała widziane od środka. Bezkrwa-wo. Ciąć, czyli robić przekrój, można na nieskończenie wiele sposobów – wzdłuż, w poprzek, pod kątem, skośnie.

Wyobraź sobie, że masz w oczach laser z nieograniczoną zdolnością cięcia wszystkiego, pod dowolnym kątem. Zrób różne przekroje. Wybierz różnorodne, oczywiste i nieoczywiste kształty. Przekrój nie zawsze, choć często, okaże się klasycznym kształtem geometrycznym. Bywa bardzo fantazyjny. Co widzisz jako efekt cięć?

Co może być ciekawe? Przekrój przez:

- dom
- samochód
- piramidę Cheopsa
- doniczkę
- górę
- kanapę
- jezioro
- czajnik
- pień drzewa
- wszystko, co masz w zasięgu wzroku, o czym wiesz, że jest na świecie.



Jakie widzisz kształty?

## □ Przekrój konkretnie

Fajnie byłoby zobaczyć, jak wyglądają różne (wszystkie możliwe?) przekroje brył geometrycznych. Z czego zrobić bryłę, żeby ją przeciąć?

Zrób bryły albo zaadaptuj różne przedmioty, nadadzą się owoce i warzywa. Z czego zrobić

bryły? Z ciasta, z masy solnej, z plasteliny, z modeliny, z gipsu (póki nie wyschnie), z papier-mâché (przepisy znajdziesz w internecie). Potrzebny będzie jeszcze ostry nóż (albo nitka), przestrzegasz zasad bezpieczeństwa i tniesz. Możesz kombinować „przed” cięciem, co to będzie. Tniesz i zadziwiasz się albo upewniasz.

## □ Cienie

Co to jest cień? To obraz, który pada na płaską powierzchnię – na ziemię, ścianę czy inne tło. Co jest niezbędne, żeby powstał cień? Źródło światła i obiekt. Pewnie nie raz, nie dwa bawiłaś się/bawiłeś, robiąc śmieszne cienie, układając palce dłoni tak, by na ścianie pojawił się cień w kształcie zająca, wilka albo lecącego ptaka. Wiesz, o co chodzi. Może teraz czas na matematyczną analizę cieni brył? Nawet najbardziej skomplikowane obiekty dają płaskie cienie, więc cieniem każdej bryły będzie jakaś figura płaska. Ciekawe, co to będzie? Od czego zależy?

Poeksperymentuj z cieniami brył. Zorganizuj źródło światła, dobrze, żeby dało się ustawiać pod różnymi kątami. Zgromadź różne przedmioty, bryły o rozmaitych kształtach. Oświetlaj i patrz, jakie cienie jesteś w stanie uzyskać, manipulując kątem światła, ustawieniem obiektów, odlegością od źródła światła. Gdy otrzymasz coś spektakularnego, możesz zrobić zdjęcie i potem analizować sytuację.

## □ Makietą

Czy wiesz, że architekci często tworzą makietę, żeby zobaczyć swój projekt? Na przestrzennym modelu łatwiej, póki jeszcze czas, wyłapać wszystkie niedociągnięcia, poprawić błędy. Ty rysujesz od dziecka jak każdy. Na papier przekładasz swoje fantazje, na kartce możesz realizować swoje najbardziej szalone wizje plastyczne. Możesz wszystko, bo wszystko da się narysować. Może zrobisz krok do przodu i przędziesz do trzeciego wymiaru?

Masz jakąś wizję? Może na podstawie narysowanego „projektu” domu zrobisz makietę? Powstanie bryła – szeroka, wysoka i głęboka, w trzech wymiarach. Tu już nie będzie tak prosto – musisz trzymać się zasad, żeby dom ustał. Spróbuj.

## □ Dekonstrukcja

Zaprojektowanie dobrego opakowania to sztuka. Projektanci muszą mieć szeroką wiedzę, sporo doświadczenia, wyobraźnię i talent do tego typu zadań. Najważniejsze, by opakowanie dobrze spełniało funkcję – dawalo ochronę zawartości. Musi się trzymać – czasem na klej, czasem na taśmę, często na zakładkę, jedynie na bazie przemyślanego wykroju/szablonu. Za





mistrza konstrukcji opakowań na meble i drobne artykuły wyposażenia wnętrz uchodzi IKEA, w tych sklepach można też kupić wiele funkcjonalnych produktów, pojemników do samodzielnego złożenia. Wszystko pasuje idealnie. Warto poćwiczyć. Wszystko jest ciekawe do zbadania.

Masz wyzwanie: zbieraj różne opakowania – małe i duże. Gdy upewnisz się, że nie są już potrzebne, rozłóż je tak, by były płaskim kawałkiem kartonu, tektury. Zdziwisz się, jak różne kształty mają pudełka. Przydatne będą: kartonik po tubce pasty, teczka tekturowa, pudełko po butach (z przykrywką), opakowanie po herbacie, karton po nowej lodówce. Analizuj kształty, rozkładaj, składaj, inspiruj się.

## □ Żadnych wzorów

Obiecaliśmy – tu nie będzie żadnych wzorów. I słowa dotrzymujemy. Nie chodzi o wzory zachowania, ale o wzory obliczeń. Ale przy jakiejś niezobowiązującej okazji warto wbić sobie do głowy (takie staropolskie określenie) wzory na pole powierzchni i objętość brył geometrycznych. Po co? Bo mogą się przydać w nieoczekiwanych momentach.

Nie wzbraniaj się przed poznawaniem wzorów. Najważniejsze: masz zrozumieć, o co chodzi, a nie wykuwać na pamięć. Bo gdy w nieoczekiwanej sytuacji będzie potrzeba obliczyć pole powierzchni piramidy Cheopsa albo objętość komina pobliskiej elektrociepłowni lub kubaturę Pałacu Kultury i Nauki, czy pojemność wanny albo garnka, możesz mieć czarną dziurę w głowie i nie pamiętać, co razy co i po co. Jak będziesz znać metodę, dasz radę w każdej sytuacji.

## □ Rzut oka

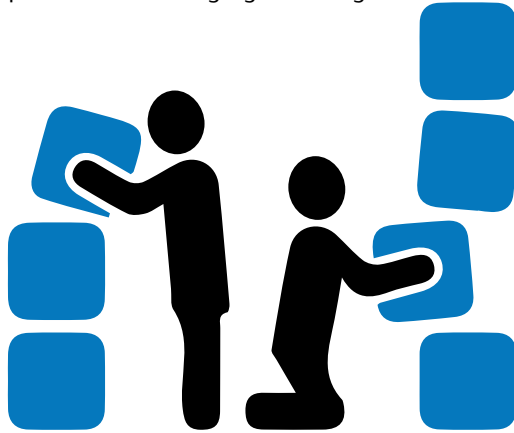
Zajrzyj do spiżarni. Torba z mąką, puszka z groszkiem, karton z makaronem, słoik ogórków, twarożek z koziego mleka, cukierek w papierku, tabliczka czekolady. Jakie to bryły? Co jest czym, co jest (albo przypomina) jaką bryłą geometryczną?

Masz zadanie do wykonania raz na całe życie – nauczysz się, nie zapomnisz. To jak z jazdą na rowerze. Ciekawe, czy masz na myśli coś, co służy do jedzenia, do picia, a jest w innym, nietypowym opakowaniu? Jak proponujesz nazwać ten kształt?



## □ Konstrukcja symultaniczna

Łatwiej naśladować czynności, gdy widzi się pierwowzór albo słyszy komendy.



Sprawdź. To ćwiczenie na wycucie – gdzie lewa, gdzie prawa strona? Co z przodu, co z tyłu? Zgromadź różne elementy, nie za wielkie, takie, z których da się zbudować konstrukcję. To mogą być zwykłe klocki, ale też kubeczki po jogurcie, pudełka po paście do zębów, rolki po papierze toaletowym, talerzyki i kubeczki jednorazowe. Dwa warunki: po pierwsze, elementy muszą być bliźniacze, to znaczy każdy z nich musi być w dwóch, czterech, sześciu egzemplarzach tak, by dało się je podzielić na dwa identyczne zestawy; po drugie, musisz mieć towarzystwo do zabawy. Usiądźcie tyłem do siebie i, nie widząc swoich ruchów, budujcie. Głośno na przemian mówcie, jaki element (ciekawe, czy będziecie umieli nazwać je poprawnie, ale ważniejsze, żeby się dobrze zrozumieć) ustawiacie w jakim miejscu. Czy powstaną bliźniacze konstrukcje? Jeśli tak, macie 100 punktów, jeżeli nie, sami oceńcie.

## □ Prawo Archimedesesa, czyli Heureka!

### Heureka! Heureka!

Jedno z ważniejszych praw – z grupy podstawowych. Nie wypada nie znać. Legenda głosi, że Archimedes, grecki filozof i matematyk żyjący w trzecim tysiącleciu p.n.e., wybiegł na golasa z łaźni, wołając: „Heureka!, Heureka!”, czyli po grecku: „Znalazłem!”. Co znalazł? Odkrył prawo wyporu. Poczytaj, poznaj, zbadaj. W skrócie chodzi o to, że ciało zanurzone w cieczy (pozwonnie) traci na wadze tyle, ile waży ciecz wyparta przez to ciało.

Przetestuj prawo Archimedesesa w praktyce. Każda kąpiel w wannie to twój poligon badawczy. A przy okazji możesz zbadać, ile ważysz. W ten sam sposób spróbuj ustalić, ile waży arbuś albo coś innego, łatwiej będzie z ciężkimi przedmiotami niż z lekkimi. Chyba że eksperymenty przeniesiesz np. do szklanki.

## □ Anatomia szytej piłki

Piłka to prawie zawsze kula, no prawie kula, bo szyta piłka nigdy nie będzie kulą idealną. Są wprawdzie piłki lane, dmuchane z jednego kawałka, kule idealne, ale złożona z wielu kawałków jest ciekawsza z matematycznego punktu widzenia. Szwajcarski matematyk Leonhard Euler żyjący w XVIII wieku odkrył zależność opisującą wszystkie wielościany wypukłe, a więc pasującą również do opisu piłki. Zależność wyraża się tak:

liczba wierzchołków (rogów) - liczba krawędzi (szwów) + liczba ścian (łat) = 2.

Sprawdź, czy się zgadza. Masz na pewno w domu szytą piłkę – małą, dużą, z plastiku, szmaciankę albo skórzaną, profesjonalną lub do zabawy. Bez znaczenia. Piłka to piłka. Przyjrzyj się, z jakich elementów, łat jest uszyta. Czy są to paski? Sześciany? Pięciokąty? Policz, z ilu i jakich elementów jest zszyta, bo być może nie wszystkie są takie same. Policz rogi, szwy, łaty. Sprawdź wynik.

## □ Ręczna robota

Jest wiele możliwości zorganizowania powierzchni piłki. Czy jakiś sposób jest najlepszy? I co to znaczy – najlepszy?



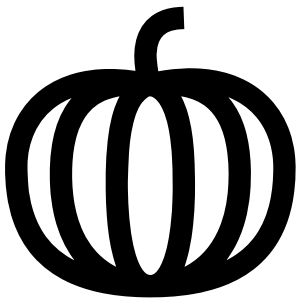
Sprawdź. Wybierz jakiś model (znów pewnie sięgniesz do internetu?) i spróbuj zrobić piłkę z gałganków. Wypchasz ją czymkolwiek, będzie twoją matematyczną maskotką.

## □ To warto mieć

Klocki drewniane „Siedem Kamieni Aleksandra” to gadżet, ale też pasjonująca zabawa i edukacja. Genialnie uruchamiają wyobraźnię przestrzenną. Z siedmiu nieregularnie, ręcznie wyciosanych z drewna klocków układa się wieżę. Każdy zestaw jest inny, niepowtarzalny. Jednym przychodzi to w mig, inni muszą poćwiczyć, żeby „złapać”, na czym polega utrzymanie równowagi. Zabawka doskonała, uspokaja, ćwiczy koncentrację, rozwija. Da całej rodzinie. Przynajmniej warto poczytać, może uda się wstrugać coś podobnego samemu?

Takie „kamienie” możesz samodzielnie zrobić





np. z dyni. To twarde warzywo, z którego doskonale daje się wycinać kształty. Najlepiej nada się duża dynia (wystarczy część). Obierasz skórkę, odkrawasz około pięciocentymetrowej szerokości część i kroisz ją na nieregularne mniejsze kawałki, bryły. Powinno ich być co najmniej pięć, lepiej więcej. To twoje „kamienie”. Możesz spróbować, co się da z nich zbudować.

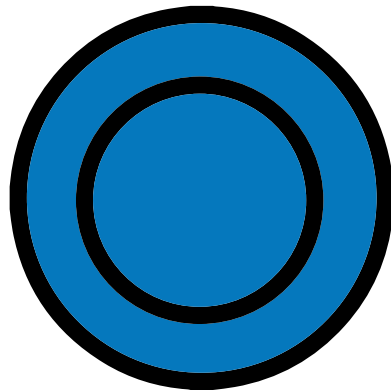
### Bryła domowej roboty

Od wieków ludzie tworzą naczynia – dzbany, talerze, kubki. Zanim ludzkość odkryła szkło, zanim nauczyła się łączyć elementy metalowe, np. miedziane czy cynowe, zanim wynalazła plastik czy duralex, toczyła naczynia z gliny. Czym one są? Bryłami obrotowymi o niezliczonych kształtach, które powstają w procesie obracania kołem garncarskim. Czy na kole można wyrobić wszystko? Czym jest „kole”?

Masz (jeśli chcesz) zadania:

- Popatrzeć na film w internecie i zobaczyć, na czym polega praca garncarza na kole garncarskim.
- Znaleźć garncarza i spróbować, jak to się robi.
- Wyobrazić sobie, jak powstają klasyczne obrotowe bryły geometryczne.
- Wymyślić jakiś autorski kształt naczynia.
- Własnoręcznie zrobić takie naczynie.

Jest duża szansa, że ci się spodoba, garncarstwo należy do ginących zawodów, ale jako hobby jest bardzo modne.



### Inwentaryzacja kuchenna

Fabryka szkła (zwana również hutą, bo naczynia tworzy się, dmuchając odpowiednio w kroplę bardzo gorącej masy szklanej) czy zakłady ceramiczne produkują bryły, z których potem pijemy, jemy, w których trzymamy owoce, wstawiamy w nie kwiaty, zamykamy przetwory na zimę. To zastawy stołowe, kubki, wazy, wazon, słoiki... Mistrzowie potrafią wyczarować najbardziej fantastyczne kształty naczyń, a nawet figurki, postacie zwierząt i inne gadżety.



Zrób inwentaryzację domowej szafki na naczynia stołowe. Pewnie trudno będzie o jakąś czystą formę geometryczną, ale charakter kształtu można połączyć z klasycznymi bryłami. Jak to widzisz? Z czym ci się kojarzą kształty, z których korzystasz na co dzień?

- Czy kubki są raczej stożkami, czy raczej walcami?
- Waza jest walcem czy kulą?
- Słoiki są jak walce czy jak beczki?
- Czy kieliszki mają czasze kuliste, a może w kształcie elipsy?

- Talerze są klasycznie okrągłe, a może kwadratowe?
- A miski, półmiski?

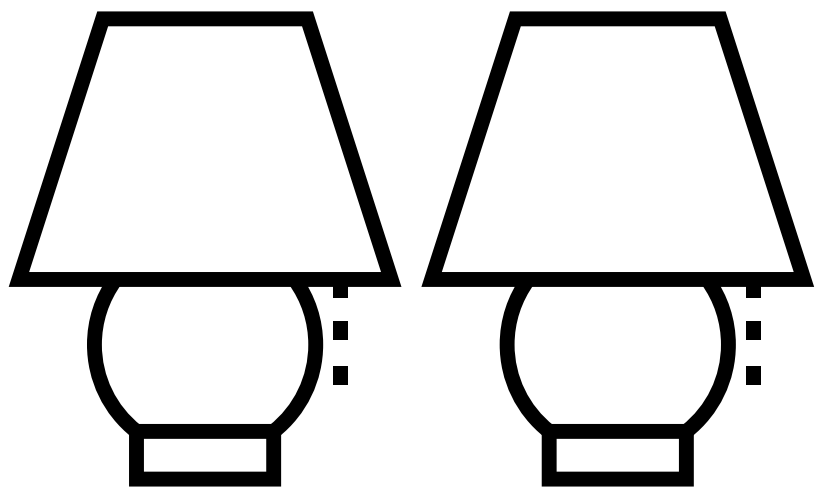
### Butelka Kleina

Wstęga Möbiusa jest kształtem „bez końca”, ale może być też bryła „bez końca” – to butelka Kleina. Naukowo można ją określić tak: „nieorientowalna rozmaitość dwuwymiarowa bez brzegu”. Trudne, ale każde słowo ma sens i daje się zrozumieć. Łatwiej, gdy już się wie, jak taka butelka wygląda.

Obejrzyj butelkę Kleina, w internecie znajdziesz wiele zdjęć, filmów pokazujących, jak powstaje. Jak myślisz, czy da się ją napętnić?

### Konstrukcja domowej roboty

Abażur z papieru, regał z pudełek kartonowych, wieszak na ubrania albo fotel z tektury. Czy wiesz, że jest nurt w projektowaniu, który polega na konstruowaniu mebli z tych materiałów? Jak można tworzyć przedmioty, bryły z prostych surowców, bez śrub, bez kleju?



Wpisz hasło w internet i zobacz, jakie fantastyczne, ale i bardzo proste fasony, formy można wyczarować ze zwykłych surowców. Po pierwsze, trzeba mieć pomysł. Po drugie, poeksperymentować z formą, po trzecie mieć patent na łączenie elementów. Spróbuj powtórzyć jakiś model, choćby w wersji dla lalek. Skorzystasz z gotowego wykroju, a może zrobisz go samodzielnie? Metoda prób i błędów pewnie będzie najlepszą szkołą. Może opracujesz jakiś patent?

„ **Matematyka**  
– to bardziej  
**czynność niż**  
**nauka**

Luitzen Egbertus Jan Brouwer





# Ciężar i objętość, czyli praktyczne miary wszystkich rzeczy, które ważą i zajmują miejsce

Wielokrotnie w ciągu dnia wykonujemy prace związane z wagą, objętością – czasem robimy to świadomie, z reguły automatycznie. Wyuczzone zachowania, utrwalone nawyki powodują, że rzadko zastanawiamy się nad pojemnością tubki pasty do zębów, ciężarem torby z laptopem, nie pochylamy się refleksyjnie nad wyborem rozmiaru garnka na makaron, nie analizujemy wagi truskawek w łubiance. Za bardzo nie roztrząsamy, dlaczego worek cementu waży 50 kg, a na opakowaniu worka ziemi ogrodowej jest napisane 50 litrów. Snu z powiek nie spędzają nam rozważania nad pojemnością plecaka czy bagażnika, ani nośność mostu, którym jedziemy do pracy. Mniej więcej wiemy, ile potrzebujemy ziemniaków na domowe frytki dla kolegów dziecka, zakładamy, że bardziej opłaca się kupić pięciolitrowy pojemnik płynu do prania niż litrowy. Nie próbujemy przelać zawartości półlitrowej butelki wody do ćwierćlitrowej szklanki, bo zdajemy sobie sprawę, że się nie zmieści. A gdy zamawiamy kawę, wystarczy, że spojrzymy na wielkość kubka i wiemy, czy chcemy małą, średnią czy dużą. Dla dziecka to tylko mikrowycinek tematów, pytania i zagadnienia mogą być odkrywcze. I zwyczajnie ciekawe. Dla nas są zwyczajne.

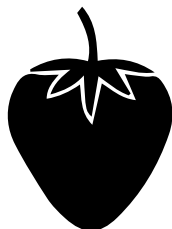
## □ Brutto, netto, tara – nierozłączna trójka

Chcesz wiedzieć, ile ważysz. Czy masz zważyć się na golasa, a może w pełnym stroju narciarskim? Głupie pytanie. Wiadomo – ważyć trzeba to, co się chce zważyć. Temat dotyczy nie tylko twojej wagi, ale wszystkich operacji związanych z ważeniem. Dlatego warto poznać trzy pojęcia związane z wagą: brutto – waga towaru z opakowaniem (ty w stroju narciarskim), netto – waga samego towaru (ty na golasa), tara – waga opakowania (twój strój narciarski).

Zaprzyjaźnijcie się. Przydają się w życiu.

Przykłady ćwiczenia i oswajania tych pojęć:

- Kupujesz truskawki, najlepiej kupić je w łubiance – nie pogniotą się w czasie przesypania, nie zgniotą w plastikowej torbie. Łubianka waży jak każde opakowanie. Co zrobić, żeby zapłacić tylko za truskawki, a nie płacić za masę łubianki?
- Kupujesz 5 kilogramów ziemniaków – sprzedawca waży ziemniaki razem z siatką, w którą są zapakowane. Czy tara, czyli waga siatki, ma praktyczne znaczenie w tej transakcji? Potem kupujesz 50 g pysznej, drogiej herbaty na wagę. Czy przy takim zakupie sprzedawca powinien uwzględnić masę opakowania?



- W barze sałatkowym nakładasz sobie na talerz ulubiony zestaw. Zanim postawisz talerz na wadze, widzisz, że tam wyświetla się informacja (-50 gramów). Co to znaczy? Czy to jest w porządku?
- Kupujecie nową kanapę do salonu. Na opakowaniu dwie informacje: masa kanapy 100 kg, masa brutto 130 kg. Ile kilogramów opakowań trzeba będzie potem wynieść do śmietnika?
- Wybierasz świeże pomidory malinowe na targu. Cena za kilogram pomidorów – 7 zł. Jak myślisz, czy to cena samych pomidorów, czy też pomidorów z ogonkami? Czy ogonki można oderwać przed ważeniem?
- A teraz skok do świata finansów. Coś kupujesz. Płacisz 12,30 zł. To cena brutto. Podatek VAT stanowi 23% od ceny netto. Czyli cena netto to 10 zł. Tak więc widzisz, że w świecie finansów masę opakowania zastępuje podatek. Ciekawe?

## □ Miary wagi i objętości

Dziś masę i objętość podajemy w systemie metrycznym. I nikogo to nie dziwi. Podstawową jednostką masy jest kilogram. Podstawową jednostką objętości jest liter. To miary umowne, ale wieki minęły, zanim wszyscy ludzie na świecie (choć obowiązują również inne systemy np. w krajach anglosaskich) umówili się, ile to jest kilogram, ile litr i że wszyscy mają to samo na

myśli. Tak jak łatwo sobie wyobrazić historię pomiarów łokciem lub stopą, tak co do wagi i objętości trudno pomyśleć, że podstawą był łut albo kamień oraz garniec, korzec, beczka, a nawet kibel. To było bardzo skomplikowane i niejednoznaczne przede wszystkim. Teraz jest prościej.

Gdy chodzisz między regałami w supermarkecie, przyglądasz się, patrz na etykiety, czytaj:

- na jakich produktach widzisz informacje o pojemności opakowania (w przypadku produktów konsystencji płynnej);
- na jakich produktach widzisz informacje o masie (dla produktów o konsystencji stałej, półpłynnej, mazistej, stanowiącej mieszaninę stałej i płynnej albo stanowiącej część stałą z mieszaniny stałej i płynnej);
- masz ochotę na świeżo wyciskany sok z pomarańczy. Jaki wybierzesz – mały, duży, średni? Jaką pojemność mają te naczynia?;
- płyn do płukania tkanin można kupić w opakowaniu 0,5 l, 1 l, 1,5 l lub 2 litry. Jakież zadasz sobie pytania przed wyborem któregoś z możliwości?;
- chcesz kupić 6 litrów czegoś do picia. Co będzie łatwiej zanieść do domu, do samochodu – 6 litrowych, papierowych kartonów czy 4 butelki po 1,5 litra?;





- jakie produkty zwyczajowo sprzedawane są jako 1 kilogram lub 1 litr?;
- ile waży sześciopak wody mineralnej w butelkach 1,5-litrowych?;
- co kupujesz na wagę?

## □ Etykiety

Różne produkty mają różnie podane informacje o objętości, masie. I nie chodzi o konkretną masę czy objętość, ale o rodzaj przekazu, formułę.

Wykorzystaj wizytę w sklepie albo przejrzyj zawartość spizarni – popatrz, jak różne są informacje o objętości i masie produktów. Od czego to zależy? Przykłady:

- Masa netto
- Zawartość netto
- Masa brutto
- Objętość
- Objętość w suchej masie
- Zawartość w suchej masie

## □ Twoja masa = twój ciężar?

Masa i ciężar nie oznaczają tego samego. Dziwisz się? To efekt pułapki wynikającej z rozbieżności znaczeń tych samych słów między językiem potocznym a językiem nauki. Potocznie wymieniamy: waga, masa, ciężar, szczególnie w odniesieniu do abstrakcyjnych pojęć: ciężar działań, waga problemu, masa kłopotów. Twoją masę pokazuje waga, twój ciężar jest SIŁĄ (ma to związek z przyciąganiem grawitacyjnym, co będzie przedmiotem zajęć na lekcjach fizyki). Czyli prawidłowo powiesz, że twoja masa to np. 35 kg, bo ważysz przykładowo 35 kg (na własne oczy widzisz wskazanie wagi). Jednak ciężar może się zmieniać. Na Ziemi właściwie wszędzie będzie taki sam (z minimalną różnicą – na równiku, gdzie będzie o 0,3% mniejszy, to do pominięcia), lecz na Księżycu twój ciężar będzie ponad 6 razy mniejszy niż na Ziemi.



Podsumuj temat z różnych punktów widzenia:

- zawsze i wszędzie twoja masa jest identyczna. Czy wiesz, ile ważysz?
- wiesz, bo pewnie nie raz o tym słyszałaś/słyszałeś, że ciało zanurzone w wodzie traci na ciężarze tyle, ile wynosi ciężar wody wypartej przez to ciało – czyli twój ciężar w czasie kąpieli w wannie zmniejsza się. Gdy wejdiesz do wanny, zaobserwuj, o ile podniesie się poziom wody.
- spróbuj podskoczyć lekko jak baletnica i ciężko jak zawodnik sumo. Ciekawe, czy wpadniesz na pomysł, jaki wysiłek musisz wykonać, jaką SIŁĘ pokonać albo zwiększyć jej działanie w każdym z tych przypadków. Da się wymyślić. Pamiętaj, że każde jabłko samo spada z drzewa na ziemię – to zainspirowało jednego uczonego wieki temu. Daje do myślenia?

## □ Ile waży walizka?

Pojęcia masa, waga i ciężar mieszają nam się w języku potocznym. Nie przykładamy do tego wagi w normalnych rozmowach – każdy wie, o co chodzi. Jednak trzeba wiedzieć, że na gruncie naukowym jest różnica i warto się z tym oswoić, najlepiej poćwiczyć.

Już wiesz, że masa, waga i ciężar to nie to samo, pytanie, czy to czujesz, rozumiesz. Jak powiesz prawidłowo? Które określenia są nieprawidłowe?

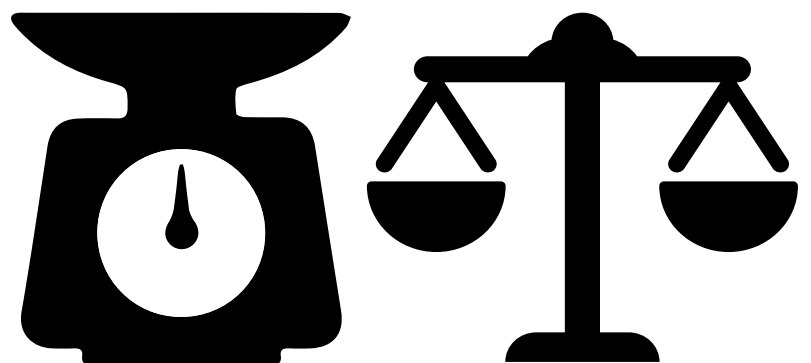
- dopuszczalna masa walizki – 20 kg
- dopuszczalny ciężar walizki – 20 kg
- mam walizkę, która waży 20 kg
- ciężar mojej walizki to 20 kg
- jaka jest masa mojej walizki?
- moja walizka jest bardzo ciężka, bo waży 20 kg

## □ Waga własnej roboty

Warto mieć wagę – szacowanie wagi na oko nie zawsze wychodzi. Gdy ważymy produkty, nabieramy wprawy – porównujemy, korygujemy wyobrażenie. Przy ważeniu jest mnóstwo zabawy, zaskoczeń, zdziwień (jednym z nich jest fakt, że kilogram pierza waży tyle, ile kilogram żelaza!).

Czy w domu masz wagę? Kuchenną, łazienkową? Każda służy do czegoś innego. Jeżeli dostaniesz zgodę, skorzystaj z domowych wag i waż, porównuj, co tylko się da. A może skonstruujesz wagę? Znajdź przepis w internecie, jest wiele możliwości – od najprostszych do bardziej skomplikowanych. Można wypróbować różne warianty, bo inna waga będzie potrzebna do ważenia małych przedmiotów, inna do ciężkich. To może być integrujące zajęcie dla całej rodziny. Zgromadź różne niewielkie przedmioty (owoce, warzywa, zabawki, papierki, monety, książki, ubrania, naczynia) i waż, porównuj, szacuj. W ważeniu nie obowiązują zasady ważenia tego samego na obu szalkach – na wadze możesz porównywać wagę zupełnie różnych rzeczy, czego chcesz. Co możesz? Wszystko, a między innymi:

- sprawdzać, co cięższe, a co lżejsze, porównywać wagę (np. czy cięższy jest kamyk, czy też muszla z wakacji);
- ustalać, ile czegoś waży tyle, ile czegoś innego (np. 2 jabłka ważą tyle, co 3 banany, albo ile trzeba pierza, żeby ważyło tyle, co kilogram żelaza?);
- ustalić, czy litr wszystkiego zawsze waży kilogram;
- kontrolować, czy produkty ważą tyle, ile podano na etykiecie (np. kilogram mąki, 100 dekagramów wędzonego łososia);
- dodawać, odejmować elementy, szukać równowagi, np. między dwoma zbiorami – klocków, cukierków, monet, guzików;
- oceniać, czy wskazania wagi zgadzają się z twoimi przewidywaniami (zawsze przed pomiarem weź obie ważone rzeczy w dłoń, jak ci to pomoże, możesz zamknąć oczy, i waż je na wycucie) – która cięższa, która lżejsza, ile ważą?;
- badać, co jest najcięższe, co najlżejsze w twoim otoczeniu.



## □ Recykling

Segregacja odpadów jest coraz bardziej naturalna. Wiemy, że tak trzeba. A czy wiesz, że wszystko, co się da, przed wrzuceniem do śmietnika lub pojemnika na odpady trzeba zgnieść, złożyć na płasko? Dlaczego? Żeby w transporcie odpady zajmowały jak najmniej miejsca. Nie mamy wpływu na ich wagę, ale objętość możemy ograniczyć.





Dlatego podejmij wyzwanie i odpowiadaj za minimalizację objętości domowych odpadów. Niech do worka trafiają zgniecione plastikowe butelki, spłaszczony karton po soku czy mleku, rozłożone pudełka po butach czy telewizorze.

## ❑ Ciężkie, lekkie?

To zależy. Dźwigasz walizkę – masz poczucie, że jest ciężka. Wybierasz pokaznego arbuza, bo w twojej ocenie jest ciężki. Ale słoń też jest ciężki. W takich przypadkach przyda się punkt odniesienia, żeby dokładniej określić, co jest cięższe lub lżejsze od czegoś innego. Jeżeli mamy oszacować wagę czegoś konkretnego, najbezpieczniej porównać to do podobnych rzeczy. Twoja walizka wydaje ci się ciężka, ale waży mniej niż walizki rodziców. Wybierasz arbuza, który sprawia wrażenie najcięższego wśród innych na straganie, waga to potwierdza. Słoń na pewno waży więcej od zebry, ale czy więcej od nosorożca? Tego nie da się stwierdzić na oko. Czasami coś wiadomo samo przez się, czasami trzeba sięgnąć do źródeł.

Zestawiaj, porównuj wagę różnych rzeczy w otoczeniu, choćby to były zestawienia nieprawdopodobne, absurdalne, szukaj oryginalnych rekordów, na różne interesujące tematy, również tego, co waży najwięcej. Ciekawostki zawsze są... ciekawe.

## ❑ Czy da się zważyć powietrze?



Po pierwsze, czy powietrze w ogóle waży?

Jak myślisz? Zbierz argumenty, tak jak czujesz na intuicję: powietrze waży czy nie waży? Zrób ankietę wśród rodziny i kolegów. Ciekawe, jakie odpowiedzi uzyskasz.

A teraz przeczytaj na dole strony, jakie są fakty\*.

## ❑ Porównywarka ręczna

Gdy masz wagę, najłatwiej z niej skorzystać i zważyć to, co chcesz, potrzebujesz. Co robić, gdy wagi nie ma w pobliżu? Ile to waży? Co cięższe, co lżejsze? Nie wiesz? Spróbuj oszacować na oko, a właściwie „na rękę”.

Poćwicz, porównuj, a nabierzesz wprawy.

Weź w jedną rękę coś, czego wagę znasz, np. kilogram mąki, cukru – to będzie twój odważnik. W drugą rękę weź to, co chcesz zważyć. Czy waży mniej, czy więcej niż „odważnik”?

Weź dwa przedmioty, każdy trzymaj w jednej ręce, i oceń – który cięższy, który lżejszy. Możesz zamknąć oczy, to czasami pomaga. Staraj się trzymać obie ręce na tej samej wysokości. Prawidłowa ocena to kwestia wyczucia.

## ❑ Waga kontrolna

Wyczucie to jedno, kontrola to drugie.

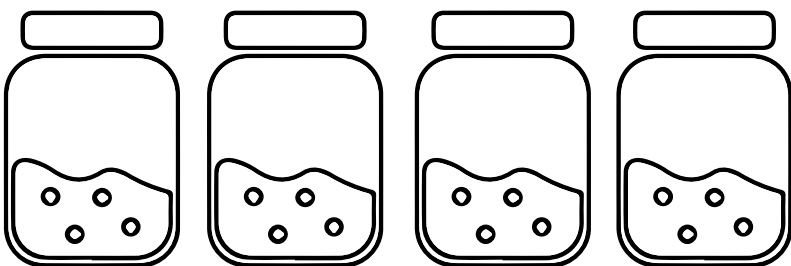
Gdy będziesz mieć wagę pod ręką, zrób ćwiczenie – podnoś różne przedmioty, szacuj ich wagę, potem sprawdzaj na wadze. Ile waży poduszka z pierza? Ile metalowy stojak pod choinkę? Ile waży książka? A butelka? Wszystko, co wokół widzisz, nadaje się do zważenia, tyle że w warunkach domowych ze zważeniem kanapy będzie kłopot. Z mniejszymi przedmiotami dasz radę. Te najmniejsze zważysz na wadze kuchennej, większe na

łazienkowej. Przypomnij sobie hasła: netto, brutto, tara. Przydadzą się, gdy zechcesz zważyć coś, co nie da się położyć, postawić na wadze. Na przykład kołdra. Jak ją zważyć? Weź ją w ręce i zważ się z nią i bez niej. Ile waży kołdra? Na koniec podsumuj – czy wskazanie wagi części się zgadzało z twoim szacunkiem, intuicją, czy nie?

## ❑ Pakowanie do słoika

W lecie robimy przetwory. Zaczynamy od decyzji: ile będzie przetworów, z jakich surowców, czyli ile trzeba kupić owoców, warzyw, przypraw. Trzeba oszacować, ile na taką ilość owoców czy warzyw potrzeba słoików i jakich, o jakiej objętości. No i już można przetwarzać.

Może się włączyć przy najbliższej okazji? Na pewno przyda się twoja pomoc np. przy układaniu ogórków. To praktyczne i bezpieczne ćwiczenie z geometrii przestrzennej. Poproś, jak będzie najlepiej – wiadomo, ogórki nie mogą się pognieść, a powinno ich wejść jak najwięcej. Poziomo? Pionowo? Chaotycznie? Wypracuj swoją metodę. Oczywiście, jeżeli do słoików będziecie rozlewać kompot truskawkowy, twoja metoda nie znajdzie zastosowania :).



Wiadomo, że ćwiczenie czyni mistrza, więc zanim spróbujesz na poważnie z ogórkami, do wprawek możesz używać dowolnych obiektów: szypek, kamieni, klocków, kulek. Im więcej kształtów, im więcej pojemników o różnej objętości będziesz pakować, tym szybciej dojdiesz do wprawy. Ciekawe będą twoje wnioski.

## ❑ Temat do przemyślenia

Objętość a pojemność? Czy intuicyjnie wyczuwasz różnicę? Dwie strony tego samego zagadnienia: coś – woda, mleko, powietrze – ma objętość, a pojemniki, naczynia, zbiorniki mają pojemność. Czyli powiesz, że do szklanki o pojemności 250 ml wlewasz wodę o objętości 250 ml. To oczywiste, że pojemność wiadra, wanny czy butelki – sprzętów, które służą do napełniania płynami – podawana jest w litrach. Czy wiesz, że wielkość np. plecaków, walizek czy bagażników samochodowych też mierzy się i podaje w litrach? Ciekawe dlaczego?

Może znajdziesz inne nieoczywiste zastosowanie określenia pojemność?

### \*Odpowiedź w sprawie masy powietrza

Nie zważysz na wadze masy powietrza, ale możesz obliczyć, ile waży. Zakładając, że przebywasz w pokoju o wymiarach: 4 metry na 3 metry, o wysokości 3 metry, objętość twojego pokoju wynosi 36 metrów sześciennych. Teraz przyjmij na wiarę, naukowcy to sprawdzili – masa 1 litra powietrza (to objętość sześcianu powietrza o wymiarach 10 cm x 10 cm x 10 cm) wynosi 1,239 g. To całkiem niewiele, jak piórko. Teraz pytanie: ile litrów powietrza mieści się w twoim pokoju? W 1 metrze sześciennym mieści się 1000 litrów powietrza, czyli w twoim pokoju jest 36 000 litrów powietrza! Stąd już prosty wniosek: 36 000 l x 1,239 g/l = 44 604 g, czyli powietrze w twoim pokoju waży ponad 44 kilogramy! Dasz wiarę? To nauka.





Na przykład:

- pojemność silnika,
- pojemność wywrotki,
- pojemność statku,
- pojemność stadionu,
- pojemność płuc.

## □ Stara praktyka

Do dziś jeszcze można kupić czarne jagody, na targach lub przy drodze, od zbieraczy, którzy odliczają miarkę nie na wagę, ale na litry. Litr jagód, pół litra jagód. Nie trzeba do tego wagi, wystarczą kubeczki albo pojemniczki o określonej pojemności.

Ciekawe, jakie jeszcze (i dlaczego) owoce, warzywa można byłoby tak sprzedawać? Pomyśl, jaka jest przewaga odmierzania na litry nad ważeniem?

## □ Objętość a pojemność (litr czy kilogram?)

Nie zawsze wszystko jest logiczne. I tak trzeba sobie radzić. Co zrobić, gdy na butelce podana jest waga – 1 kilogram, a w przepisie użycia dowiadujemy się, że mamy użyć 100 ml. Jak to połączyć? Jak się zorientować?

Jak sobie poradzisz?

Są różne metody, np.:

- wlewasz na oko, mniej więcej 1/10 zawartości opakowania (czyli objętości),
- odmierzasz objętość, np. w kieliszku z podziałką,
- odważasz 100 g (ale to zwodnicza metoda, bo gdy płyn jest cięższy od wody, to może być dużo mniej niż 100 ml, gdy lżejszy – dużo więcej. Z wodą jest najprościej – litr wody waży dokładnie kilogram),
- jak inaczej?

## □ A to przelewki!

Przelewki bez zachlapania, bez zalania kuchni są niemożliwe. Może się to rodzicom nie spodobać. Albo zdobądź pozwolenie na działanie w kuchni (w końcu się rozwijasz przez działanie), albo zajmij wannę i obiecaj sprzątanie po eksperymentach, albo poczekaj do wakacji, gdy będziesz eksperymentować poza domem. Po co? Żeby na własne oczy zobaczyć objętość i pojemność. Woda podobnie jak powietrze jest dostępna do badań prawie bez ograniczeń.

Masz zgodę? Znajdź pomysły na eksperymenty z wodą i przelewaj, rozlewaj do mniejszych po-



# Powiedz mi, a zapomnę. Pokaż mi, a zapamiętam. Pozwól mi zrobić, a zrozumiem

## Konfucjusz

jemników, obserwuj. Może powtórzysz doświadczenie Archimedesza, starożytnego naukowca, któremu zawdzięczamy odkrycie prawa o pozornej utracie ciężaru przez ciało zanurzone w wodzie? Nie musisz mieć złotej korony, by je przeprowadzić.

## □ Co najpierw i dlaczego?

Przy pakowaniu czegośkolwiek, zwłaszcza gdy rzeczy do spakowania jest dużo, kolejność ma znaczenie.

Weź jakiś pojemnik: słoik, wiadro, wazon albo garnek. Weź też mniej więcej tyle samo na objętość kamieni i piasku (to nie problem, jeśli jesteś np. na wakacjach na wsi, w górach albo na plaży), a gdy nie ma kamieni ani piasku pod ręką, poproś o coś, co pozwoli przeprowadzić eksperyment na wyobraźnię. W roli kamieni mogą wystąpić ziemniaki, jabłka albo pomarańcze, może buraki (raczej nie bierz pomidorów, bo mogą się poobijać), w roli piasku obsadź np. jakąś kaszę albo coś innego, byle sypkiego. Twoje zadanie: umieścić wszystko w pojemniku. Jak to zrobić? Co włożysz najpierw? Albo od razu wybierzesz najlepszą drogę (czyli kolejność), albo dojdiesz do tego metodą prób i błędów. To nieoceniona metoda, bo nie ma takiego mądrego, który by wszystko od razu wiedział, dobrze robił, znajdował idealne rozwiązanie. Tak czy inaczej, jak już będziesz mieć pewność, jaka droga (czyli kolejność) jest najbardziej odpowiednia, poeksperymentuj z innymi wariantami – celowo odwróć kolejność i zobacz, ile i czego zostanie, bo się już nie zmieści.

## □ Jedno w drugie

Znasz ten widok: szklanka wchodzi w szklankę, talerz daje się ułożyć na talerzu, miska mieści się w misce. Można je przechowywać na mniejszej powierzchni – jedno na drugim. Wiesz też, że są kształty szklanek, talerzy,

misek, których nie da się włożyć jedno w drugie – wtedy zajmują więcej miejsca, bo każde naczynie musi mieć własne miejsce na półce.



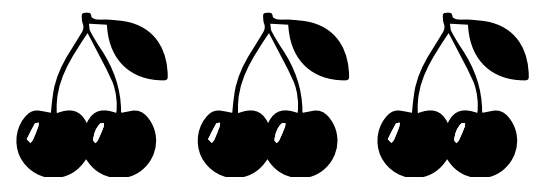
Przyjrzyj się formom naczyń. Czym się różnią? Co je łączy? Widzisz to? Gdzie jeszcze odkryjesz temat efektywnego wykorzystania miejsca, minimalizowania powierzchni, objętości zajmowanej przez przedmioty?

To kolejne powszechnie znane przykłady:

- spójrz na ogródki kawiarni – czasami krzesła daje się spiętrzyć, wtedy łatwo je złożyć, wkładając jedno w drugie;
- przy okazji grilla, zobacz, jak pakowane są naczynia jednorazowe, tacki do grillowania;
- sklep albo stoisko z lampami. Chodzi o abażury – w kształcie ściętego stożka, walca, jedne eksponowane są w stosach, inne osobno. Co jest bardziej efektywne w transporcie – stożek czy walec?

## □ Ocena wielkości

Jakie są twoje ulubione owoce? Ciekawe, co odpowiesz, ale tu chodzi konkretnie o... czereśnie. Nawet jeśli czereśnie nie są twoimi ulubionymi owocami, to znasz ich smak i na pewno choć raz stała przed tobą miska pełna czereśni. (Jeśli nie, poczekaj do lata i poproś o czereśniową ucztę, choć raz).





A teraz szczerze odpowiedz – jak jesz czereśnie?

- Wybierasz, jak leci, nawet nie patrząc,
- Wybierasz te, które wydają się największe (jak zjesz największe, wśród pozostałych znów będą inne największe),
- Wybierasz najmniejsze z nadzieją, że najlepsze okazy zostaną na koniec uczty (chyba że ktoś dołączy i zje przed tobą),
- Może jeszcze jakoś inaczej?

Gdy jesz, jak leci, nie ma tematu matematycznego, najwyżej możesz liczyć, ile sztuk zjesz, albo co która jest duża. Gdy zgodnie z przyjętą taktyką wybierasz najmniejsze lub największe, na oko szacujesz ich wielkość. Superćwiczenie dla oczu. Zastanów się, co jest kluczowe dla intuicyjnej oceny „na oko”?

## □ Ile sztuk w kilogramie?

Do czego jeszcze przydadzą się czereśnie? Czereśnie, większe od jagód, raczej nie są sprzedawane na litry, kupujemy je na kilogramy. Ciekawe, ile czereśni wchodzi na kilogram? Pewnie odpowiesz – to zależy. I słusznie – zależy, czy czereśnie są duże, średnie czy małe. Często w jednej skrzynce trafiają się i mniejsze, i większe.

Gdy będzie okazja, czyli sezon na czereśnie, pojeżdź do sprawy naukowo:

- spróbuj ułożyć szereg czereśni – od największej do najmniejszej,
- podziel czereśnie na różne zbiory i porachuj, ile jest – na sztuki, w procentach – największe, najmniejsze, średnie, podwójne (połączone ogonkami), potrójne (może się trafić), zepsute (do kosza),

Potem umyj czereśnie, wrzuć z powrotem do miski i zjedz po swojemu ze smakiem.

## □ Efektywność się opłaci

Żadna firma nie chce płacić za transport powietrza. Dlatego i producentom, i handlowcom, i firmom transportowym zależy, żeby towary były pakowane efektywnie, to znaczy tak, by zajmowały jak najmniej przestrzeni (to zagadnienie nie ma wiele wspólnego z metodą, jaką stosują producenci, którzy mały produkt pakują do wielkiego opakowania, by postrzegana przez klientów wartość była wyższa).



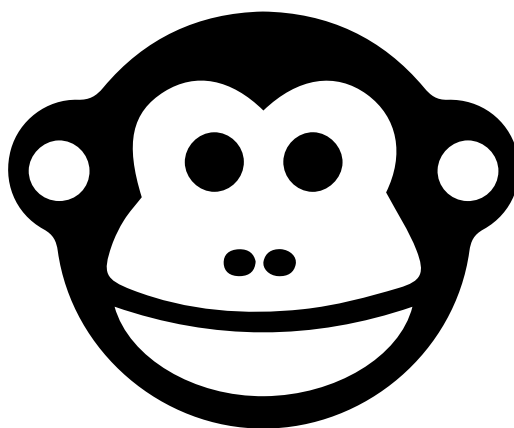
Wyobraź sobie, że musisz ciężarówką o określonej pakowności (objętości) przetransportować jak najwięcej wody w opakowaniach. Masz do wyboru różne rodzaje plastikowych opakowań, różniących się kształtem:

- prostopadłościowy, czyli opakowania takie jak klasyczne kartony, w jakich sprzedawane są soki czy mleko,
- walce, czyli opakowania w kształcie puszek z napojami,
- butelki (wysmukłe, obłe, butelki mają różne kształty),
- baryłki (takie jak największe pięciolitrowe opakowania wody),
- może przyjdzie ci do głowy jeszcze inny pomysł?

Uruchom wyobraźnię przestrzenną i w myślach zapakuj ciężarówkę. Które opakowania wydają ci się najbardziej ekonomiczne, czyli zajmują najmniej miejsca w transporcie, dzięki czemu zmieści się ich najwięcej?

## □ Eksperyment z wyobraźnią

Małpy, jak na zwierzęta, są bardzo inteligentne. Badacze, jak to badacze, badają ich inteligencję. Przeprowadzono taki eksperyment – małpa swobodnie może wystawić łapę przez prętową klatki. Ale gdy łapie podaną pomarańczę, ma kłopot. Już nie może cofnąć łapy z pomarańczą, bo zaciśnięta łapa nie mieści się między prętami. Małpa tego nie wie, nie wyobraża sobie, nie przewiduje, nie rozumie. Szarpie, walczy, ale nie da rady.



Czy zdarzyło ci się kiedyś próbować włożyć większy garnek do mniejszego? Albo wziąć za mały garnek na ziemniaki? Przelewać z fantazją większą objętość płynu do za małej szklanki? Gdy zauważysz sytuację, że coś nie mieści się w coś albo w czymś, pomyśl, co zawiodło? Wyobraźnia płata figła?

## □ Uszereguj szereg

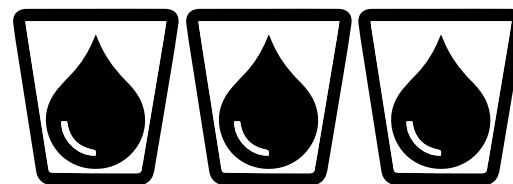
W domu jest mnóstwo naczyń – używanych codziennie w kuchni, wyciąganych z szafek przy specjalnych okazjach (np. największy garnek na świąteczną zupę, waza) i takich, które słu-

żą do dekoracji, np. wazon. Każde z nich ma pojemność, czyli wiadomo, jaka objętość płynu się w nim zmieści i ani kropli więcej. Czy na oko można powiedzieć, co jest mniejsze, co jest większe? Czasami to jasne jak słońce – patrzysz i wiesz. Jednak czasami rzeczy wydają się inne, niż są. Jak się przekonać? Trzeba sprawdzić.

Sprawdź najprościej: zbiierz naczynia, ustaw je w szeregu – od najmniejszego do największego albo odwrotnie. Poproś rodzinę o ewentualne korekty, a może nie będą potrzebne? W razie wątpliwości wlej do jednego naczynia wodę po brzegi i przelej do drugiego – sprawdzisz, które większe, które mniejsze. I tak możesz przelewać, dopóki ci się nie znudzi.

## □ Zbiórka dzienna

Woda to podstawa. Znacznie lepiej ludzki organizm poradzi sobie z brakiem pożywienia niż z brakiem wody. Musimy pić. Wszystko zostało już naukowo zbadane i wiadomo więc, kto ile wody dziennie powinien wypijać.



Sprawdź, ile wody wypijasz na co dzień. Badaniem możesz też objąć rodzinę. Przeprowadźcie je w wolny dzień, gdy nie macie w planie nic zakłócającego rutynę. Znajdź własny sposób – jak w miarę dokładnie zmierzyć objętość wypijanych dziennie płynów?

Oto jedna z metod. Weź duży pojemnik. Pijesz cokolwiek – taką samą ilość wody wlewaj do pojemnika. Tak samo liczy się czysta woda, sok, herbata. Przed snem zważysz albo zmierzysz objętość. Wynik będzie przybliżony, bo wiesz, że litr wody waży kilogram, ale już gęsty sok jest cięższy od wody. Błąd będzie niewielki, to tylko zabawa. Ciekawe, jaki uzyskasz wynik? Dzień wcześniej, przed eksperymentem oszacuj spodziewany wynik. Czy twój szacunek będzie bliski potwierdzonego faktu?

## □ Ocena na oko

Są różne pojemniki – małe i wielkie. Na oko trudno ocenić, jaką mają pojemność. Można wyćwiczyć zdolność oceny – np. doświadczeni kucharze i kucharki nie mają problemu z oceną, jaki garnek jest potrzebny do ugotowania dwóch jajek, a jaki do zupy dla 20 osób.

Poćwicz. Każdy obiad to pretekst do konsultowania. Wybieraj naczynia, tak pomożesz przy przygotowywaniu posiłków.







# Cyfry i liczby – litery i słowa matematyki

Przed tysiącami lat nasi prapraprzodkowie wymyślili znaki pozwalające zapisywać liczby – cyfry. Tyle wiemy o początkach cyfr i obliczeń, ile naukowcy zdołają odczytać z wykopanych, zachowanych glinianych tabliczek czy papirusów. Najstarsze ślady prowadzą do Babilonii i Egiptu, choć to w Indiach wymyślono genialny układ liczbowy, którym posługujemy się do dziś. Od Hindusów niezmiernie przydatne w handlu metody liczenia przejęli Arabowie. To właśnie arabskim handlarzom, którzy rozpowszechnili je w Europie, zawdzięczamy znane nam cyfry, nazywane arabskimi. Pojawienie się nowego systemu liczenia uruchomiło wspaniały okres rozwoju nauki, techniki, wypraw i odkryć geograficznych. A zatem, dzięki hinduskim i arabskim przodkom znamy i wykorzystujemy dziesięć cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Za pomocą tych znaków można wyrazić każdą liczbę, wartość, nadać numer. Bez nich trudno byłoby opisać i policzyć świat. „Liczby rządzą światem”, powiedział Pitagoras, grecki matematyk, żyjący 2500 lat temu. I od tamtej pory nic się nie zmieniło.

## □ Co jest czym

Czy wiesz, czym różnią się pojęcia: cyfra i liczba? Cyfry to 10 umownych znaków. Są jak litery, z których składa się matematyczne słowa, czyli liczby. Na liczbach można wykonywać konkretne obliczenia, np. dodawać, mnożyć, dzielić, wyrażać miary, np.: odległość, pole powierzchni, objętość, wagę, czas. Można też rozważać zagadnienia w oderwaniu od rzeczywistych zastosowań – abstrakcyjnie (czyli tak, że to coś trzeba sobie wyobrazić, bo nie jest konkretne, namacalne). Nawet dorośli mylą cyfrę z liczbą. Używają ich zamiennie, zdarza się, że niepoprawnie.

**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

Ciekawe, czy ty czujesz różnicę? Zaproś rodzinę i zróbcie rodzinny quiz przy kolacji.

Zaznacz zdania, które wydają ci się poprawne, popraw niepoprawne:

- Moją ulubioną cyfrą jest 11.
- Liczby arabskie.
- Każda liczba może być zapisana cyframi.
- Cyfry mogą być ujemne.
- Liczby mogą być ujemne.
- Wielka cyfra (wartościowo).
- Wielka cyfra (bo ma metr wysokości).
- Dodawanie cyfr jest bardzo proste.
- Liczba jest znakiem graficznym.
- Cyfra **7** jest większa niż cyfra 4.
- Cyfra jest abstrakcją.
- Cyfry służą do zapisywania liczb.
- Liczb jest więcej niż cyfr.
- Cyfry mogą być dwuliczbowe.
- Liczby mogą być dwucyfrowe.

Możesz dokładać kolejne przykłady do kolekcji.

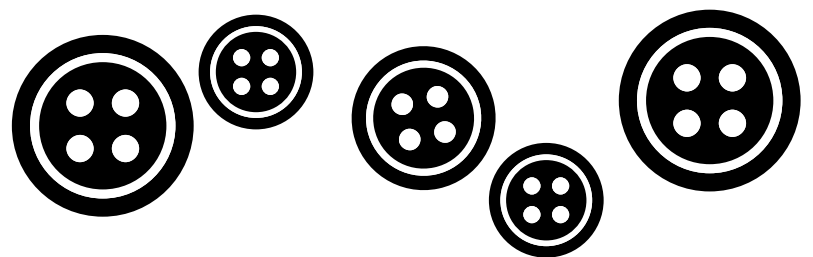
## □ Ilość czy liczba? Jest różnica

Od dziecka wiesz, że jest różnica między tymi pojęciami. Czy zdarzyło ci się kiedyś powiedzieć/usłyszeć: duża liczba mąki, większa liczba mleka, ogromna liczba kurzu? No jasne, że nie. To bez sensu, no bo co miałyby

znaczyć? Wiesz, że mówi się: ilość mąki, ilość mleka, ilość kurzu. A czy mówisz/stłyszysz: ilość miejsc w autobusie, ilość naleśników na talerzu, ilość książek na półce, ilość dzieci? Pewnie tak i, zapamiętaj, to nie jest poprawne określenie, to błąd językowy. Poprawnie mówimy: liczba miejsc, liczba naleśników, liczba książek, liczba dzieci. Zauważasz różnicę? Rzeczy dają się policzyć albo nie dają. Gdy nie dadzą się policzyć, najprawdopodobniej dadzą się zmierzyć albo można oszacować ich ilość. Gdy przedmioty, obiekty można policzyć, mówimy – liczba, gdy są niepoliczalne (w znaczeniu potocznym), ale dadzą się zmierzyć, mówimy – ilość. Na pytanie o liczbę odpowiadamy konkretnie – 4, 52, 98, dokładnie tyle, ile jest przedmiotów, obiektów. A co zrobić, gdy coś jest teoretycznie policzalne, ale jest tego tak dużo, że nie da się fizycznie policzyć – raz, dwa, trzy..., albo gdy nie chce nam się liczyć? Wtedy szacujemy i określamy na oko. Ogólnie wypowiadając się, potocznie możemy powiedzieć niekonkretnie, że czegoś jest dużo, kilkanaście, miliony, krocie, ogrom, bez liku\*...

Czyli zapamiętaj: ilością mierzymy, liczbą liczymy. Jasne?

Licz, co się da, np.: guziki, samochody wybranej marki, koloru stojące na czerwonym świetle, ptaki w locie, nogi krzesła, okna w kamienicy, litery w słowach, kwiaty wazonie, liście na gałązce, kroki, sztuce w szufladzie itp. Szacuj, co się da, np.: drzewa w parku, ludzi w zatłoczonym autobusie, samochody na wielkim parkingu, chmury, książki na półce w bibliotece, piegi na nosie, kwiaty na łące, bzyżące komary, dzieci na basenie, gwiazdy, oczka na rosale itp.



Określaj ilość, czego się da, co zajmuje przestrzeń, co da się zmierzyć, ale nie da się policzyć, np.: objętość płynów (np. woda, zupa), gazów (np. powietrze), masę produktów sypkich (np. cukier, mąka), odpowiednie miary różnych innych substancji produktów, dań (np. tłuczone ziemniaki, przecier pomidorowy, klej) itp.

\*bez liku to staropolskie określenie, że czegoś jest bardzo dużo. Znajdź więcej synonimów (innych określeń) używanych w codziennym języku na wyrażenie tego samego.





# ” Liczby rządzą światem

## Pitagoras

### □ Uwaga! Pułapka językowa

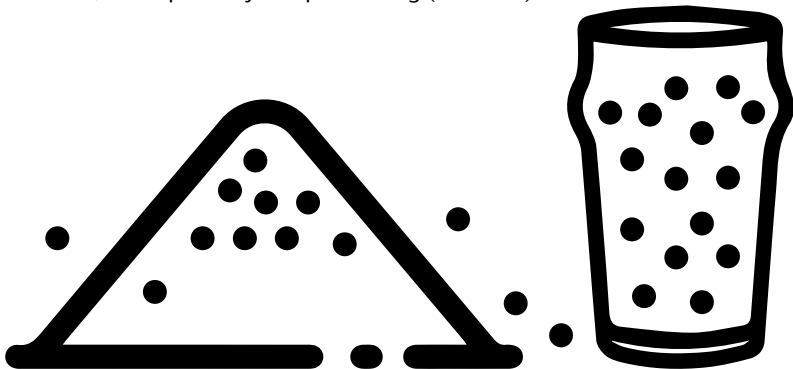
Język potoczny to jednak nie matematyka, bywa, że trudno doszukać się w nim logiki (wyłapują to bezbłędnie cudzoziemcy uczący się języka polskiego i małe dzieci!). Taki przykład: Dzwoni telefon. Ktoś, kto dopiero uczy się języka polskiego pyta: „Czy jest Ala?”. Pada odpowiedź: „Nie ma.”. „A kiedy ma?” – pyta dzwoniący. Dla nas to śmieszne, ale czyż cudzoziemiec nie zapytał logicznie? Wracając do liczby i ilości, powyższe zasady dotyczą odpowiedzi na pytania, określania stanu faktycznego. W pytaniach jest inaczej – bo kto zapyta: „Jaką liczbę lekcji miałeś dzisiaj?”, „Jaką liczbę kredek masz w piórniku?”, „Jaką liczbę kokardek mam ci zawiązać?”. No nie! Pytamy „ile” bez względu na policzalność czy niepoliczalność. Ile chcesz mleka? Ile chcesz kotletów? Ile dni zostało do końca tygodnia? Ile masz lat?



Poćwicz, wsłuchaj się w mowę. Wyłapuj pułapki, nielogiczności. Może uda ci się wytłumaczyć wątpliwe przypadki po swojemu? Dzieci, jak cudzoziemcy, świeżo patrzą na język i też trafnie wyłapują to, czego dorośli już nie dostrzegają.

### □ Kwestia precyzji

Powoli oswoisz się z różnicą między pojęciami „ilość” i „liczba”, staną się dla ciebie oczywiste. Zwróć uwagę (to też oczywiste, ale pierwszy raz w życiu trzeba to zauważyć), że drobna zmiana zmienia sytuację. Gdy kupujesz np. żółty ser, możesz poprosić o 20 dkg sera (to ilość) albo o 10 plasterków (to liczba). Gdy pożyczasz od sąsiadów cukier, możesz poprosić o trochę cukru (to ilość) albo o jedną szklanekę cukru (to liczba). Gdy kupujesz mięso – prosisz o kilogram mięsa (to ilość) albo o konkretne dwa kawałki, które pokazujesz sprzedawcy (to liczba).



Przy okazji zakupów (to chyba najbardziej codzienny obszar ćwiczenia) zwróć uwagę, co jak się kupuje. Na sztuki, plasterki, opakowania czy na wagę, objętość.

### □ Detektyw korzeni

Obecnie posługujemy się dziesiętnym systemem liczbowym, ale nie zawsze tak było. W starożytnej Mezopotamii obowiązywał system sześćdziesiątkowy. Podstawą była liczba 60. Nadal dotyczy to pomiaru czasu

– mamy 60 minut, 60 sekund. Podobnie jest z kątami – kąt pełny ma 360 stopni. Jeszcze niedawno jajka kupowano na kopy (kopa = 60 sztuk) albo na tuziny (12 sztuk, czyli 5 tuzinów jaj = 60, czyli kopa). Nasz system, który bazuje na liczbie 10, jest uniwersalny i wygodny. Skąd ten pomysł? Może inspiracją było 10 palców? Bo jak wiadomo, na palcach liczy się bardzo wygodnie.

Jak myślisz? Poszukaj w źródłach – w książkach, w internecie. Trochę historii ci nie zaszkodzi. Przekonasz się, że warto, bo początki matematyki były fascynujące.

### □ Jakie mogą być liczby?

Przeróżne. 10 cyfr pozwala zapisać każdą liczbę, a liczby opisujące świat są naprawdę różne, na poznanie niektórych, np. liczb niewymiernych, zespolonych, przyjdzie czas. Na razie obracasz się w świecie liczb naturalnych dodatnich i ujemnych, wymiernych, parzystych i nieparzystych, ułamków zwykłych i dziesiętnych. Liczba może należeć do kilku zbiorów – np. 2 jest liczbą naturalną, parzystą, dodatnią. Trochę skomplikowana ta matematyczna systematyka. Jest konieczna do celów naukowych, przerobisz cały materiał w szkole. Nazwy nie są najważniejsze, ale porządkują myślenie. W życiu co chwila masz do czynienia z różnymi liczbami, więc raczej nie możesz ich ignorować.

Poćwicz. Widzisz jakąś liczbę – może to być numer, cena, procent, mierzysz długość, patrzysz na wagę albo liczysz przedmioty w polu widzenia – nazywaj je, choćby w myślach. Chwilę poćwiczysz i już wiesz, co jest czym.

- Widzisz trzy jabłka na talerzu – 3 to liczba naturalna, mówimy też, że jest to liczba całkowita i jest dodatnia.
- Masz 118 cm wzrostu – to też liczba naturalna, ale gdy masz 118,3 cm, to jest już liczba wymierna, a nie naturalna, ponieważ masz o 3 milimetry więcej niż 118 cm. Być może za tydzień będziesz mieć 118 i 4 milimetry. Ciągłe przecież rośniesz.
- Pożyczyłaś/pożyczyłeś od kolegi 5 zł – masz dług, wynoszący 5 zł, czyli tyle musisz oddać. Dopóki nie zwrócisz, twój stan posiadania to (-5) zł. Minus 5 (liczby ujemne zaznaczamy minusem przed liczbą) to przykład liczby ujemnej.
- Na stole leży pizza pokrojona na cztery części. Bierzesz jedną część, czyli zaraz zjesz jedną z czterech części, to znaczy jedną czwartą całości. Gdybyś chciała/chciał zapisać, to będzie ułamek zwykły:  $\frac{1}{4}$ .
- Woda mineralna kosztuje 2,80 zł. To informacja, że nie 2 zł ani nie 3 zł, tylko pomiędzy. 2 złote to za mało, ale gdy dasz 3 zł, dostaniesz 20 groszy reszty. 2 i 3 są liczbami naturalnymi, 80 groszy to ułamek dziesiętny. 2,80 to liczba wymierna. Liczby wymierne będą tematem lekcji matematyki za kilka lat, ale przecież już dziś masz z nimi do czynienia. Większość cen jest liczbami wymiernymi, co do grosza.

**118 cm**  
**2,80 zł**

### □ Liczymy, szacujemy, sprawdzamy

W pewnym, niewielkim zakresie liczymy w lot, intuicyjnie: rzucasz okiem i wiesz – na stole leżą 3 książki, na półmisku jest 7 truskawek, na łące pasie się 6 krów. W określonych sytuacjach w ogóle się nie zastanawiamy, np. ile mamy palców u ręki. Wiemy od zawsze i nic się raczej nie zmienia. Ale wkoło nas jest wiele tematów do policzenia, oszacowania. Wyniki mogą być ciekawe, czasem zaskakujące. Najważniejsze, żeby wypracować nawyk oceny sytuacji, również pod

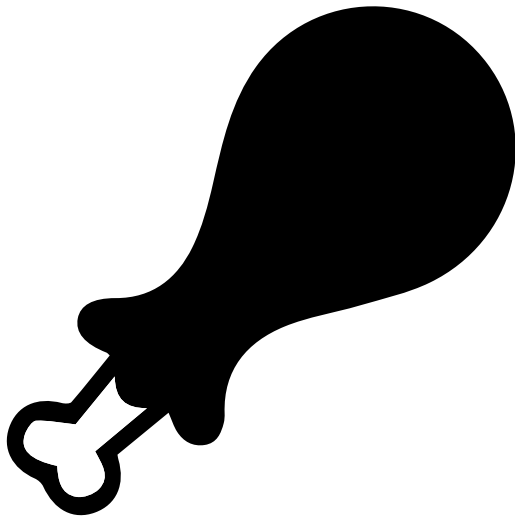




kątem szacowania liczebności zbiorów, przewidywania wyniku pomiarów. Nie ma wyjścia – trzeba ćwiczyć. Każda okazja daje szansę.

Wprawiaj się w szacowaniu – ile czego może być? Dotyczy to nie tylko rzeczy, ale też czynności, czasu, miar. Najpierw szacuj, potem sprawdzaj, czy wynik zgadza się z twoją intuicją. Tylko tak dojdiesz do perfekcji.

- ile kroków jest do drzewa?
- ile samochodów przejedzie przez skrzyżowanie, zanim zmieni się światło?
- za ile minut dojdiesz do przystanku?
- ile szafek jest w szatni na basenie? (ile jest wolnych?)
- ile sztuk zmywa się w zmywarce?
- ile wody jest w szklance?



- ile waży udko kurczaka?
- ile obrazów wisi na ścianach w całym domu?
- ile jest miejsc w kinie?

## □ Odliczanie

Gdy liczymy, odliczamy, wyliczamy elementy, mówimy na głos: raz, dwa, trzy albo jeden, dwa, trzy. Co ciekawe, obie formy są poprawne, choć „raz” częściej używamy do odnotowania krótkich zdarzeń – np. uderzenie zegara, krok w tańcu, klaskanie, marsz.

Jak ty odliczasz? Sprawdź, jak odliczają domownicy. Przeprowadź małe ćwiczenie – chcesz policzyć coś, cokolwiek, czego jest np. 10. Policz od tyłu – 10, 9, ... Ciekawe, jaką formę wybierzesz automatycznie – jeden czy raz.

## □ A to ciekawe!

„Raz” nie jest ani nazwą cyfry, ani liczebnikiem, pochodzi z dawnych czasów, gdy oznaczało uderzenie szablą. Gdy ktoś kogoś trafił, wołano „raz!”. Stąd w naszym języku nadal sformułowania „razić kogoś”, „raz za razem”.

## □ Personalizacja

Cyfry są wdzięcznym materiałem do twórczości graficznej. Wybitny hiszpański malarz, grafik, rzeźbiarz, twórca ceramik Pablo Picasso (XX wiek) interesował się kształtem cyfr, był zafascynowany ich grafiką, choć matematyka nie była jego żywiołem.



Stwórz własną wizję galerii cyfr. Przerób cyfry na ulubione zwierzątka, rośliny, postaci, fantastyczne stwory, co lubisz, na co masz pomysł. Nadaj cyfrom osobowość, przypisz kolory. A może stworzysz własną czcionkę, uformujesz cyfry w unikatowy sposób, którego nikt wcześniej nie wymyślił? Może to będą dzieła sztuki?

## □ Liczby opisują świat

Liczby mają znaczenie dla opisu świata. Mówimy:

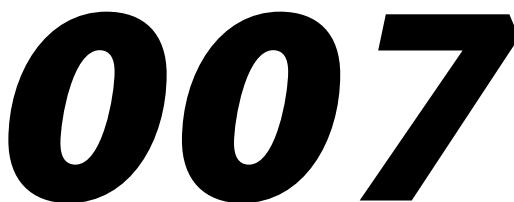
- Ziemia jest jedna
- mamy cztery pory roku, cztery strony świata
- w roku jest 12 miesięcy, 52 tygodni, 365 (albo 366) dni
- tydzień ma siedem dni
- doba ma 24 godziny, godzina dzieli się na 60 minut, każda minuta na 60 sekund

To tylko oczywiste przykłady związków pomiędzy liczbami i światem. Jest ich bez liku.

Dotrzyj do kolejnych. Poszukaj i poznaj jak najwięcej symbolicznych określeń, powiązań z liczbami.

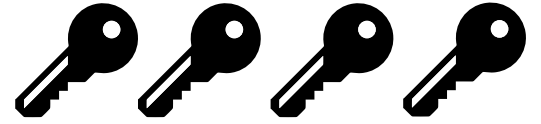
## □ Liczbowy James Bond

Nie wszystko da się policzyć, ale ogromnie wiele rzeczy na świecie można. Dla zabawy, z ciekawości, z nudów, dla ogólnego pojęcia, dla wprawy.



Bądź jak dobry agent, który rejestruje i analizuje wszystko, co go otacza. Stawiaj pytania, sobie i innym (tylko nie zamęcz otoczenia)

– w domu, po drodze do szkoły, w parku, wszędzie. Co możesz robić z tą wiedzą? Myśleć, analizować, szukać związków, porównywać. Ważne, że patrzysz uważnie na świat.



Czy wiesz:

- ile macie kluczy?
- z ilu pokoi składa się wasze mieszkanie?
- na ilu „żabkach” wiszą firanki?
- ile jest krzeseł w domu?
- ile schodów prowadzi na piętro?
- ile drzew widzisz z okna?
- ile mieszkań jest w twoim domu?
- ile klas jest w szkole?
- i tak dalej, i tym podobne...

## □ Metody liczenia

Zadanie – policzyć coś, czego jest dużo. Policz jak najprościej i nie pomylić się. Niby łatwy temat, ale mnóstwo możliwości i tematów do przemyślenia. Jeśli bierzesz udział w akcji zbierania nakrętek na jakiś szczytny cel, policz je. Jeżeli nie zbierasz nakrętek, możesz zabawić się i wprawić jednocześnie, licząc cokolwiek innego, byle było tego sporo, choćby szyszki zebrane w lesie wypełniające koszyk. Gdy jest duża liczba przedmiotów do policzenia, łatwo można się pomylić. Trzeba uważać, żeby nie musieć liczyć wiele razy, tylko raz, a dobrze.

Pobaw się i policz, ile jest w zbiorze. Wybierz ulubioną metodę, a jest ich wiele:

- Liczysz pojedynczo.
- Liczysz parami.
- Odkładasz piątkami, potem łączysz piątki w dziesiątki i dopiero sumujesz.
- Odkładasz dziesiątkami, potem je dodajesz.
- Układasz w rzędach po ileś sztuk, a potem mnożysz.
- Może zważysz jedną (albo lepiej dziesięć?) nakrętkę, a potem cały zbiór, i podzielisz wagę wszystkich nakrętek przez wagę jednej (dziesięciu). Pamiętaj o odjęciu wagi pojemnika. Kiedy ta metoda jest dobra, a kiedy się nie nadaje?
- A może znajdziesz swój sposób? Każda metoda jest dobra, byle wynik się zgadzał. Zawsze możesz policzyć różnymi metodami i sprawdzić wynik.

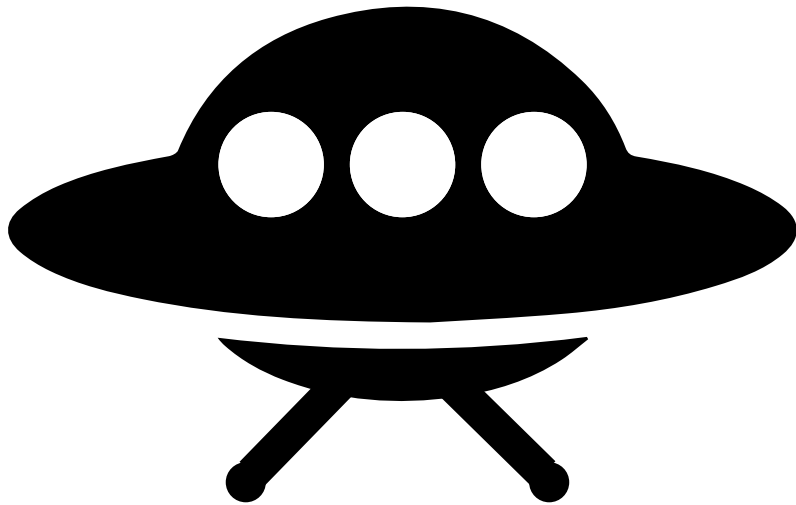
Jaką metodę wybierzesz? Która jest twoim zdaniem najprostsza? Czy któraś daje gwarancję niepopelnienia błędu? Wybór najprostszego rozwiązania problemu nazywa się optymalizacją.





## □ Gość z obcej planety

W zachodniej cywilizacji (choć inaczej w różnych krajach) stosujemy dwa systemy – arabski i rzymski (łaciński). Mówimy więc o cyfrach arabskich (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) i rzymskich (I, V, X, L, C, D, M).



Wyobraź sobie, że masz dogadać się z przybyszem z innej cywilizacji, która nie zna cyfr, nie możesz powiedzieć jeden, dwa, pięć, bo i tak nie zrozumie tych słów. Jak pokażesz tej niezemskiej istocie na migi (z użyciem palców, dłoni) 1? Jak 2? Jak 5? Jak 10?

Prawie pewne, że pokażesz jeden palec, dwa palce, rozwiniętą dłoń, dwie dłonie. No właśnie. I taka jest geneza cyfr rzymskich (czy w istocie, są to cyfry, czy też litery?). I – jeden palec. II – dwa palce. V – pięć (jak jedna dłoń), X – dziesięć, jak dwie złożone dłonie. W tym systemie Rzymianie wykorzystali też litery, od początkowych słów łacińskich – C (100) – centum, M (1000) – mille. Symbole literowe L (50) i D (500) też zapewne pochodzą od słów, ale tu nie ma pewności, bo interpretacja bywa odmienna.

## □ Szukaj i odkrywaj

Cyfry rzymskie nie są ani uniwersalne, ani wygodne, nie da się przeprowadzać na nich obliczeń, dlatego używane są tylko w określonych zastosowaniach, głównie do numeracji wieków wydarzeń, kadencji, edycji. Do czego się przydają?

# MDLXXIV

Poszukaj w źródłach i wkoło siebie, a na pewno zwrócisz na nie uwagę:

- na starych budowlach cyfry rzymskie oznaczają rok budowy (np. MDLXXIV),
- na cyferblatach zegarków (spytaj, czy w rodzinie ktoś ma zegar z rzymskimi cyframi, możesz też poszukać takich rozwiązań na wystawach sklepów jubilerskich, w witrynach zegarmistrzów),
- zwyczajowo rzymskimi cyframi oznaczamy wiek (żyjemy w XXI wieku), często miesiące (np. 1 VI 2000 roku),
- kolejne edycje wydarzeń kulturalnych, zjazdów, kongresów, konkursów, festiwali często mają rzymską numerację, np. XVIII Międzynarodowy Konkurs Pianistyczny im. Fryderyka Chopina, VII Krajowy Kongres Matematyków,
- od wieków tradycyjnie władcy, królowie i papieże przyjmują imiona poprzedników z kolejnymi numerami rzymskimi: Henryk VIII, Jan III Sobieski, Elżbieta II, Jan Paweł II.

Na pewno znajdziesz kolejne zastosowania. Naucz się rozkodowywać rzymskie oznaczenia.

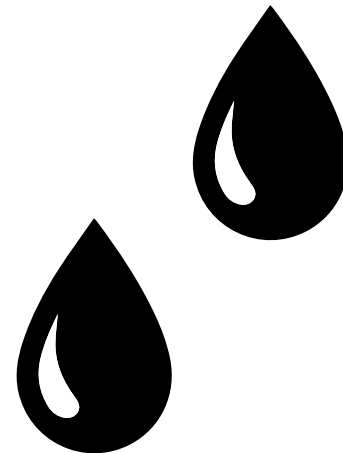


## □ Język potoczny

Czy znasz te potoczne powiedzenia? To związki frazeologiczne. W codziennym języku jest wiele powiązań z cyframi, liczbami.

Co znaczą? Objasnij je własnymi słowami, jak potrafisz.

- Raz, dwa!
- Gdzie kucharek sześć, tam nie ma co jeść.
- Co dwie głowy, to nie jedna.
- Pleść trzy po trzy.
- Spadać na cztery łapy.
- Jak dwie krople wody.
- Do trzech razy sztuka.
- Dzielić włos na czworo.
- Jesteś numerem jeden.
- Masz dwie lewe ręce!
- Piąte przez dziesiąte.
- Siódma woda po kisielu.
- Drugie dno.
- Szósty zmysł.
- Być w siódmym niebie.
- Na dwoje babka wróżyła.
- Gdzie dwóch się bije, tam trzeci korzysta.



Zwróć uwagę na takie powiedzenia. Zapisuj (choćby w pamięci) kolejne.

## □ 5, 10, 20 pytań

Matematyka przydać się może w towarzyskich zabawach. Jedną z nich jest adaptacja popularnej gry polegająca na odgadywaniu rzeczy, osoby, którą ktoś ma na myśli. Gdy w roli bohatera obsadziś jakąś liczbę, będzie wersja matematyczna.

# 5 10 20

Znajdujesz chętnego do zabawy. Za każdym razem trzeba ustalić zakres liczb (np. do 20, ale może być do nieskończoności, wtedy zabawa może trwać „w nieskończoność”), rodzaj liczb (czy tylko całkowite, czy też ujemne) i liczbę pytań, jaką można zadać. Każde kolejne pytanie, na które udzielasz odpowiedzi, zawęża zbiór kandydatów.

Przykład: ty wymyślasz liczbę: np. 9. Umawiacie się na 5 pytań. Partner w zabawie zadaje ci pytania, ty odpowiadasz:

- Czy to jest liczba parzysta? Nie.
- Czy jest większa od 10? Nie.
- Czy dzieli się przez 3? Tak
- Czy dzieli się przez 2? Nie.
- Czy jest liczbą pierwszą? Nie.

To 9. Tak! Zgadza się. Możesz zaproponować też wariant gry z pojęciami matematycznymi do odgadnięcia: linia, ułamek, suma, zbiór... Też będzie ciekawie.

## □ Skąd ty to wiesz?

Inną zabawą może być odgadywanie pomyslanej liczby. Jak zawsze muszą być jasne reguły. Trzeba ustalić, w jakim zakresie liczb operujecie, jak trudne mogą być polecenia (to zależy od wieku i umiejętności obu graczy). W grę można bawić się już z bardzo małymi dziećmi, wystarczy za-





węzić zakres liczb do 5 do 10 (liczby można zastąpić przedmiotami, które dziecko łatwiej sobie wyobrazi – np. 5 lizaków) i ograniczyć działania do dodawania, odejmowania.

Spróbuj. Zaproś kogoś do zabawy. Wcześniej musisz się przygotować – w tajemnicy ułóż jakieś równanie z jedną niewiadomą (to będzie dowolna liczba, którą ma pomyśleć twój partner w zabawie). Zobaczysz, zrobisz wrażenie, wzbudzisz podziw. Bezcenne!

Może to wyglądać na przykład tak:

Układasz dowolne równanie (mogą być bardziej lub mniej skomplikowane), byle tajne. Np.:

$$(X + 8) \times 2 - 6 = Y$$

Gdzie: X – pomyślana przez partnerkę/partnera liczba, Y – podany przez nią/niego wynik po obliczeniach.

Przed zabawą przekształć je tak, by błyskawicznie po usłyszeniu wyniku (Y) podać, jaka była pomyślana liczba (X):

$$2X + 16 - 6 = Y, \text{ czyli } 2X + 10 = Y, \text{ czyli } X = (Y - 10) : 2$$

Zapamiętujesz, że żeby szybko podać X (tempo odpowiedzi ma znaczenie dla wrażenia!), od podanego wyniku (Y) odejmujesz 10 i dzielisz przez 2.

Zabawa się rozpoczyna. Twoje kolejne polecenia:

- pomyśl jakąś liczbę jednocyfrową,
- dodaj do niej 8,
- wynik pomnóż przez 2,
- od wyniku odejmij 6.

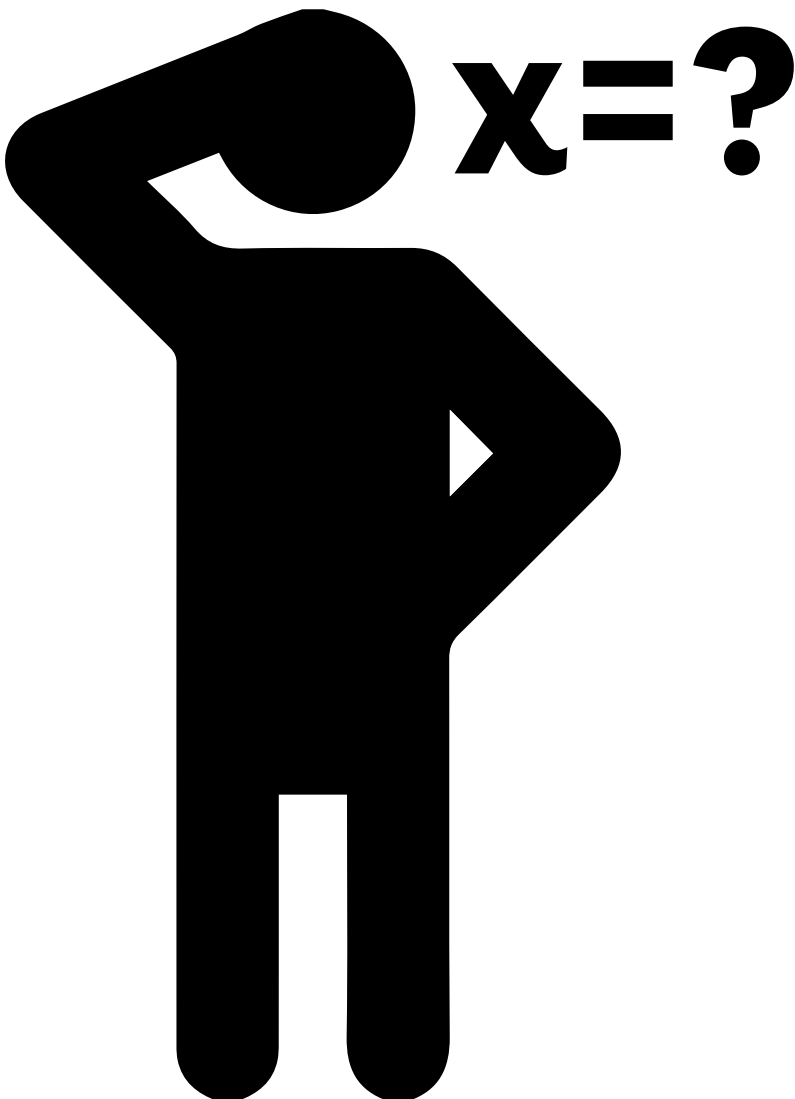
Jaką liczbę otrzymałaś/otrzymałeś?

Partner: wymyśla liczbę X, potem w myślach wykonuje twoje polecenie.

Na koniec podaje ci uzyskany wynik.

Teraz w lot liczysz i podajesz, jaka była pomyślana liczba. Lepiej wcześniej przećwicz na próbę. Powiedzmy, że ktoś pomyślał „4”. Po twoich wskazówkach osiągnął wynik, to „18”. Twoje równanie do rozwiązania na koniec wygląda tak: w myśli błyskawicznie od 18 odejmujesz 10, dostajesz 8, dzielisz przez 2 – podajesz wynik: „4”.

Trafione! Zgadza się. Dostajesz brawa.



## □ Sprytna dziewiątka

Czy matematyka ma tajemnice? Matematycy tym się nie zajmują, ale w zabawie może być ciekawe. Na przykład „tajemnica dziewiątki”. Co to? Dodając liczby jednocyfrowe utworzone z cyfr danej liczby wielocyfrowej i postępując tak z kolejnymi otrzymanymi wynikami aż do uzyskania liczby jednocyfrowej, możemy pominąć wszystkie dziewiątki. Nie ma co męczyć się dodawaniem ani samych dziewiątek, ani par, ani dłuższych zestawów liczb, które w sumie dają 9. Potrzeba trochę biegłości (i o to chodzi w tym ćwiczeniu!) w dodawaniu, bo do dziewięciu dopełniają się przecież pary: 1 i 8, 2 i 7, 3 i 6, 4 i 5, oraz trójki: np. 1 i 4 i 4, 2 i 2 i 5, 7 i 1 i 1, i kolejne na dziewięciu jedynkach kończąc (ich suma to też 9).

Uwaga: Dziewiątka oczywiście ma niepodważalne znaczenie w zwykłym dodawaniu. To tylko trik.

Przykłady:

- Chcesz sprowadzić do postaci jednocyfrowej sumę liczb składających się na numer rejestracyjny np.: GCH 17123. Pomijasz oczywiście litery, a liczby dodajesz po kolei:  $1 + 7 + 1 + 2 + 3 = 14$ . Teraz, w następnym kroku, dodajesz  $1 + 4 = 5$ . A jak policzysz z wiedzą o „tajemnicy dziewiątki”? W myślach pomijasz liczby: 1, 7, 1 – w sumie dają przecież 9. Zostają dwie liczby, musisz je do siebie dodać:  $2 + 3 = 5$ . Oba wyniki są takie same. Nie mogło być inaczej.
- Masz fantazję (Może z nudów? Może dla ćwiczenia?) i chcesz dodać do siebie wszystkie cyfry czyjegoś numeru PESEL. Niech to będzie np.: 63122754139. Jak to policzyć normalnie? Liczymy:  $6 + 3 + 1 + 2 + 2 + 7 + 5 + 4 + 1 + 3 + 9 = 43$ . Warto dwa razy sprawdzić. Teraz suma dwóch liczb wyniku:  $4 + 3 = 7$ . A jak będzie z pomocą „tajemnicy dziewiątki”? Odrzucasz pary dopełniające do dziewiątki: 6 i 3, 2 i 7, 5 i 4, zostają liczby: 1, 2, 1, 3. Dodajesz je lot. Jaki wynik?... Zgadza się?

Poćwicz i sprawdź, czy to działa. Może wpadniesz na trop, jak to działa? Każdy poligon jest dobry, możesz liczyć sumy w datach, numerach rejestracyjnych samochodów, numerach telefonów, dowolnych zestawach cyfr. Pamiętaj, że dla każdej liczby wielocyfrowej, dla każdego ciągu cyfr można w ten sposób wyznaczać liczbę jednocyfrową.

Na początek pięć ciągów cyfr, wyznacz dla każdego z nich jednocyfrową liczbę według opisanego sposobu (oczywiście dla pewności możesz sprawdzić wyniki, dodając wszystkie liczby po kolei):

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, czyli...
- 2, 4, 6, 8, 1, 0, 1, 2, 1, czyli...
- 6, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 4, 5, czyli...
- 2, 7, 3, 6, 4, 5, 9, 0, 1, czyli...
- 1, 1, 1, 1, 1, 9, 9, 9, 9, czyli...





# Czas, czyli jak matematyka bezbłędnie sama się odmierza

Najważniejsze to się umówić. I cała ludzkość się umówiła. Dziś wszyscy korzystamy z jednego, spójnego systemu czasu – zegara dobowego i kalendarza rocznego. Wiemy, która godzina, posługujemy się datami, właściwie czas nie ma dla nas tajemnic. Ale droga do tej umowy była bardzo długa. Pierwsze ludy wędrowały (pewnie głównie za tropem zwierząt, które mają bardzo silny instynkt) w poszukiwaniu pożywienia. Po tysiącach lat co bystrzejsi praprzodkowie zaczęli się orientować, że nie muszą wędrować, wystarczy poczekać w jednym miejscu, a zboże wszędzie, owoce pojawiają się na drzewach. Powiązali jedno z drugim – zmiany w otoczeniu z możliwością produkcji żywności. Tak zaczął się rozwój cywilizacji. Jak się możemy domyślać, nic się nie zmieniło przez tysiące lat. Słońce jest pierwszym, niezawodnym kalendarzem i zegarkiem, wschodzi i zachodzi w swoim cyklu, księżyc regularnie zmienia fazy, planety położenie, w efekcie pory roku nadchodzą i odchodzą nieubłaganie. Pierwsze kalendarze powstały, gdy przodkowie na ścianach jaskiń zaczęli zaznaczać każdy zachód słońca – tak doszli do prae-definicji miesiąca. Egipcjanie zaobserwowali, że tuż przed wylewem Nilu na niebie pojawia się jasna gwiazda – Syriusz. Odliczając kresczki, ustalili, że rok ma 365 dni. Zanim na kontynent amerykański dotarli Europejczycy, Majowie dokonywali podobnych odkryć.

## Kilka pytań na początek

Naprawdę ciekawe i zaskakujące są fakty oraz hipotezy o zdobywaniu wiedzy o budowie i strukturze świata, o poznawaniu zagadnienia i pomiarze czasu przez przodków w różnych częściach świata, na wszystkich kontynentach, przed wiekami i przez wieki.

Przenieś się w świat praprzodków. Albo wyobraź sobie, że budzisz się z hibernacji. Nie masz smartfona, nie masz zegarka, nie masz internetu, nie wiesz, ile masz lat ani kiedy masz urodziny. Do dyspozycji masz naturę, jak przodkowie, dodatkowo możesz też skorzystać z kartki i ołówka, zamiast kamienia i sklepienia jaskini. Ułatwieniem będzie fakt, że w przeciwieństwie do odkrywców sprzed wieków, znasz pojęcia: pora roku, dzień, noc, godzina, tydzień, miesiąc, rok.

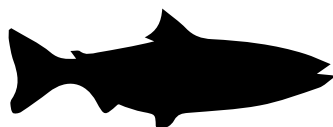
Sprawdź, co wiesz o upływie czasu, a jeśli nie wiesz, pomyśl, jak możesz się dowiedzieć. Kluczem będzie obserwacja. Uruchom wyobraźnię (tobie pójdzie szybko, przodkowie potrzebowali dużo czasu):

- jak ustalić, która jest godzina?
- jak ustalić, jaka jest pora roku?
- ile dni mija od pełni księżyca do pełni? Ile kresk trzeba postawić, zanim księżyc znów będzie w pełni albo w nowiu (zależy, w jakiej fazie zaczynasz obserwację)?
- ile pełni przypada na porę roku? A na rok? Ile pełni księżyca trzeba zaznaczyć kreską na ścianie jaskini, zanim świat wróci do tego samego stanu?

Może wymyślisz więcej zadań?

## Zegary natury

Możesz nie uwierzyć, ale zwierzęta mają swój zegar. I rośliny też. To zegar biologiczny, zarządzany przez niezmiennie siły przyrody – ruch słońca, fazy księżyca. Zwierzęta i rośliny odbierają sygnały natury na swój sposób, ale niezawodnie. Gdy zbliża się burza albo zaćmienie słońca, kwiaty zwijają płatki, ptaki milkną – jakby szykowały się do snu. Łososie wiedzą, kiedy ruszyć w górę rzeki, bociany – kiedy zacząć szykować się do odlotu, drzewa gubią liście, gdy nadchodzi jesień, owoce obradzają wtedy, kiedy jest na to czas.



Dowiedz się, o której godzinie zaczynają i kończą swoje koncerty ptaki śpiewające różnych gatunków, o której otwierają i stulają płatki niektóre gatunki roślin. Może uda ci się sprawdzić punktualność zegarów ptasiego i roślinnego.



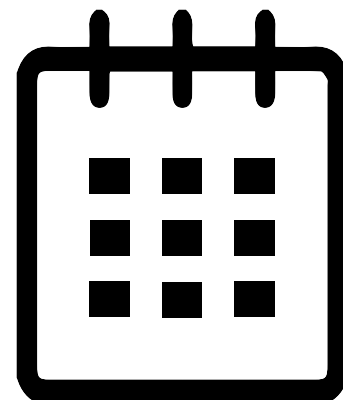
## A to ciekawe

Rytm dobowy jest bardzo ważny, co potwierdza fakt, że w 2017 roku nagrodę Nobla z dziedziny fizjologii i medycyny zdobyli naukowcy, uhonorowani za badania w tym zakresie.

## Twój kalendarz

Kiedyś każdy miał kalendarz – mały, kieszonkowy, biurkowy albo bardzo lubiany przez osoby pracujące w urzędach tak zwany trójdzielny, pokazujący od razu trzy miesiące, czy praktyczny kuchenny „zdzierak” – budzisz się rano i zdzierasz kolejną kartkę, i wiesz wszystko. Mamy nowy dzień! Do dziś powstają kalendarze artystyczne – z pięknymi zdjęciami, rysunkami, obrazami – bywa, że wydawane w seriach limitowanych, kolekcjonerskich, często w celach charytatywnych. Obecnie posiadanie kalendarza nie jest oczywiste – wiadomo – prawie każdy ma do dyspozycji smartfon z planerem, gdzie łatwo zapisać wydarzenia, o których trzeba pamiętać: urodziny bliskich osób, wizyty u dentysty...

Może nawiążesz do tradycji? Przygotuj samodzielnie kalendarz według własnej wizji. To będzie najlepszy prezent dla każdego z rodziny, kogo zechcesz obdarować. O 100 długości (czy wiesz, co to znaczy?) wyprzedzisz komercyjną ofertę wydawnictw. Dlaczego? Bo twój kalendarz będzie „z serca”. A przy okazji poćwiczysz, jak na planszach umieścić informacje z dniami miesiący. Dasz radę, choć to nie musi być takie proste.





## □ Trik

Niektóre miesiące mają 30, niektóre 31 dni. Tak został podzielony rok. Miesiącem elastycznym jest luty – normalnie ma 28 dni, a co cztery lata, w tak zwanym roku przestępnym – 29. Nikomu to nie przeszkadza, można się przyzwyczaić, może z wyjątkiem tych, którzy urodzili się 29 lutego. Ich sytuacja jest nietypowa – większość urodzin (ile procent?) mogą obchodzić, ale nie w dniu urodzin. Luty, wiadomo, ale jak bez kalendarza upewnić się, czy np. lipiec ma 30, czy 31 dni?



Sprawdź na własnej pięści. To bardzo proste i przydatne, choć instrukcja jest skomplikowana, więc lepiej, gdyby ci ktoś zademonstrował tę technikę na żywym organizmie. Zwiń dłoń i popatrz na kostki palców. Zaczynając od zewnętrznej strony, licz po kolei: pierwsza kostka wystaje, pierwszy miesiąc to styczeń, znaczy ma 31 dni, potem jest dołek – to luty, inna konkurencja, ma tyle dni, ile ma, następna kostka wystaje, to marzec – znów 31 dni, dołek – kwiecień – 30 dni, maj – kostka – 31 dni, dołek – czerwiec – 30 dni. Ostatnia, wewnętrzna kostka też wystaje, pora na lipiec, więc lipiec ma 31 dni, wracasz i tę samą kostkę odliczasz ponownie – tym razem jako sierpień – znów 31 dni. Te dwa letnie miesiące położone obok siebie mają po 31 dni. Tak po prostu jest. I tak do końca, aż do grudnia, nowy rok zaczynasz od początku.

## □ Zmiana systemu

Generalnie (Anglosasi mają swój system) żyjemy w świecie opisanym w dziesiętnym systemie miar – metr, kilogram. Ale z czasem i z pomiarem kątów oraz przy określaniu szerokości i długości geograficznej Ziemi jest inaczej – bazują na podziale sześćdziesiątkowym i blisko z nim powiązanym dwunastkowym. Minuta liczy 60 sekund, godzina 60 minut. Potem już nie jest tak prosto. Doba ma 24 godziny, tydzień 7 dni, miesiąc od 28 do 31 dni, rok 365, a przestępny 366 dni. Tu już system podziału na 60 zawodzi. Słońce rządzi – czas faktyczny jest nie do negocjacji, ale jakby tak system zmienić? Choćby dla zabawy.

Wyobraź sobie system dziesiętny do pomiaru czasu. Jak podawalibyśmy datę? Godzinę? Ile byłoby miesięcy? Możesz je nazwać po nowemu. Jak wyglądałaby data twoich urodzin? Jak musiałby wyglądać zegarek? Ile byłoby dni wolnych w dziesięciodniowym tygodniu? Czy godziny by się wtedy bardziej dłużyły? Ile godzin w nowym systemie spalibyśmy na dobę? Czy to ma sens?

## □ Ciekawostka

Czy wiesz, że w 1793 roku, po Rewolucji Francuskiej, podjęto próbę zrewolucjonizowania kalendarza tak, by pasował do systemu metrycznego? Francuscy akademicy ustalili nowe zasady, wprowadzili kalendarz w życie, ale jak się orientujesz, zmiana się nie przyjęła.

## □ Rozkład dnia

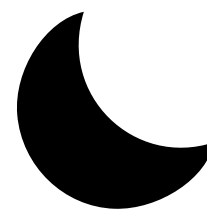
Czy każdy twój dzień jest taki sam? No właśnie, pewnie nie. Każdy dzień tygodnia jest inny, masz inne zajęcia, inne obowiązki, a weekendy to w ogóle inna bajka. Ale już tygodnie są podobne do siebie, powtarzalne (oczywiście z wyjątkiem wakacji).



Zrób, najpiękniej jak potrafisz, planszę z tygodniowym rozkładem zajęć. Pomysł, artystyczne wykonanie – to będą zajęcia kreatywne, ale możesz pójść dalej i pomyśleć matematycznie. Możesz podsumować, ile jakich zajęć masz w każdym tygodniu, zrobić wykres kołowy rodzaju zajęć dla każdego dnia, dla całego tygodnia, możesz opisać zbiory zajęć: zajęcia sportowe, artystyczne, pomoc w domu, wycieczki, czytanie... Na co poświęcasz najwięcej czasu?

## □ Klucz do hasła: „PÓŁ”

Mówimy np. o spotkaniu o godzinie dwunastej w południe, ale wystarczy powiedzieć w południe. Ktoś nie spał do godziny dwunastej w nocy albo inaczej, do północy.



Z czym ci się kojarzą nazwy „północ” i „południe”? Jaki podejmiesz trop? Szukaj skojarzeń w staropolskim języku i w geografii.

## □ 7 dni – ćwiczenie na logikę

Każde dziecko wie, że tydzień ma 7 dni. Mało kto w dzieciństwie zastanawia się, skąd siedem dni, bo po co? Kto już zna systemy miar i wag, też nie dopasuje 7, ani do systemu metrycznego (podstawą jest podział na 10), ani do sześćdziesiątkowego (podział na 60 części). Czyżby to była magiczna siódemka? Już starożytni Babilończycy zafascynowani byli obserwacją nieba. Jeszcze nie wiedzieli, że Ziemia wraz z innymi planetami krąży po orbitach wokół Słońca, ale już uważnie obserwowali ruch planet, przewidywali zdarzenia atmosferyczne (np. zaćmienie). Na nieboskłonnie szczególnie interesowały ich ciała niebieskie (czyli dziś powiemy

” **Tylko matematykom właściwy jest przywilej, że w ciągu stuleci zawsze mogą posuwać się naprzód i nigdy się nie wycofują**

Edward Gibbon





– planety): Księżyc, Mars, Merkury, Jowisz, Wenus, Saturn, Słońce. I to właśnie te planety dały nazwy dniom tygodnia, do dziś obowiązującym w wielu krajach. Kluczem do nazwania dni była kolejność planet dominujących po północy.



Sprawdź, jak nazywają się dni tygodnia po francusku, po włosku (zobaczysz zgodność z nazwami planet), po angielsku (tu kluczem są imiona bóstw północnych krain – odpowiedników bóstw i planet świata śródziemnomorskiego). Poszukaj powiązań (ślady znajdziesz też w literaturze).

A może spróbujesz rozszyfrować słowiański kod nazw dni tygodnia? W naszej kulturze nazwy odnoszą się do kolejności dni, podobnie jak w systemie hebrajskim, który nie odwoływał się do nazw planet ani bóstw, lecz do liczebników. Żeby ruszyć z miejsca, musisz przeprowadzić małe śledztwo – który dzień jest pierwszym dniem tygodnia? Niedziela czy poniedziałek?

- Niedziela – ne dēlati (czyli nic nie robimy, dzień wolny od pracy, w kulturze hebrajskiej to zalecenie dotyczy soboty),
- Poniedziałek – po niedzieli,
- Wtorek – wtórny po niedzieli (mówimy czasem: po pierwsze, po wtóre),
- Środa – dzień środkowy (żeby tak było, czy tydzień się zaczyna, czy też kończy niedzielą?),
- Czwartek, czyli czwarty (czy to się zgadza z pozycją środy? Zobacz, jak jest z piątkiem),
- Piątek, czyli piąty dzień (kluczem wyjaśniającym kwestię czwartku przy okazji jest dodanie „p”. Czym innym jest dzień piąty, czym innym piąty po niedzieli),
- Sobota – według większości źródeł nazwa przejęta z hebrajskiego, gdzie szabat to dzień świąteczny.

## Oś czasu

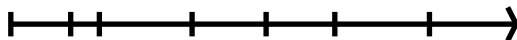
Czas to taka wirtualna linijka. Zawsze wiemy, w którym momencie jesteśmy i przeważnie możemy określić czas, który minął od jakiegoś zdarzenia, czas pozostający do momentu, kiedy coś przewidywalnego się wydarzy. Ile jeszcze do wakacji? Ile czasu zostało do powrotu z obozu? Kiedy będą moje urodziny? Do kiedy muszę oddać książkę do biblioteki? Kiedy jedziemy do dziadków? Kiedy mam wizytę u dentysty? Kiedy będzie rajd rowerowy? Kiedy do kin wchodzi film, który mam ochotę zobaczyć? Wiele takich

sytuacji w życiu każdego z nas, bo w naszym życiu dzieje się wiele. Gdy wiemy, kiedy coś się wydarzy, możemy zaplanować termin z góry, z wyprzedzeniem. Ale jak to w życiu – bywa różnie i różne rzeczy wydarzają się przypadkowo, nie dadzą się zaplanować, zaskakują nas.

Zbierz daty, o których wiesz, że są już zaplanowane (wyjazd nad morze) albo że zdarzą się na pewno (np. kiedy będzie pierwszy dzień lata). Narysuj oś czasu – długą jak chcesz i zorganizuj ją odpowiednio: może to być tydzień, rok, albo i 10 lat. Zaznaczaj ważne daty, wydarzenia, potem gdy nadejdzie ich czas, możesz je odhaczać.

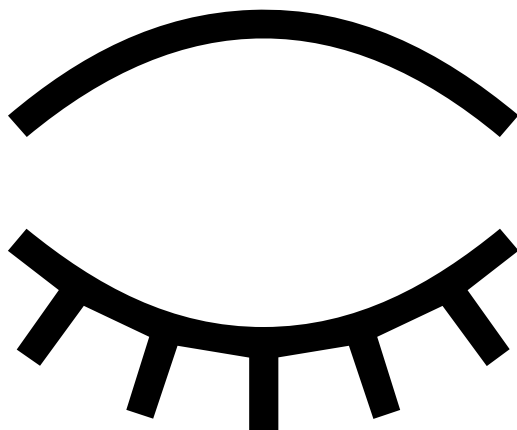
## Moja oś

A teraz chwila dla ciebie. Twoje życie, twoja oś. Czy znasz datę swojego urodzenia? Może znasz też godzinę, to może być ważne.



Narysuj długą kreskę. Początkiem jest moment twoich narodzin. Zaznacz go, nadając tej chwili odpowiednią oprawę graficzną (to mogą być zdjęcia). Co potem? Jakie fakty ze swojego życia możesz/chcesz zaznaczyć na osi? Posperaj w pamięci. Ważne są te najważniejsze, bo nieważnych momentów nikt nie pamięta, nie warto. Popytaj rodzinę, bliscy na pewno pomogą ci uzupełnić oś. Jakie było twoje pierwsze słowo i kiedy padło po raz pierwszy? Kiedy rodzina zachwyciła się twoim pierwszym krokiem? Może pierwszy uśmiech? Pierwsza piosenka? Pierwsza podróż?... Nie uważasz, że warto odnotowywać ważne sprawy? Pamiętaj o proporcji, to dopiero początek twojej drogi przez życie. Zostaw na osi dużo miejsca. Możesz podzielić ją na odcinki. Twoje życie od urodzin do dziś to odcinek na osi czasu.

## Mgnienie oka, momencik, chwila



Znasz te określenia? Coś się dzieje w mgnieniu oka, coś się wydarzy za moment (albo jeszcze szybciej, za momencik). Z kolei moment to używana w średniowieczu jednostka czasu równa

90 sekundom, czyli dla ówczesnych godziną było 40 momentów. A czym jest chwila? Naukowcy nie są jednomyślni, ile wynosi najkrótsza chwila, zgadzają się, że da się ustalić czas jej trwania, choć nie da się tego zbadać eksperymentalnie. W naszym życiu na szczęście jest wiele chwil i da się je ogarnąć rozumem.

Jak oceniasz na intuicję – co trwa dłużej, co krócej? Sprawdź z zegarkiem w ręku, ile to sekund, minut według ciebie.

- Mgnienie oka –
- Okamgnienie –
- Moment –
- Momencik –
- Chwila –
- Chwileczka –
- Chwilunia –

A ile w twoim świecie trwa „zaraz”?

## Nowe słowo?

Z najnowszych badań wynika, że wystarczy 13 milisekund patrzenia na obiekt, by do ludzkiego mózgu dotarł impuls pozwalający odczytać obraz, nazwać to, co w tym czasie widział/zarejestrował.



Jak nazwiesz tę jednostkę czasu?

## Klepsydra analogowa i cyfrowa

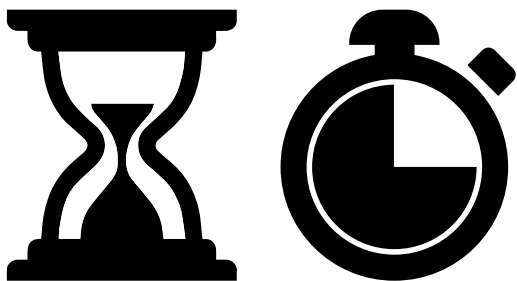
Czym można mierzyć czas? Najłatwiej zegarkiem. Stoperem najdokładniej. Ale gdy nie ma zegarka ani stopera pod ręką? Może klepsydra? To takie proste urządzenie, znane już dwa tysiące lat temu, które odmierza ustalony czas. Dwa lejki ze zwężeniem w środku, przez które przesypuje się piasek, albo coś innego, bardzo drobnego. Klepsydra 5-minutowa z dokładnością do jednego przesypującego się ziarenka zakomunikuje: minęło 5 minut, piasek w klep-







sydrze przeznaczony do odmierzenia czasu niezbędnego do perfekcyjnego ugotowania jajka na miękko przesypie się po 3 i pół minucie. Klepsydry wykorzystuje się też w grach – w widoczny sposób, bez wątpliwości wiadomo: skończył się czas na udzielenie odpowiedzi, na ruch (np. w szachach).

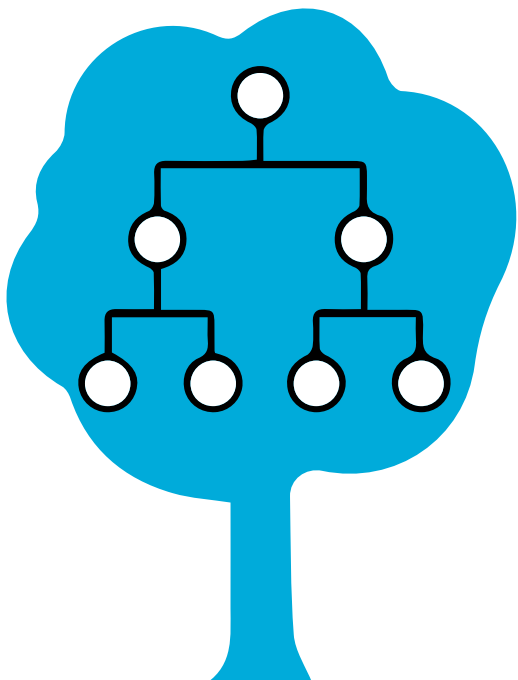


Masz klepsydrę? Sprawdź, czy nie przekłamał, czy się nie myli. Nie masz, wyobraź sobie, jak działa. Kiedyś przy okazji wrócisz myślą do tego urządzenia. Jak myślisz, czy może być klepsydra elektroniczna? Czy miałaby sens? Jakie mogłoby być jej zastosowanie? Może już jest w internecie?

## □ Drzewo genealogiczne

Historia każdej rodziny to dzieje, zawsze osadzone w czasie. Czy znasz historię przodków swojej rodziny? Do ilu pokoleń wstecz potraficie ją rodzinie ustalić? Rodzinne opowieści o życiu przodków bywają zaskakujące, w dziejach każdej rodziny pojawiają się sensacyjne wątki, ekscytujące są skandale, mezalianse, ciekawie, gdy ktoś okazuje się czarną owcą, ktoś niewdzięcznikiem, ktoś utracjuszem. Historia to fabuła i daty. A daty to matematyka. Więc poznając rodzinne tajemnice, też zanurzasz się w oceanie matematyki.

Może macie rodzinne drzewo genealogiczne? Jeżeli takie drzewo jest, poznaj je. Jeżeli nie ma, może zainspirujesz rodzinę – najbliższą i tę dalszą do współpracy? Wiele danych trzeba zebrać, wiele dat ustalić. Odtwarzania dziejów nie da się przeprowadzić w jeden wieczór, to zadanie angażujące na dłużej.



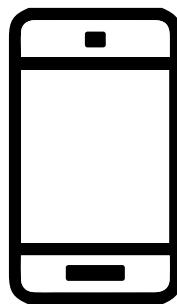
Jakie pytania będziecie stawiać? Na przykład:

- Kto, kiedy się urodził? Kiedy umarł? Ile lat żył?
- Kto ile miał lat, gdy na świat przychodzili dzieci, umierali rodzice?
- Kto miał ile rodzeństwa, dzieci, wnuków?
- Ile bocznych gałęzi miała rodzina?
- Kto, kogo zdążył poznać za życia?
- Ile lat dzieli pokolenia w twojej rodzinie?
- Jaka była średnia życia kobiet? Jaka mężczyzn?
- Urodzonych w jakim znaku zodiaku jest najwięcej?
- Kto żył najdłużej? Kto najkrócej?

Kolejne pytania same będą ci się narzucać.

## □ Wszystko w smartfonie

Kiedyś każdy poważny człowiek musiał mieć zegarek. Dziś zegarek to już dla wielu wyłącznie biżuteria (czyli, że noszą zegarki dla ich urody, dla elegancji, dla prestiżu, dla przyjemności, z przyzwyczajenia, a nie dla punktualności). Kiedyś, jeszcze nie tak dawno, właściwie każdy w kieszeni marynarki, w torebce albo w teczce miał kalendarzyk do zapisywania umówionych spotkań i ważnych terminów. Obecnie kalendarze i notesy też rzadziej nosi się przy sobie. Dlaczego? Bo są smartfony. Takie czasy – prawie każdy ma smartfon, a jak jeszcze nie ma, wkrótce będzie miał. Smartfon przydaje się bez dwóch zdań. Jednymi z podstawowych aplikacji są zegar oraz kalendarz. Kto raz spróbuje, ten wie, jakie to wygodne. Smartfon jest niezawodny, o niczym nie zapomni, o czym trzeba, przypomni. Pod warunkiem, że jest naładowany.



Przeanalizuj funkcjonalność smartfonu, do którego masz dostęp. Poproś właściciela o możliwość poznania jego możliwości i za jej/jego zgodą sprawdź, jak działają w praktyce. Co jeszcze możemy oprócz sprawdzania godziny i daty:

- nastawić budzik,
- ustawić czas, np. na 15 minut (tyle gotuje się ryż),
- sprawdzić, o której będzie padać, o której wyjrzy słońce,
- zmierzyć czas biegu albo spadania przedmiotów na stoperze,
- zapisać przypomnienie,
- zobaczyć, o której wschodzi, zachodzi Słońce,
- zobaczyć, która godzina jest w innych regionach świata (zastanowić się nad przesunięciem czasu),
- może coś jeszcze?

## □ Co może się zdarzyć w ... minut?

Potocznie używamy różnych określeń na określenie trwania czasu. Coś się dzieje w mgnieniu oka, coś trwa momentem, coś chwilę, coś się ciągnie jak flaki z olejem, coś trwa niemiłosiernie długo, coś nieskończoność. Każdy ma własną skalę określeń, a czas wiadomo, subiektywnie, tylko w naszej ocenie, w zależności od sytuacji, mija szybko lub ciągnie się i ciągnie.

Skup się na czasie. Zastanów się, ile trwają różne znane ci czynności? Chodzi o wycucie. Jak zwykle masz pole do szacowania, ćwiczenia.

Co możesz zrobić w:

- 1 minutę:
- 2 minuty:
- 3 minuty:
- 4 minuty:
- 5 minut:
- 10 minut:
- Kwadrans:
- Godzinę:
- Dzień:



I tak dalej, jak długo chcesz.

## □ Krócej, dłużej

Choć dla nas czas może być postrzegany relatywnie – dla kogoś wakacje są za długie, dla kogoś za krótkie, komuś film się dłużył, w ocenie innego minął, jak z bicza trzask, ale logika czasu jest twarda – czas trwa tyle, ile trwa. Czyli wszystko można obiektywnie zmierzyć, porównać. Na poważnie albo dla zabawy.

Wypisz jak najwięcej ciekawostek, rekordów na dowolne tematy, powiązane ze sobą lub nie. To, co ma je łączyć, to czas trwania. Tematów jest mnóstwo, możesz zbierać dane związane z różnymi zagadnieniami, np. czas życia zwierząt, czas podróży, czas gotowania różnych potraw, czas wykonywania jakiejś czynności, czas w zawodach sportowych... Ze znalezieniem źródeł nie powinno być problemu (masz książki, internet zawsze stoi otworem). Oszacuj, porównaj, uszereguj, co trwa dłużej, co krócej, ustal, jaki to czas (zorientujesz się, jakie jednostki czasu w odniesieniu do jakich zdarzeń mają znaczenie – rok, dzień, minuta, sekunda...).

Podpowiedzi:

- długość życia słonia, kreta, motyla, ...
- mgnienie oka, przejście 1 kilometra, wejście na czwarte piętro, przeczytanie książki, ...
- lot na Księżyc, podróż pociągiem do Krakowa, lot samolotem do Nowego Jorku, podróż promem na Hel, ...
- ciąża człowieka, ciąża kota, ciąża konia, ciąża chomika, ...
- czas trwania filmu „Król Lew”, „Gwiezdne wojny”, odcinka „Misia Uszatka”, ...

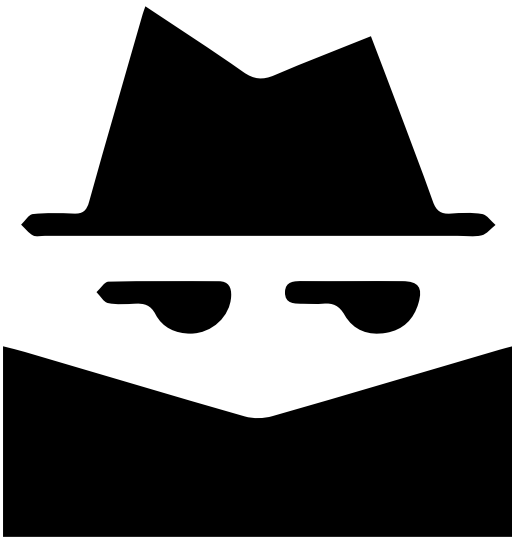




- czas gotowania jajka na miękko, jajka na twardo, soczewicy, makaronu al dente, ...
- rekord w biegu na 800 m, w pływaniu na 200 metrów, biegu maratońskiego, ...
- i dalsze tematy, według wyboru...

## □ Agent w akcji

Często możemy zobaczyć w filmach sensacyjnych, jak komunikują się tajni agenci, wojskowi, policjanci biorący udział w akcji, starciu z wrogiem – „jest na siódmej”, „jest na pierwszej”. Jak myślisz, co to znaczy? To metoda skróconej komunikacji w sprawie umiejscowienia „obiektu” – wskazanie, gdzie jest przeciwnik zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara charakterystycznym dla danej godziny.



Usiądź wygodnie i określ w taki szpiegowski sposób, „na które” znajdują się różne obiekty w twoim otoczeniu. Jak sobie poradzisz z określeniem obiektów, które masz za plecami?

## □ Projekt autorski

Zegarmistrz reperuje zepsute zegarki i zegary, to każdy wie. A jak nazwać projektanta zegarków i zegarów? Czy jest odpowiednia nazwa takiego zawodu? Jeśli wydaje ci się, że nie ma, możesz wymyślić. Nazwa nie ma większego znaczenia. Znaczenie ma wygląd zegarka, oferta jest ogromna, a wybór zegarka wiele mówi o właścicieli.

Zaprojektuj dowolny, autorski zegarek. Może być zupełnie nowatorski w formie. To nawet może być ciekawsze niż klasyk. Jaki będzie? Mechaniczny, elektroniczny? Wiszący (może z kukułką?), stojący, na pasku, na wisiorku, w telefonie?

## □ Czas w lustrze

Każdy wie, że klasyczny zegar ścienny czy budzik ma wskazówki. I te wskazówki, poruszając się non stop, czyli bez przerwy, pokazują, która

godzina. Odczytywanie godziny, gdy raz się nauczymy, jest banalnie proste. Ale czy to będzie równie proste, gdy popatrzysz na odbicie zegara w lustrze?

Spróbuj. Najlepiej poćwiczyć w dwie osoby – jedna przestawia wskazówki, druga odczytuje godzinę. W zasadzie prawdziwe zegary nie lubią przestawiania wskazówek, dlatego najlepiej własnoręcznie zrobić do tego celu planszę. Zajmie to 5 minut. Potrzebne będą: karton, coś, z czego zrobisz wskazówki, pinezka albo gwoździć, korek albo plastelina. No i lustro.

## □ Świecek na torcie

Każdy, bez względu na wiek, ma urodziny, to jasne. Można je obchodzić hucznie, skromnie albo w ogóle nie obchodzić. Jak kto lubi. Ale raz w roku jest ten dzień! Gdy urodziny ma dziecko, sprawa jest prosta – na torcie łąduje 5, 9, 14 świeczek. Żaden problem. Jednak z każdym rokiem na torcie jubilatki czy jubilata robi się coraz ciasniej.

Jak według ciebie można rozwiązać problem tłoku na torcie? Im więcej zaproponujesz sposobów, tym ciekawiej. Zaproponuj swoje pomysły rodzicom, dziadkom, ciociom i wujkom. Przy okazji możesz ustalić, ile lat skończy w najbliższym roku najstarszy członek rodziny, przez niektórych pewnie zwany seniorką/seniorem rodu.

## □ Wiek i czas

Pierwsza przygoda z wiekiem: zwykle jakaś dalsza ciocia pyta: „Ile masz lat?” A rozgarnięte albo przygotowane dziecko pokazuje trzy palce, czasami dodaje jeszcze pół palca albo po prostu mówi, że ma trzy i pół. Czas jest ważny, często odliczamy czas, bo nie możemy się czegoś doczekać, lubimy podsumowywać miniony czas. Czas to temat.

A ty, ile masz lat? To jasne. Ale czy wiesz, ile masz miesięcy? Ile dni żyjesz na tym świecie? Ile minut już masz za sobą? Czy jesteś w stanie zapisać liczbę sekund ze swojego życia? Policz, jak to wygląda dla średniej długości życia człowieka, powiedzmy, niech to będzie optymistycznie 80 lat. Pytań o czas możesz zadawać więcej, np.:

- Od kiedy znają się twoi rodzice? A dziadkowie?
- Od kiedy wujek nie pali papierosów?
- Jak długo dziadek jest na emeryturze albo ile mu zostało do emerytury?

Do każdego obliczenia potrzebujesz wiarygodnych danych, możesz sympatycznie zmuszać/zachęcać rozmówców do ustalania dat. Będzie temat, zobaczysz, uśmiechną się za każdym razem.

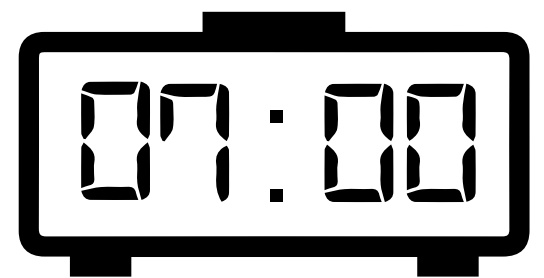
## □ Godzina zero

Tak się mówi dosłownie i w przenośni. Dosłownie, czyli np. pytając o północy: „Która godzina?”, możesz usłyszeć „Północ” albo „Godzina zero”. W przenośni, gdy planowane jest coś bardzo ważnego, na co się czeka, czego trudno się doczekać, wtedy mówimy, że to coś ma się wydarzyć w „godzinie zero”.

Jak można zapisać północ? W zapisie słownym może być „godzina zero zero” albo w skrócie „zero zero”, w konwencji wskazań zegara: 00:00, 23:59:59? Masz inny pomysł? A jak zapiszesz (poviesz inaczej), że jest 25 minut po godzinie zero?

## □ Zegar elektroniczny

Wiesz, jak wyświetlane są numery pięter w wielu windach, czas i daty na zegarach elektronicznych na dworcach i peronach metra, wyniki sportowe na stadionach? To czcionka elektroniczna, wygodna do przedstawiania cyfr w różnych konfiguracjach – wystarczy podświetlić właściwe odcinki i już mamy cyfrę. Punktem wyjścia jest siatka – 7 odcinków, dwa rzędy pionowych, po dwa odcinki, jeden nad drugim, a między nimi trzy kreski poziome. Do wskazania numeru piętra w windzie w niskim bloku wystarczy jedna cyfra, w wyższym bloku potrzebne są dwie cyfry, żeby wyświetlić informację – np. piętro 11. Nie ma ograniczeń w liczbie i układzie cyfr wyświetlanych w systemie elektronicznym – można podać datę np. 12.10.2020 lub godzinę 23:15.



Narysuj wszystkie cyfry, kilka liczb, dat, godzin w tym systemie. To może być np. twoja data urodzenia. Poćwiczysz zapis w tej formie. Zaprojektuj nieistniejącą cyfrę (lub cyfry), która mogłaby być w tym systemie wyświetlana. Ile jest takich potencjalnych kandydatek? A może spróbujesz zapisać w tej stylistyce litery? Czy się uda? Czy czegoś zabraknie? Jak sobie poradzić z tym problemem? Zapisz w tym systemie swoje imię i nazwisko, najdokładniej jak się da.

## □ Zadania ze wskazówkami

To nie są zadania, w których rozwiązaniu pomoże zegar elektroniczny. I nie chodzi o podpowiedzi (udzielanie wskazówek), ale o ułożenie wskazówek minutowej i godzinowej w klasycznym zegarze.





Masz dwie możliwości – albo całą dobę patrzysz na ich ruch, śledzisz położenie i notujesz, albo kombinujesz.

- ile razy na dobę wskazówki pokrywają się?
- ile razy na dobę wskazówki zegara tworzą kąt prosty?
- ile razy na dobę wskazówki tworzą prostą?
- czy częściej wskazówka minutowa wyprzedza godzinową, czy też odwrotnie? A może tak samo?

## □ Czas i przestrzeń

Ludzie podróżują, przemieszczają się po całym świecie. Żeby pokonać przestrzeń, potrzebny jest czas. Jaki? To zależy: skąd dokąd, jakim środkiem transportu, bezpośrednio czy z przesiadkami, ważne jest także pytanie o koszt podróży, ale to już kolejny wymiar. Ustalenie, jaki czas jest konieczny do pokonania odległości z punktu (miejsca) A do B, wymaga informacji, z jaką średnią prędkością będzie pokonana. A ta zależy od wyboru środka lokomocji. Wskazanie środka komunikacji z góry daje przybliżoną informację o średniej prędkości, z jaką można się przemieszczać, pokonując drogę. Czy z Krakowa do Szczecina można dojść na piechotę? Można. Dojechać rowerem? Też można. Można też wybrać samochód, pociąg albo polecieć samolotem. Za każdym razem na podróż trzeba zarezerwować inny czas.

Czy wiesz, z jaką średnią prędkością przemieszcza się: pieszy, rowerzysta, samochód, pociąg, samolot? Ustal, a zawsze mniej więcej będziesz wiedzieć, ile czasu zajmie podróż. Czy wiesz, dlaczego tylko mniej więcej?

## □ Ile trwają reklamy

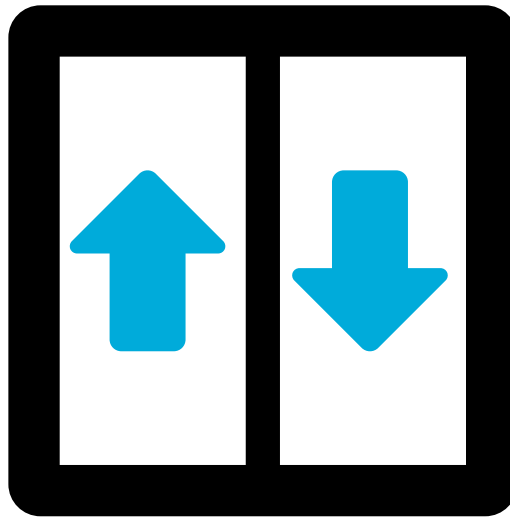
Są różne odpowiedzi: za długo, w nieskończoność, w sam raz, żeby zjeść kolację, wziąć prysznic, odrobić lekcje... W niektórych stacjach telewizyjnych nadawcy idą swoim widzom na rękę i podają, ile czasu zostało do końca bloku reklamowego. Łatwo można wtedy zaplanować – czy zdążysz zadzwonić do babci, czy warto zacząć rozpakowywać zmywarkę, czy dasz radę odnieść sąsiadowi pożyczoną książkę.

A czy wiesz, ile trwają reklamy? Ile najkrótsza, ile najdłuższa? Sprawdź ze stoperem. Ile trwa cały blok reklamowy?

## □ Elevator pitch

Już wiesz, ile to 30 sekund. Tyle najczęściej trwa reklama. 30 sekund to mało czy dużo? Jak zwykle jest jedna odpowiedź: to zależy. W dorosłym życiu przyda ci się technika nazywana *elevator pitch*, czyli zdolność do przekazania ważnej informacji komuś przypadkiem spotkanemu, na

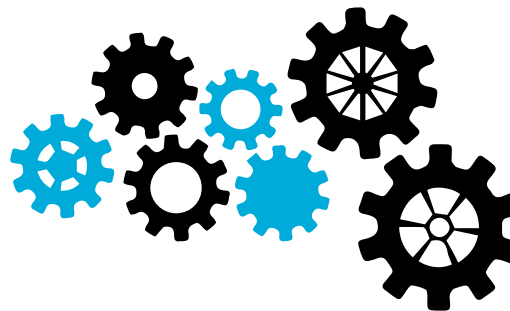
przykład w windzie, kto nie ma czasu, a mógłby być zainteresowany np. twoim pomysłem. Jak się nadarzy okazja, lepiej nie stracić szansy.



Poćwicz. Co ważnego/ciekawego możesz powiedzieć, co przekazać od siebie w 30 sekund? To musi być sama synteza. Trzeba umieć zmieścić się w czasie z argumentacją. Przy różnych okazjach poćwicz na dorosłych. Może zadziała? Powinno.

## □ Co tam tyka?

Elektroniczne zegary są bezszmerowe, ale klasyczny zegarek tyka. Te zębate kółka o różnych średnicach ciężko pracują, by wskazać czas. Zegar elektroniczny to bezduszne procesory. Klasyczne mechanizmy starych zegarków wychodziły spod rąk mistrzów precyzji (najbardziej znane zegarki pochodzą ze szwajcarskich zakładów). Skomplikowany mechanizm zębatek to oczywiście matematyka.



Może w domu jest niepotrzebny, już bezwartościowy zegarek z mechanizmem zębatkowym? Spytaj, może dostaniesz pozwolenie na dekonstrukcję i odkrycie, jak działa mechanizm. Jeśli nikt w rodzinie nie ma zegarka nadającego się na przedmiot badania, wstąp po drodze do punktu zegarmistrzowskiego – mistrz zegarmistrz na pewno pokaże ci wnętrze jakiegoś mechanicznego zegara. Ciekawe, czy od razu zrozumiesz, o co chodzi w zegarku.

## □ Zegar słoneczny

Słońce jest zegarem niezawodnym. Odmierza czas bezbłędnie, bez względu na porę roku, w każdym miejscu na kuli ziemskiej. Wskazówkami słonecznego zegara jest cień rzucający np.

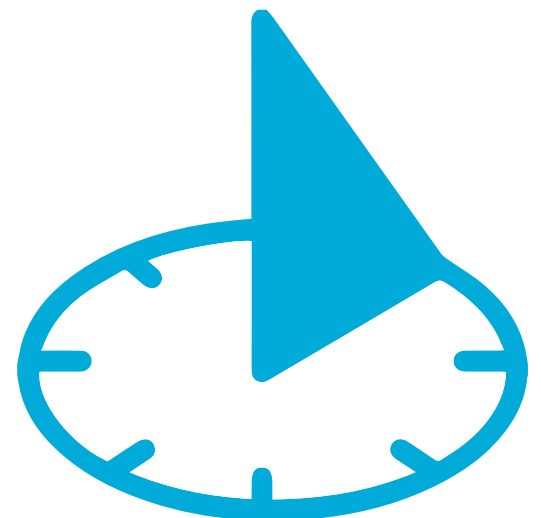
przez patyk wbity w ziemię. W dzień cień rzucają wszystkie przedmioty oświetlone słonecznym światłem, czyli cień możemy obserwować, gdy jest choć trochę słońca (wystarczy, że przezierną przez chmury). Grzegorz Turnau śpiewa: „Podobno każdy ma swój kawałek cienia – brak cienia jest dowodem nieistnienia”. Coś w tym jest. Przed wiekami zegary słoneczne były podstawą orientacji w czasie, dziś budowa zegara słonecznego to raczej pomysł na zabawę lub rzeźbę miejską, atrakcję w parku niż konieczna umiejętność.

Może jednak zechcesz przyjrzeć się cieniom? Po pierwsze, zauważysz, że cienie zawsze są do siebie równoległe. Wiesz dlaczego? Po drugie, zauważysz, że cienie się przesuwają. Wiesz dlaczego?

Po trzecie zauważysz, że im niżej Słońce jest nad horyzontem, tym cień jest dłuższy. Kiedy jest najkrótszy? Wiesz dlaczego?

To jesteś już o krok od zrozumienia idei zegara słonecznego. Możesz zrobić zegar najprostsz:

- narysuj (zaznacz) okrąg, np. na ziemi (masz sznurek – to pójdzie prosto, będzie okrąg jak spod cyrkla, ale możesz też zrobić okrąg na oko),
- w środek okręgu wbij coś prostego w ziemię,
- zaznacz kierunek północ-południe (potrzebny jest do tego kompas albo obserwacja Gwiazdy Polarnej, harcerska wiedza o wyznaczaniu północy albo wrodzone wyczucie kierunków) – na południu będzie godzina 12,
- zacznij punktualnie w południe. Co godzinę z zegarkiem w ręku zaznaczaj kolejne godziny. Następnego dnia możesz dorysować godziny przedpołudniowe.
- obserwuj, gdzie pada cień i odczytaj godzinę – np. gdy cień będzie padał dokładnie między 11 a 12, to oznacza, że jest ok. 11:30.



Obserwuj, jak porusza się cień. Skontroluj na prawdziwym zegarze, jak bardzo dokładny jest twój zegar słoneczny.

Możesz też zrobić zegar profesjonalny, z poprawką na swoje położenie geograficzne. Pomocą ci w tym np. instrukcja z internetu.





# Gry, zabawy i żarty – ciekawe rozrywki matematyczne

Jedni wolą grać w piłkę, inni na instrumencie, a jeszcze inni wybierają gry towarzyskie przy stole lub grają z... komputerem. Można dowolnie łączyć te zamiłowania. Dlaczego ludzie grają? Po co? Powodów może być wiele: żeby się nie nudzić, żeby się rozerwać po pracy, żeby oderwać się od codzienności, żeby robić coś wspólnie. Dla zabawy, dla emocji, dla rywalizacji, dla nagrody, dla satysfakcji. Co człowiek, to motywacja. Pewne, że grę mamy we krwi, taka widać natura człowieka, że lubi się bawić, a może nawet potrzebuje gier. Grajmy więc, a grając, pamiętajmy, że gry to również matematyka na różnych poziomach. Dla rozrywki umysłowej warto rozwiązywać zadania logiczne, układanki, bawić się intelektualnie, korzystając z gotowych zbiorów dostępnych w internecie i w książkach. Poza tym każdy od dziecka może tworzyć nowe gry, układać zadania, quizy, wymyślając coś swojego. Tu nie ma granicy wieku.

## □ Powrót do przeszłości

Ludzie grali od zarania dziejów. Do pierwszych gier przydawały się kamienie, prosta plansza narysowana na ziemi, wryta w drewnie. Z wiekami plansze były coraz bardziej ozdobne, pionki stawały się wyrafinowane, reguły gier bogatsze. Wykopaliska archeologiczne dowodzą, że już 4000 lat p.n.e. znane były gry, ślady prowadzą do Egiptu, Palestyny, Grecji, Chin, Japonii, Indii. My też możemy cofnąć się w czasie, a wtedy okaże się, że najwspanialsze reguły gier – proste, logiczne, jednoznaczne, choć z wieloma możliwościami, powstawały wieki temu. By grać, nie trzeba mieć najnowszych wydań kolorowych gier w wielkich pudełkach, wystarczy chęć i wyobraźnia. Nie trzeba mieć także Wi-Fi, komputera ani smartfonu. Potrzeba jedynie planszy, pionków, towarzystwa.

No to spróbuj się cofnąć. Przykłady klasycznych gier planszowych dowodzą, że jest w nich wielki, trochę zapomniany w dzisiejszym świecie potencjał: go, wari, halma, warcaby, sidża, do-guti, samotnik, mu-tore-re, pajęczyna, piramida, młynek, wilk i psy, lis i gęsi, antylopy i szakale, focus, komputer. Zasady i plansze każdej z nich znajdziesz w internecie, czyli bez Wi-Fi będzie jednak trudno, chyba że masz np. książkę Zdzisława Nowaka „50 gier na kolorowych planszach”.

## □ Dwa zbiory

Gra w piłkę to sport, gra na pianinie to muzyka – tu matematyka też ma swoje zadania. Jednak zostając przy grach stołowych, towarzyskich, w licznych zbiorze jest podział na kategorie, głównie gramy w gry losowe, logiczne lub losowo-logiczne, bez względu, czy rekwizytem jest plansza, karty lub kości. Osobną grupą, szczególnie lubianą przez dzieci młodsze, są gry zręcznościowe, choć elementy zręczności można włączać do pozostałych kategorii.

To zadanie polega na utworzeniu zbiorów. Jeden „gry logiczne”, drugi „gry losowe”. A zbiór wspólny to „gry losowo-logiczne”. Jak podzieliś znane ci gry na te grupy? Od czego zależy, jak je zakwalifikujesz? Które lubisz bardziej?

## □ Gry ulubione?

Są bardzo różne, mają odmienne reguły, ale jedno je łączy – rozgrywa się na planszy. Jedne wymagają specjalnych pionków, figur, w innych dodatkowo są karty z zadaniami, jedne są proste, intuicyjne, zasady innych są opisane w opasłych instrukcjach. Są gry strategiczne, polegające na wiedzy, premiujące zręczność, czy losowe. Ważne, że jest z czego wybierać i nie warto poprzestać na grze w chińczyka, znanej też pod nazwą „Człowieku, nie irtuj się”.

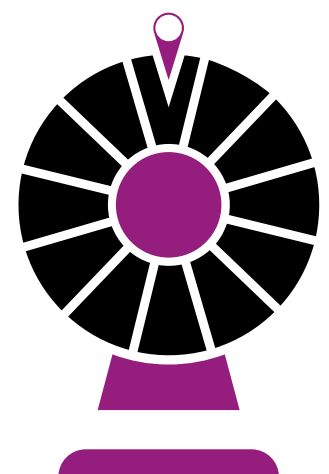
Czy masz ulubione gry? Jakie to są gry?

## □ Mechanizmy

Bogactwo gier jest olbrzymie. Metodyka podziału, czyli utworzenie jednoznacznych zbiorów gier na bazie jednej określonej cechy, jest trudne, bo większość łączy różne sprawności. Nawet gra w chińczyka, oprócz losu wyrażającego się w liczbie wypadających oczek na kostkach, na co nie mamy wpływu, wymaga decyzji taktycznych – którym pionek przestawić, którym pionkiem szybciej gonić, którym uciekać do domku.

Graj w gry. Pamiętaj, grając, ćwiczysz komórki mózgowe, połączenia między neuronami same się mnożą, a ty się doskonalisz. Zrób rodzinny ranking: jakie gry lubicie najbardziej? Czy to będą gry, w których najważniejsze jest:

- losowość
- szybkość, refleks
- prawdopodobieństwo
- liczenie
- łączenie zbiorów
- strategia i taktyka
- kreatywność
- pozycjonowanie



**Czysta matematyka jest najlepszą grą na świecie**

Richard J. Trudeau



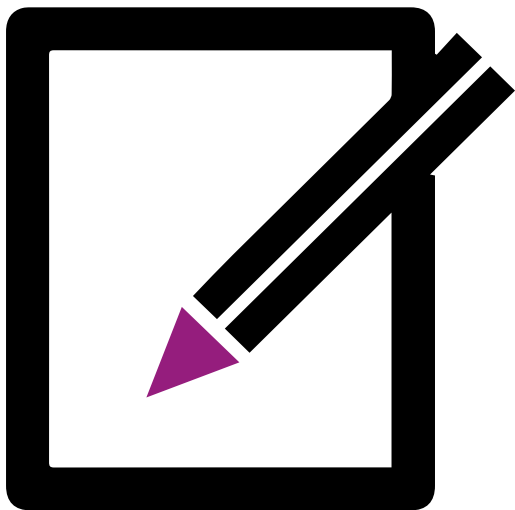


- wiedza
- geometria
- jaki jeszcze rodzaj gier przychodzi ci na myśl?

Jakie podasz przykłady w każdej konkurencji?

## □ Zrób sobie grę

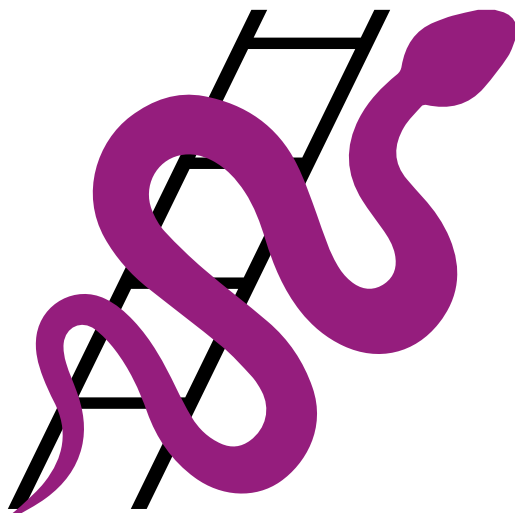
Na spotkaniu z dziećmi były prezydent USA Barack Obama pyta: „Lubicie grać w gry? Taaaak!” – odpowiadają dzieci chórem. „No to zróbcie własną!” – odpowiedział prezydent. I o to chodzi. Granie w gotowe gry jest super. Ale zrobienie własnej to dopiero coś! Prawdopodobnie każdą grę można zrobić samodzielnie. Pomysłów tyle, co ziarenek piasku na Saharze. Każda domowa gra będzie niepowtarzalna. I każda ma szansę być fajna.



Usiądź nad kartką papieru w domu albo gdziekolwiek i wymyśl jakąś grę, konkurencję. Ciekawe, co to będzie?

## □ Drabiny i węże

Jeśli chcesz stworzyć nową grę, pomoże ci matematyka. Wiele gier rozgrywa się na planszy. Najpierw trzeba wybrać jej kształt i narysować tor, może być esem-florem, szachownicą (pomysł poniżej), zestawem kafelków w kształcie sześciokątów foremnych albo kółek. Do wyboru. Do dowolnego ustalenia zasady, dziedzina, tematyka. I można grać!



Znasz grę „Drabiny i węże”? To stara gra planszowa, w internecie są dostępne proste wersje cyfrowe, ale możesz zrobić podobną w 15 minut. Bierzesz kartkę, rysujesz duży kwadrat, dzielisz go na w miarę równe kratki tak, by powstała siatka pól do gry. Możesz posłużyć się linijką – musisz obliczyć, ile centymetrów będzie miało jedno pole, jeżeli w pionie i w poziomie ma być po 6, 8, 10, 12 pól, do wyboru, zdecydujesz, czy chcesz grę dłuższą, czy krótszą. Możesz też pokratkować kwadrat „na oko”. Jak wyjdzie, tak wyjdzie. Następnie numerujesz pola – od dołu do góry – od 1 do (zależnie od wcześniej podjętej decyzji) 36, 64, 100 lub 144. A teraz najciekawsze – decydujesz, z których pól awansujesz na wyższe pola, a z których spadasz na niższe. Wybierasz też pola z dodatkowym zadaniem – np. czyj pionek trafi na pole nr 12, ten musi stanąć na jednej nodze albo dodać 2 do 5, albo pokazać kwadrat w otoczeniu. Wymyślasz polecenia do woli. Może być śmiesznie, za każdym razem inaczej. Bierzesz kostkę, organizujesz pionki, zapraszasz towarzystwo i gracze.

## □ Mutacje, czyli może być ciekawie

Struktura gry jest uniwersalna. Francuski pisarz Juliusz Verne, autor słynnej powieści „W 80 dni dookoła świata”, na formacie gry „Geś” stworzył zmodyfikowaną wersję, czyli grę „Stany Zjednoczone” – gracze, posuwając się po kolejnych polach, odwiedzają kolejne stany. I to mogło być ciekawe. Czyli można wykorzystać jeden format do różnych zastosowań. Za każdym razem matematyka może być pomocna, a temat dowolny.

Podobnie z grą w „Drabiny i węże” – można ją zmieniać na wiele sposobów, na wiele tematów. Siatkę pól można narysować przykładowo na mapie Polski wydrukowanej z internetu (nasz kraj ma kształt świetnie nadający się do gry). Wtedy polecenia są związane z miastami, regionami, które wypadają na poszczególnych polach. Możesz wymyślić pytania do woli, premiować albo karać za prawidłowe odpowiedzi. Np. podaj jedno skojarzenie z Krakowem, w jakim województwie leży Poznań, wymień jeden szczyt w Tatrach, jakie znasz ptaki wodne (na Mazurach). Trochę się dowiesz o własnym kraju i inni gracze też.

A poza tym tematem może być wszystko, w małej lub dużej skali, o znaczeniu dla świata lub dla twojej rodziny (choć te propozycje w najmniejszym stopniu nie wyczerpują możliwości), na poważnie lub na wesoło:

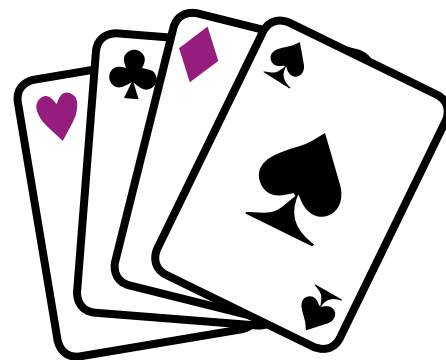
- historia rodziny z ważnymi momentami, rodzinnymi uroczystościami
- droga na wakacje z emocjonującymi przygodami
- farma i życie zwierząt, hodowla roślin, uprawianie warzyw, ...
- Europa i jej atrakcje – zwiedzanie, próbo-

wanie smaków, odkrywanie uroków

- „80 dni dookoła świata”, czyli podróż śladami Juliusza Verne’a
- las i jego mieszkańcy, w ekosystemie leśnym (wodnym lub dowolnym, w jakim chcesz)
- tajemnice zwierząt świata, znajomość faktów, rekordów
- życie Indian, Eskimosów, Gotów, Wikinów, Piastów – pomysł, jak zajrzeć w historię
- odtworzenie bitwy pod Grunwaldem albo jakiegokolwiek innej bitwy
- obiad rodzinny, co było super, co poszło nie tak, relacje towarzyskie
- cztery pory roku, przegląd zmienności świata w powiązaniu z kalendarzem

## □ Talia kart

Talia kart: 52 kartoniki, 13 wartości kart – od dwójki do asa, każda w czterech kolorach daje wiele możliwości. W karty warto grać od dzieciństwa, rodzinnie z dziećmi, a dla każdego wieku znajdują się odpowiednie zabawy. Chyba wszyscy spotkanie z kartami zaczynają od gry w „Czarnego Piotrusia” – to już jest zetknięcie z matematyką. Poza tym można grać w wojnę, tysiąca, brydża, makao, oczko i wiele innych. Potencjał kart można wykorzystać do zabaw matematycznych, badania prawdopodobieństwa i magicznych sztuczek karcianych. Karty służą też do układania pasjansów, czyli prowadzenia rozgrywki ze sobą, a może z losem? Z talią kart na stole nie sposób się nudzić.



Wymyślaj swoje rozgrywki, zabawy z kartami. Naucz się sztuczek magicznych, o których tylko ty będziesz wiedzieć, że są magiczne, ale widzom spadną kaptcie z wrażenia. W chwilach nudy albo w ramach resetu ułóż pasjansa, zobaczysz, jak karty mają własny plan i zaskakujące scenariusze. Może intuicyjnie zaczniesz dostrzegać, czym jest prawdopodobieństwo, statystyka?

## □ Konstrukcja z kart

Budowa nie jest grą, ale skoro mowa o kartach, to na pewno rozrywka, zabawa, z techniką i matematyką w tle. Gdy mówi się, że ktoś buduje



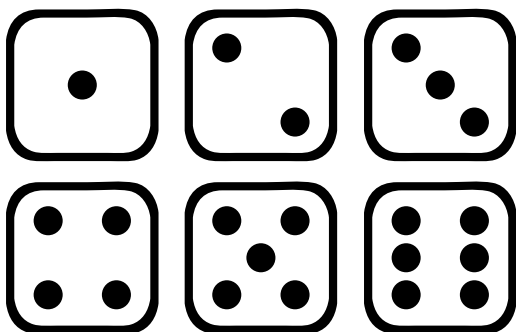


domek z kart, ma się na myśli konstrukcję bardzo wrażliwą, coś, co może zaważyć się w każdej chwili. I tak właśnie jest. To bardzo delikatna kompozycja, ale na tyle inspirująca, że jest wyzwaniem. W tej konkurencji padają rekordy Guinnessa, organizowane są mistrzostwa.

Dla inspiracji zobacz w internecie rekordowe budowle. Raczej od razu nie wejdiesz do czołówki światowej, raczej nie pobijesz rekordu wysokości, powierzchni, liczby wykorzystanych talii kart, ale od czegoś trzeba zacząć. Jeżeli uda ci się ułożyć wszystkie karty z talii, już zasłużysz na wielkie brawa. Zaczynaj.

## □ Kości

Klasyczna gra w kości cieszy już małe dzieci, ale i dla dorosłych jest niezmiernie atrakcyjna. Ta gra łączy w sobie elementy taktyczne i losowe. Nie wpłyniemy na kości, w każdym rzucie wypadnie tyle oczek, ile wypadnie. Ale mamy wpływ na wybór dalszych ruchów: czy trzy szóstki zapiszemy jako zaliczone szóstki albo jako trójkąt, czy będziemy dalej rzucać na przykład z marzeniem o pokerze. Zabawa z kośćmi to lekcja pokory i żywy dowód na praktyczny wymiar prawdopodobieństwa. Rzucasz, a co wypadnie?



Pograj w kości. Musisz mieć chętnych do gry (przynajmniej jedną osobę oprócz ciebie), pięć kości i tabelkę (w zestawach z kośćmi często jest gotowy bloczek). Jeśli nie, zrób rubryki własnoręcznie. Trzeba zrobić wiele równoległych kresek pionowych i poziomych – to niezła wprawa w ćwiczeniu ręki – żeby wystarczyło na wiele rund. Może zgłosisz się do sumowania wyników? Ktoś to musi zrobić. Najlepiej ćwiczyć dodawanie, licząc w pamięci albo pisemnie, od biedy na kalkulatorze. Klasyczna gra polega na wyrzucaniu w trzech rzutach jak największej liczby oczek w ustalonych konkurencjach: para, dwie pary, trójka, mały trójkąt, duży trójkąt, full, kareta, poker i szansa. Każda rozgrywka pokazuje potęgę losu, ale też daje szansę graczom na stosowanie taktyk. Zagraj, wciągnij rodzinę.

## □ Kości i prawdopodobieństwo

Rzut kością, wieloma kośćmi to czysty przypadek. Nikt nigdy nie będzie miał na to wpływu. To wyjątkowy potencjał do wykorzystania

w sprawach związanych z jedną z dziedzin matematyki – prawdopodobieństwem.

Oprócz klasycznej gry w kości (która ma wiele odmian i jest otwarta na kolejne propozycje), możesz po prostu rzucać kostkami i sprawdzać prawdopodobieństwo.

- Rzucasz jedną kostką. Miło jest wyrzucić 6. Tyle że prawdopodobieństwo wypadnięcia 6 jest takie samo jak każdej innej liczby oczek – 1/6. Sprawdź – za którym razem, gdy rzucasz jedną kostką, wypadnie 6? Nie da się przewidzieć. Kwestia losu. Możesz umówić się ze sobą (albo w większej grupie), że rzucasz 100 razy i zanotować, ile razy wypadło 1, 2, 3, 4, 5 i 6 oczek. Ciekawe, jakie wyciągniesz wnioski. Ciekawe, czy gdy rzucisz kolejne sto razy, rozkład będzie podobny? Nie wymyślisz, musisz sprawdzić.
- Rzucasz dwiema kostkami. Ile oczek wypadnie łącznie na obu kostkach? Najmniej 2 (na dwóch kostkach jedynki), najwięcej 12 (na dwóch kostkach szóstki). W ten sposób można uzyskać wszystkie pośrednie wyniki. Jak wygląda prawdopodobieństwo? Możesz narysować tabelkę, w której uwzględnisz wszystkie możliwe pary i sprawdzisz, ile par daje sumy od 2 do 12 oczek. (Informacja kontrolna – wszystkich możliwości jest 36.) Prawdopodobieństwo wyrzucenia jakiej sumy oczek jest największe? I znowu zabawa w np. 100 rzutów. Sprawdź, jak się ma los do prawdopodobieństwa.

Możliwości masz wiele. Zapamiętaj, notuj, obliczaj, porównuj. Takie praktyczne ćwiczenia oswoją z prawdopodobieństwem. W przyszłości będzie ci łatwiej podejmować trafne decyzje, wybierać taktykę w prawdziwej grze (przynajmniej dające szansę na najbardziej prawdopodobne zdarzenie losowe).

## □ Domowa kostka

W każdym domu są kostki do gry. Ale jaka to przyjemność, zrobić swoją kostkę! Może być w dowolnym kolorze, w dowolny wzorek, twój pomysł, twoje dzieło. Może da się nią rzucać nie tylko po stole?

Znajdź w internecie siatkę, na podstawie której narysujesz, wytniesz i skleisz sześcian, czyli swoją kostkę. Może być mała albo naprawdę wielka, ogranicza cię tylko wielkość arkusza papieru, który masz do dyspozycji. Wykorzystaj ją do gry, rzucaj, ciesz się. Możesz ją też wykorzystać do dekoracji.

## □ Zastępstwo

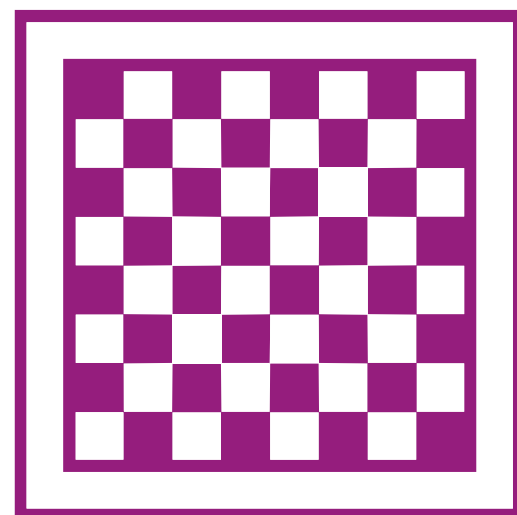
Masz ochotę zagrać w grę (dowolną). Potrzebna jest kostka albo i dwie. Ale nie masz. Zginęły, zostały w domu. Nie ma i już. Czy sobie pora-

dzisz? Jasne. Tylko jak? Czym zastąpić kostkę do gry, gdy pod ręką nawet papieru brak? Oto jest pytanie.

Wymyśl coś. Spisz listę pomysłów, na pewno się przydadzą w przyszłości. Możesz zrobić konkurs na ideę.

## □ Warcaby

Gra planszowa rozgrywana od wieków (najstarsze ślady prowadzą do Egiptu sprzed 4000 lat). Prostsza od szachów, ale nie mniej pasjonująca. Warcaby to nie byle co, w tej dyscyplinie sportu rozgrywane są nawet mistrzostwa świata. Gra w warcaby świetnie nadaje się na wprowadzenie dzieci w świat gier na szachownicy.



Kupcie albo zróbcie domowym sposobem warcaby. Trzeba zdecydować się na konkretny wariant, bo są różne, szachownice mogą być mniejsze i większe. Odpowiednio należy zaopatrzyć się w wystarczającą liczbę pionków, w dwóch kolorach. Warto mieć tę grę pod ręką i grać. Być może to będzie twoje pierwsze spotkanie z prawdziwą dorosłą grą strategiczną? Nudno nie będzie.

## □ Szachy

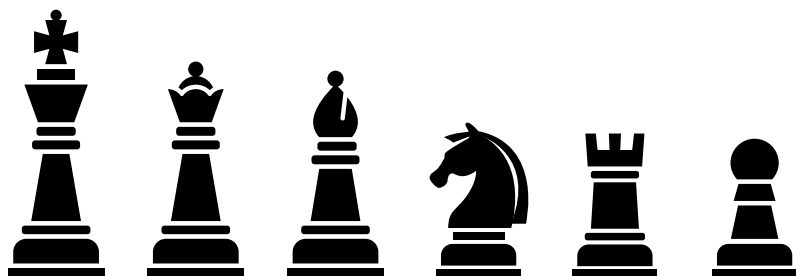
Szachy uznawane są za królową gier. Co ciekawe, mimo że wiele osób uważa szachy za grę trudną, mogą w nią grać nawet przedszkolaki. Rozpoczynając od zabawy, szybko pojmują zasady. A warto, bo szachy mają same zalety, i to bez przesady. Ta gra rozwija nie tylko zdolności matematyczne, logiczne myślenie, ale też kształtuje osobowość, buduje odporność, uczy uczciwego współzawodnictwa. Szachy są praktyczną szkołą strategii, wyrabiają zdolność podejmowania decyzji, rozwiązywania problemów, radzenia sobie z niepowodzeniami. Grać może każdy, a jak to jest z wieloma umiejętnościami, im wcześniej się zacznie, tym większa szansa na biegłość.

Czy wśród znanych ci osób jest ktoś, kto gra w szachy? Poproś, by cię nauczył, zagrał z tobą. A nuż chwycisz bakcyła? Może zostaniesz





w przyszłości szachowym mistrzem, mistrzynią? Gdy dowiesz się, że w szkole można chodzić na zajęcia z gry w szachy, poproś rodziców, żeby cię zapisali. Nic nie ryzykujesz, daj sobie szansę. Szachy uczą myślenia kilka kroków w przód. Nawet jeśli nie okażesz się szachowym geniuszem (ale dlaczego nie?), wyćwiczone myślenie strategiczne i wypracowana taktyka ruchów przyda ci się w życiu.



## □ Brydż

Brydż uznawany jest za królewską grę w karty. Każda rozgrywka, tak zwana partia, wymaga koncentracji, szybkiego liczenia kart i punktów, zdolności zapamiętywania przebiegu rozgrywki (wykładanych kart), sztuki blefowania, doskonałej komunikacji z partnerem z przeciwka i oczywiście obmyślenia strategii, wyboru taktyki. Każda gra to ćwiczenie, i to działa. Jak potwierdzają badania naukowe, gra w brydża poprawia pamięć. Trudno nie docenić tych zalet.



Być może jest trochę za wcześnie na twoją przygodę z brydżem, ale może jednak nie? Spróbuj. Zaczynaj od gry w tysiąca, a gdy masz okazję, poproś grających dorosłych o zgodę na przyglądanie się ich brydżowym rozgrywkom. Zobaczysz, że szybko chwycisz, o co chodzi.

## □ Quizy domowe

Pytania quizowe mogą być na każdy temat. Tworzenie quizów ożywia wyobraźnię, bo mało, że trzeba znać prawidłową odpowiedź, trzeba jeszcze kreatywnie przygotować pytania. Znasz telewizyjny teleturniej „Milionerzy” (nadaje go TVN)? To typowy quiz, choć z wyjątkową nagrodą – można wygrać milion!



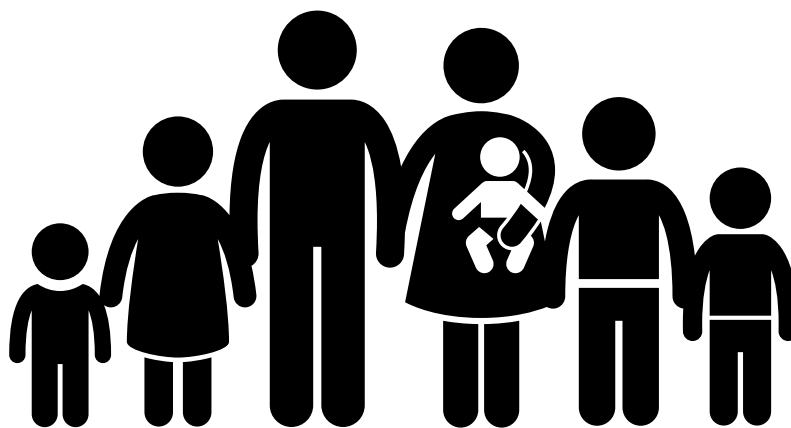
Spróbuj rozruszać rodzinę. Twórcie rodzinne i towarzyskie quizy, bawcie się wiedzą. Mogą być quizy na tematy historyczne, przyrodnicze, geograficzne, związane ze wspólnie przeczytaną książką... Bez ograniczeń. Nie zapomnij o matematyce, ona też świetnie nadaje się na bohaterkę pytań quizowych. Szykując quiz, musisz wymyślić pytania, znać lub znaleźć prawidłową odpowiedź, wymyślić mylne odpowiedzi. Możesz pytać o rzeczy proste, ale i skomplikowane, zadawać pytania w postaci zadań, zagadek logicznych, definicji, wizualizacji geometrycznych. Pytania mogą być proste, ale i podchwytliwe, żeby ci się rodzina nie rozleniwiła. W quizach dodatkową atrakcją są kreatywne odpowiedzi – jedna prawidłowa, zwykle trzy błędne, ale tak sformułowane, żeby nie było łatwo odpowiedzieć, żeby zastawić pułapkę. Przygotować ciekawy quiz – to też sztuka. Może być śmiesznie. Szukasz inspiracji? Obejrzyj „Milionerów”, szukaj quizów w internecie.

Przykładowe pytania do quizu matematycznego:

- która figura nie ma równoległych boków
- co to jest kwadratura koła
- ile osi symetrii ma romb
- ile wynosi prawdopodobieństwo wyrzucenia więcej niż 6 oczek dwiema kostkami
- ile wynosi 7% kilograma
- i tak dalej, do nieskończoności

## □ Matematyczna „Familiada”

Gra, którą najwyraźniej uwielbiają nasi rodacy, bo od ponad 20 lat trzyma się mocno na antenie telewizyjnej. Prowadzący zadaje graczom pytanie, na które wcześniej odpowiedziało sto osób. W studiu rywalizują dwie drużyny, zawodnicy mają zadanie, odpowiedzieć tak, jak wcześniej pytani. Trafia – wygrywają.



Zrób domową, matematyczną niby-Familiadę. Pytania mogą być różne, z wielu dziedzin, mogą być też matematyczne. Nie musisz pytać o odpowiedzi aż 100 osób. Po prostu przygotuj matematyczne pytania i zadawaj, komu chcesz – to mogą być pytania o wynik mnożenia albo innych działań matematycznych, pytania o skojarzenia, pytania z życia, o pojęcia matematyczne, cokolwiek, byle łączyło się z matematyką.

Przykłady pytań:

- czego jest dwa?
- co jest okrągłe?
- ile rogów ma rotunda\*?
- z czym kojarzy ci się cyfra 7?
- ile okien widzisz?

\* to nie prawdziwy teleturniej, ale domowa zabawa, możesz więc wkręcać graczy, zadając im pytania bez odpowiedzi albo z prawidłową odpowiedzią „błąd”.

## □ Łamigłówki logiczne

Matematyka dawała ludziom zajęcie i rozrywkę od zarania. Rozwiązywanie zagadek to fitness dla mózgu. Przed wiekami zagadki tworzyli i rozwiązywali najwybitniejsi filozofowie, matematycy. Wiele ma długą





historię, to klasyczne zagadki. Dziś karmić szare komórki może każdy, wymyślać oryginalne łamigłówki albo korzystać ze sprawdzonych. W internecie jest ocean różnych zagadek logicznych, rachunkowych, geometrycznych. Tylko czerpać i rozwiązywać albo do inspiracji.

Sprawdźcie rodzinnie, czy warto się w tym ocenić zanurzyć. Nie wszystkie od razu uda się odgadnąć/rozwiązać, ale niech was to nie zniechęca. Pamiętajcie, że niektóre zagadki mogą być podchwytliwe, taki ich urok. Na zachętę:

- Trzy domki. Do każdego z trzech domków stojących obok siebie trzeba podłączyć trzy media: gaz, prąd i wodę. Jak poprowadzić przewody/rurociągi, żeby się nie przecinały, a nie mogą przechodzić przez żaden z domków i wszystko rozgrywa się na płaskiej powierzchni – nie można przewodów zakopywać ani prowadzić górą.



- Ważenie piłeczek. Masz 9 piłeczek i wagę szalkową bez odważników. Jedna z piłeczek jest cięższa od pozostałych. Jak ją znajdziesz? Możesz wykonać tylko dwa ważenia.
- Masz ciąg cyfr: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Korzystając z możliwości dodawania i odejmowania, wstaw między te cyfry znaki tak, żeby suma wynosiła 100. Cyfry możesz łączyć, np. 3 i 4 możesz potraktować jako 34. Przykład:  $1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$ , jest oczywiście sporo innych możliwości, więc na pewno coś wymyślisz.

## □ Ćwiczenia dla mózgu

Kombinowanie nikomu jeszcze nie zaszkodziło. Rodzaje rozrywek umysłowych są bardzo różnorodne, każdy znajdzie coś dla siebie. Wystarczy poszukać, spróbować i szybko okaże się, co twój mózg lubi najbardziej. Jedni lepiej odnajdą się w zagadkach wymagających liczenia, inni w zagadkach logicznych, językowych, a może geometrycznych. Podobnie jak w sporcie czy muzyce – dla każdego coś innego. Ale co?

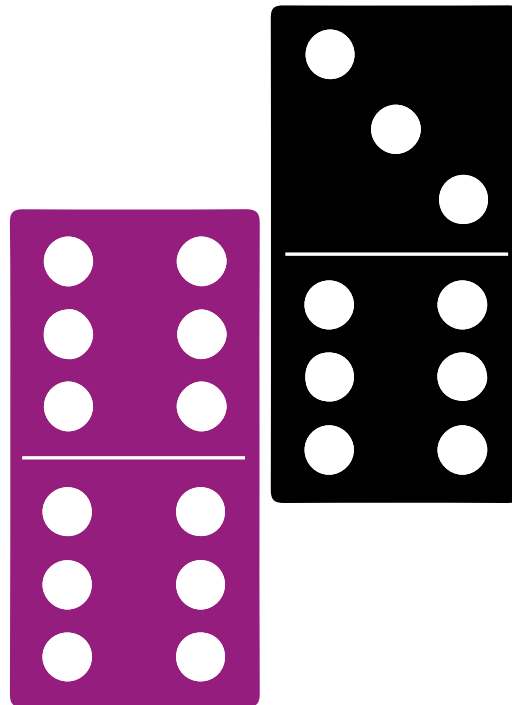
Dopóki nie spróbujesz, nie dowiesz się. Przyjmując do wiadomości, że nie każdy polubi to samo, przeprowadź testy na sobie. Wybór jest bogaty, a do wyboru np.: labirynty, quizy, łamigłówki, zadania matematyczne, krzyżówki, rebusy, szyfrogramy, anagramy, skojarzenia, sudoku, zadania Mensy, ...

## □ Domino

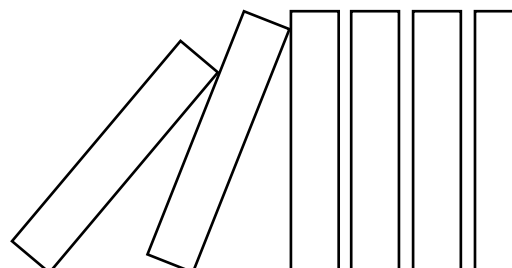
Gra, której urok polega na prostocie. Tu wszystko jest jasne, wszystko widać jak na dłoni. Matema-

tyka w bardzo prostym wydaniu. Każde dziecko w lot pojmie, o co chodzi i po pierwszej rozgrywce liczenie od zera (mydło) do sześciu będzie jak bułka z masłem.

Kostki domina można kupić gotowe w zestawie, ale też bez problemu można zrobić samemu, ćwicząc jednocześnie w praktycznym wydaniu kombinatorykę, czyli wszystkie możliwe połączenia liczb. A więc wystarczy na kartonie narysować 28 prostokątów, każdy podzielić na pół tak, żeby powstały dwa kwadraty. Na kostkach zaznaczyć (narysować) wszystkie możliwe kombinacje dwóch wartości – od zera (mydło) do sześciu kropek. Np. 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6, 1-1, 1-2 i tak dalej aż do kostki 6-6. Potem trzeba wyciąć niby-kostki z kartonu (w domowej wersji to nie będą kostki, nie da się ich ustawiać jak oryginalne, ale poza tym spełnią funkcje doskonale) i grać. Jest wiele wersji gry (opisy znajdziesz w internecie), ale to nie znaczy, że nie można wymyślić jakiejś swojej odmiany.



## □ Efekt domina



Jeszcze niedawno, co roku organizowany był tak zwany Dzień Domina, wielka malownicza impreza, w której udział brali wolontariusze z całego świata. Ich zadaniem było ustawienie milionów kostek domina w taki sposób, by po ruszeniu pierwszej kostki wszystkie kolejne przewracały się jedna na drugą, tworząc spektakularne widowisko. Efekt domina polega właśnie na tym, że przewrócenie jednej kostki powoduje lawinę. Lecą wszystkie. To powiedzenie ma też sens w języku potocznym,

spotkasz się z tym wcześniej czy później, kiedy okaże się, że mały ruch powoduje wielkie następstwa.

To propozycja dla ciebie. Do tego zadania przyda się komplet profesjonalnych kostek domina, nie takich wyciętych z tektury. Kostki muszą być identyczne, mieć odpowiednią grubość i masę. Układasz/ustawiasz kostki jedna za drugą. Musisz sprawdzić, w jakiej odległości mają stać jedna od drugiej. Chodzi o to, by pierwsza przewrócona trafiła w drugą, druga w trzecią i tak dalej. Nawet jeśli nie uda ci się od razu, próbuj do skutku.

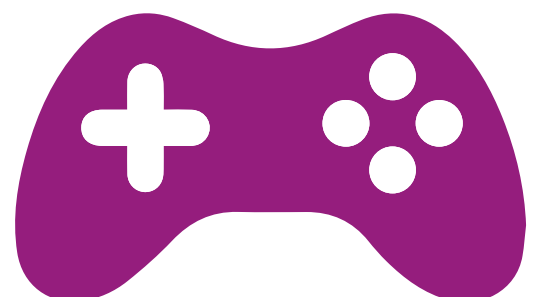
## □ Bierki

Czy kilka patyczków może zająć człowieka? Może. Znowu okazuje się, że ludzie bawili się bierkami, czyli patyczkami o różnych formach, jakkolwiek je zwali, już ponad 2000 lat temu. Rozsypane patyczki są wyzwaniem. I jest w tym wyzwaniu geometria. Bierki to gra towarzyska polegająca na zbieraniu patyczków z rozrzuconego stosu, bez poruszenia pozostałych. Ćwiczy koncentrację i zręczność. Wygrywa ten, kto uzyska największą liczbę punktów, naliczanych według rodzaju i liczby zebranych patyczków. Proste? Proste, ale trzeba, jak to zwykle bywa, ćwiczyć.

Trzeba, to trzeba, ale lepiej chcieć ćwiczyć. Każdy patyczek to odcinek. Leży nad albo pod innym patyczkiem, czyli odcinkiem. Rozrzucając, a potem zbierając patyczki, niby nic, a jednak ćwiczysz postrzeganie przestrzennego układu. Gra wymaga zręczności, ale rozwija rozumienie zależności przestrzennych. To geometria. Coś jest nad, coś jest pod, coś się przecina, coś jest równoległe. Im lepiej sobie radzisz, tym więcej punktów zdobywasz.

## □ Gry komputerowe

Kiedyś plansza, bierki, kości, karty musiały wystarczyć i wystarczały, dostarczając rozrywki przez wieki, przez pokolenia. Dzisiaj mamy coś, czego nie znali przodkowie – gry komputerowe, dostępne przez internet, jako aplikacje. Można grać samemu albo łączyć się z całym światem. Te gry też są dla ludzi, byle nie przesadzić.



Grasz? Masz ulubioną grę?





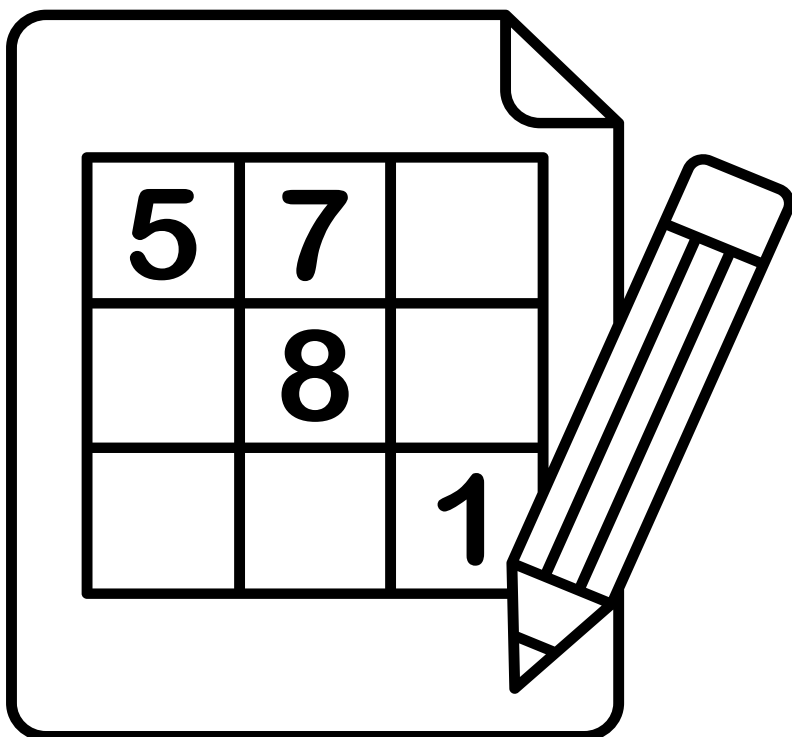


# ” *Matematyka jest dziedziną tak poważną, że nie wolno zmarnować żadnej okazji, by uczynić ją bardziej zabawną*

Blaise Pascal

## □ Sudoku

Kolejna propozycja zapraszająca do logicznego myślenia, kombinowania. Co to? Kwadrat o 81 polach, złożony z 9 mniejszych kwadratów, z których każdy podzielony jest też na 9 kwadracików, pól. W niektóre pola wpisane są liczby od 1 do 9, a niektóre pola są puste. Trzeba je wypełnić tak, by w żadnym rzędzie, w pionie ani w poziomie (ani w małych, ani w dużym kwadracie) nie powtórzyła się ta sama liczba. Raz zobaczysz i będzie jasne, o co chodzi. Z matematycznego punktu widzenia sudoku nie może się znudzić, bo jest 6 670 903 752 021 072 936 960 różnych poprawnych plansz sudoku (Wikipedia). Z najmłodszymi dziećmi można zacząć od rysunkowych minisudoku lub od plansz z 16 polami (4 kwadraciki po 4 cyfry).



Spróbuj. W internecie jest mnóstwo plansz do wydrukowania albo aplikacji, z diagramami różnej trudności. Gdy zaczniesz rozwiązywać te zagadki, nagle zorientujesz się, że wokół ciebie wszyscy je rozwiązują – w poczekalni, w tramwaju.

## □ Kwadrat magiczny

Najbardziej znany magiczny kwadrat został uwieczniony przez Albrechta Dürera w miedziorycie „Melancholia I”. Cztery rzędy, cztery kolumny, w każdym polu jedna liczba. A suma w każdym rzędzie, w każdej kolumnie i na przekątnych musi być taka sama.

To rozrywka matematyczna dla cierpliwych. Są algorytmy na budowę magicznych kwadratów, ale może spróbujesz samodzielnie? Zobacz, czy łatwo ci pójdzie.

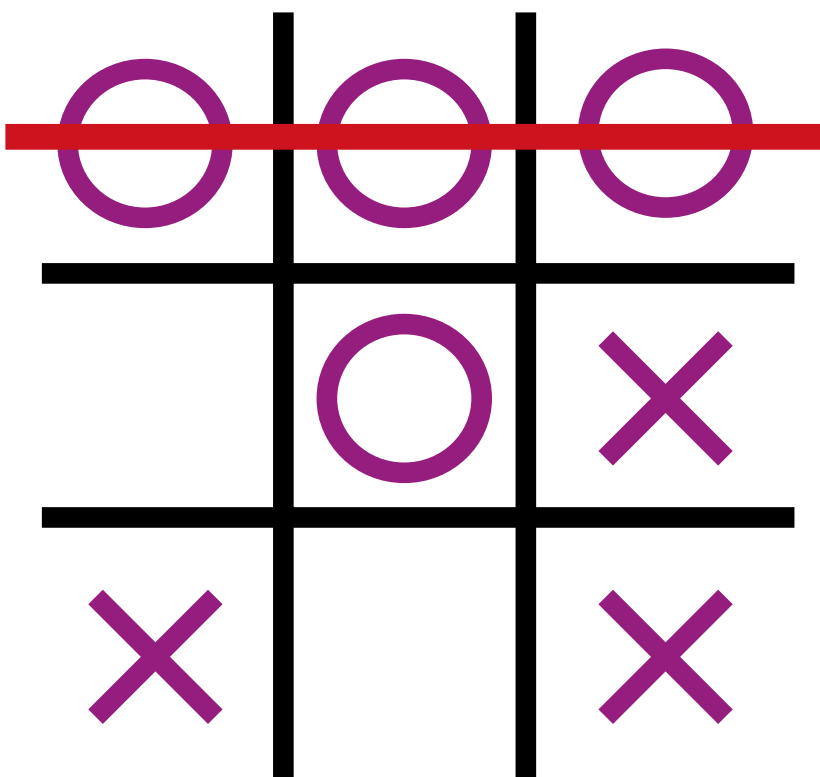
## □ Pchełki

Gra zręcznościowa, ale żeby grać, trzeba mieć wyczucie: pod jakim kątem nacisnąć pchełkę, w jakim kierunku trzeba ją wystrzelić, z jaką siłą. Na te pytania odpowiada geometria. Gra w pchełki mało, że ćwiczy precyzję palców, dłoni, to budzi wyobraźnię przestrzenną.

Co możesz? Zagraj.

## □ Kółko i krzyżyk

Klasyka. Wystarczy kartka papieru i coś do pisania. Rysujesz dwie kreśli pionowe, dwie poziome, muszą się przeciąć pod kątem prostym. Tak tworzy się 9 pól. Dwóch graczy – każdy po kolei stawia w wybranym polu kółko lub krzyżyk. To gra prosta, ale na pewno nie jest głupia. Gdzie postawić pierwszy krok, jak przewidzieć zamiar przeciwnika, bronić się czy atakować? Zamiar masz jednoznaczny – chcesz wygrać, ale jaką strategię wybrać? Ta gra nie równa się z szachami, ale ma potencjał edukacyjny, a ile dostarcza emocji.



Sprawdź, pograj, poćwicz, to jedyna droga do sukcesów. Grać możesz wszędzie, na plaży lub w lesie, wystarczy się rozejrzeć, a znajdą się potrzebne elementy do narysowania pól i elementy zamiast rysowanych kółka i krzyżyka.

Możesz spróbować też gry w kółko i krzyżyk do pięciu skreśleń.





# Język, czyli matematyka w języku codziennym i literaturze

Matematyka naprawdę jest wszędzie, przenika wszelkie obszary ludzkich aktywności. Trudno sobie wyobrazić życie bez skojarzeń, odniesień do matematyki w mowie, w literaturze. Język matematyki i język literacki wzajemnie na siebie wpływają. Nawet nie zauważamy, jak często sięgamy do matematycznych pojęć, porównań. Trzeba jednak uważać – język matematyki jest bardzo precyzyjny, jednoznaczny, języki potoczny i literacki dają więcej luzu, pozostawiają swobodę interpretacji, posługują się metaforami, synonimami. Na przykład w matematyce zero to zero i nic innego, ale w języku mówionym (pisanym) zero może mieć wiele znaczeń, służyć jako metafora. „Nie zgadzam się z matematyką. Uważam, że suma zer daje groźną liczbę” – to aforyzm autorstwa Stanisława Jerzego Leca, polskiego satyryka, poety, mistrza krótkiej formy. Językiem można wypowiedzieć wszystko.

## ☐ Matematyka, co to znaczy?

Każde słowo jest jedyne w swoim rodzaju, coś znaczy, ma swoje pochodzenie. Słowo matematyka pochodzi z języka greckiego, co chyba nie jest dziwne, ponieważ właśnie ze starożytnej Grecji wywodziło się wielu mędrców badających matematyczne zagadnienia: Archimedes, Tales, Pitagoras, Euklides. Na lekcjach matematyki poznasz prawa, których dowiedli. Teraz możesz zapamiętać ich nazwiska – gdy przyjdzie czas, będą twoimi dobrymi znajomymi. Matematyka, od gr. mathēmatikós – nauka, lekcja, poznanie, kiedyś była kluczem do odkrywania i zrozumienia praw natury. Czyżby była dla starożytnych synonimem nauki? Może mieli rację, w końcu matematyka ciągle utrzymuje pozycję królowej wszystkich nauk i trudno sobie wyobrazić jakąś naukę bez matematyki.

A czym dla ciebie jest matematyka? Pomyśl i określ własnymi słowami, jak to czujesz.

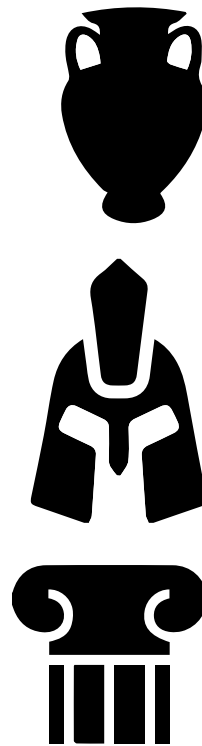
## ☐ Greckie litery

Korzenie matematyki są rozległe, ślady pierwszych odkryć matematycznych archeolodzy i badacze znajdują na wszystkich kontynentach. Ludzie pod każdą szerokością geograficzną, wcześniej lub później, odkrywali te same prawa matematyki, reguły, zasady rządzące światem. Przecież przez wieki nie było możliwości dzielenia się wiedzą na odległość! Dziś wiemy, że wkład greckich uczonych w rozwój matematyki (i innych dziedzin nauki) był wyjątkowy. Wiele matematycznych symboli pochodzi z greki i nadal jest w powszechnym użyciu.

## Μ α τ ε μ α τ υ κ α

Poznaj grecki alfabet – poniżej polskie nazwy liter greckich i ich symbole, czyli małe i wielkie litery.

- Alfa α A
- Beta β B
- Gamma γ Γ
- Delta δ Δ
- Epsilon ε E
- Dzeta ζ Z
- Eta η H
- Teta θ Θ
- Jota ι I
- Kappa κ K
- Lambda λ Λ
- Mi μ M
- Ni ν N
- Ksi ξ Ξ
- Omikron ο O
- Pi π Π
- Ro ρ P
- Sigma σ Σ
- Tau τ T
- Ipsilon υ Y
- Fi φ Φ
- Chi χ X
- Psi ψ Ψ
- Omega ω Ω



Zrób małe badanie i ustal, z jakimi pojęciami, wartościami związane są niektóre greckie litery. A może znasz jakieś słowa, znaczenia, powiedzenia odnoszące się do greckich liter (np. być alfą i omegą, alfabet, pi razy oko, co do joty, delta rzeki, samiec alfa, promieniowanie gamma)? Może uda ci się wymyślić coś nowego, fajnego, śmiesznego, byle miało związek z greckim alfabetem?

Spróbuj wyłapywać zastosowania greckich liter, które nadal są obecne w naszym życiu, nawet poza matematyką (choćby nazwy firm i ich logotypy).

Możesz też przeanalizować wygląd greckich liter – osobno małe, osobno duże. Czy podobne są do liter alfabetu łacińskiego, którym my się posługujemy? Jakie kształty geometryczne w nich dostrzegasz? Poćwicz, świetnie nadają się do kaligrafii.

## ☐ Język matematyki?

Matematyka bez słów by przeżyła. Po pierwsze, nie są jej potrzebne. Ona istnieje, działa od zawsze, bezbłędnie, niezależnie od tego, gdzie i kiedy ludzie obserwują, odkrywają i próbują opisać jej prawa. Po drugie, matematyka, podobnie jak muzyka, jest absolutnie uniwersalna i zrozumiała dla wszystkich. Nie chodzi o emocje czy głębokość analizy, ale o możliwość porozumienia się bez barier językowych. Na przykład zapisujemy równość:  $2 + 2 = 4$ . I wszystko jasne. Równość to jedno z bardzo wielu „słów” w języku matematyki.

Wymyśl i zapisz jakąś złotą myśl, zdanie łączące matematykę z językiem w całość. Może zainspirują cię perełki językowe np. autorstwa Stanisława Jerzego Leca? To może być cokolwiek, aforyzm, równość, czyli np.  $A = B$ , rebus, mem, przysłowie, limeryk, zagadka...

## ☐ Sy-la-bi-zo-wa-nie

Co to znaczy? Dzielenie wyrazu na części w taki sposób, że każda zawiera jedną samogłoskę. To, że słowa składają się z sylab, wie dziecko w przedszkolu. Na rytmice maluchy chodzą w kółeczku i klaszczą: „Wlał ko-tek na pło-tek i mru-ga. Ład-na to pio-sen-ka nie-dłu-ga”. Znasz to? Czytasz i na 100% sylabizujesz w myśli. Biegłość w sylabizowaniu to zajęcie nie tylko dla przedszkolaków. Przydaje się do przenoszenia wyrazów (gdy zdanie nie mieści się w jednym wersie i trzeba je przenieść w „pół słowa”) i do prawidłowego akcentowania słów.

Rozbij słowo „matematyka” na sylaby. Może je wyklaszczesz? Ile ma sylab?

Znajdź w pamięci najdłuższe słowo. Z ilu sylab się składa? A twoje imię? Miejscowość, w której mieszkasz? Sprawdź, czy rozumiesz, w czym rzecz. Poćwicz, nabierzesz wprawę.





# ”**Matematyka** – to pewien język

**J. Willard Gibbs**

## □ **Dobry akcent**

Czy wiesz, że każdy język ma swój sposób akcentowania? W języku polskim nie jest to proste – trzeba albo liczyć, albo prawidłowo się nauczyć. Jak liczyć? Akcent zwykle pada na przedostatnią sylabę, ale są wyjątki. Należą do nich słowa pochodzenia... greckiego, czyli np. „matematyka”. Wtedy akcentujemy trzecią sylabę od końca, nieważne, którą jest, licząc od początku. Czyli nie ma wyjścia, trzeba liczyć i ćwiczyć. Dochodzić do perfekcji, bo to istotne, jak się akcentuje.



Powtarzaj: mateMATyka, mateMATyka, mateMATyka, mateMATyka, ...  
I zapamiętaj, że nie istnieje słowo „matemaTYka”.

Poćwicz na innych wyjątkach o podobnym źródłosłowie, kończących się na -ika, -yka, związanych z matematyką, ale nie tylko, np.: logika, informatyka, retoryka, arytmetyka, technika, muzyka, gramatyka, fonetyka, ...  
Jeśli temat cię wciągnie, ćwicz prawidłowy akcent w innych słowach, choć możesz z tym poczekać do lekcji fonetyki, a na razie słuchaj uważnie, jak mówią dorośli.

## □ **Znaczenia pojęć**

Język matematyki jest konkretny, wymaga precyzji, bazuje na aksjomatach, definicjach, dowodach. Pojęcia matematyczne nie są do negocjacji. Inaczej w codziennej komunikacji – w mowie i piśmie pozwalamy sobie na umowność, wieloznaczność – tak wzbogacamy przekaz, staje się bardziej interesujący.

Porównaj znaczenia pojęć w rozumieniu matematyki i języka. Przykładów jest bez liku, możesz wybierać do woli, choćby z haseł w tej książce. Ciekawe, ile znaczeń używanych w języku potocznym przyjdzie ci do głowy dla każdego ze słów. Możesz:

- sięgnąć po metodę zwaną mapą myśli – pomoże w graficznym przedstawieniu skojarzeń),
- zorganizować rodzinną lub towarzyską burzę mózgów, zobaczysz, że pomysły posypią się jak z rękawa,
- rozpracować na przykład te pojęcia: zero, nieskończoność, linia, figura, punkt, koło, kula, trójkąt, kąt, odcinek, zbiór, wynik, równość, oś, kąt, prawdopodobieństwo, wymiar, proporcja, łuk, symetria, bryła, płaszczyzna, przestrzeń...

## □ **Co za dużo, to niepotrzebnie**

Niektóre słowa określają „przedmiot” całościowo i nie wymagają uzupełnienia, doprecyzowania. Słowo wystarczy. Wiele przykładów wiąże się z matematyką, choć nie wszystkie. Ta sama reguła dotyczy na przykład określenia „akwen”. Nigdy nie mówimy „akwen wodny” z prostego powodu: aqua z łacińskiego to woda, więc akwen musi być wodny, nie może być powietrzny ani z kisielcem. To się rozumie samo przez się.

A co przyjdzie ci na myśl z bardziej matematycznego świata?

- określenie bliźniacy wystarczy, nie trzeba dodawać dwaj bliźniacy. Nie może być trzech bliźniaków, najwyżej trojaczki, czworaczki, pięcioraczki albo jedynak. Za to można powiedzieć, że jeden z bliźniaków jest chory.
- całość to dwie połówki. No bo niby ile połówek może być? Chyba że mówisz, że zrobisz sok np. z trzech połówek pomarańczy, wtedy OK.
- komplet może być wyłącznie pełny. Bo komplet to komplet – całość czegoś. Jeśli komplet jest niepełny, to znaczy, że jest zdekompletowany i nie jest kompletem.
- połowa – pojęcie matematycznie jednoznaczne, w mowie potocznej różnie bywa. Po pierwsze kroisz jabłko na pół, ale czy to w świecie matematycznym jest połowa? Niekoniecznie, jedna część może być większa, druga mniejsza. Patrzymy i widzimy to. Dlatego z doświadczenia wiemy, że czasem każdemu wymknie się niepoprawnie „większa połowa”. Jak powinniśmy powiedzieć poprawnie? „Poproszę większą część”.
- co jeszcze?

## □ **Trzynastozgłoskowiec**



Poemat narodowy, epopeja „Pan Tadeusz”, dzieło literackie zostało napisane dwa stulecia temu przez wieszczę narodowego Adama Mickiewicza (studiował między innymi matematykę i nauki wyzwolone!).

To żelazna pozycja na liście lektur obowiązkowych, więc na pewno będziesz je przerabiał, czyli czytać i analizować na lekcjach języka polskiego. Super, myślisz z przekąsem, ale co to ma wspólnego z matematyką? Trochę ma. Wyobraź sobie bardzo grubą książkę, XII ksiąg, blisko 10 tysięcy wersów napisanych według tej samej metody, tak zwanym trzynastozgłoskowcem. Co to znaczy? Każdy wers ma równo 13 sylab!

Jeżeli macie w domu „Pana Tadeusza”, zajrzyj do niego. Jeżeli nie, przeczytaj kilka wersów z początku:

**„Litwo! Ojczyzno moja! ty jesteś jak zdrowie.  
Ile cię trzeba cenić, ten tylko się dowie,  
Kto cię stracił. Dziś piękność twą w całej ozdobie  
Widzę i opisuję, bo tęsknię po tobie”.**

Gratulacje, właśnie przeczytałaś/przeczytałeś fragment „Inwokacji”, czyli wstępu z prośbą o natchnienie. Policz (możesz wyklaskać :), czy zgadza się liczba sylab.

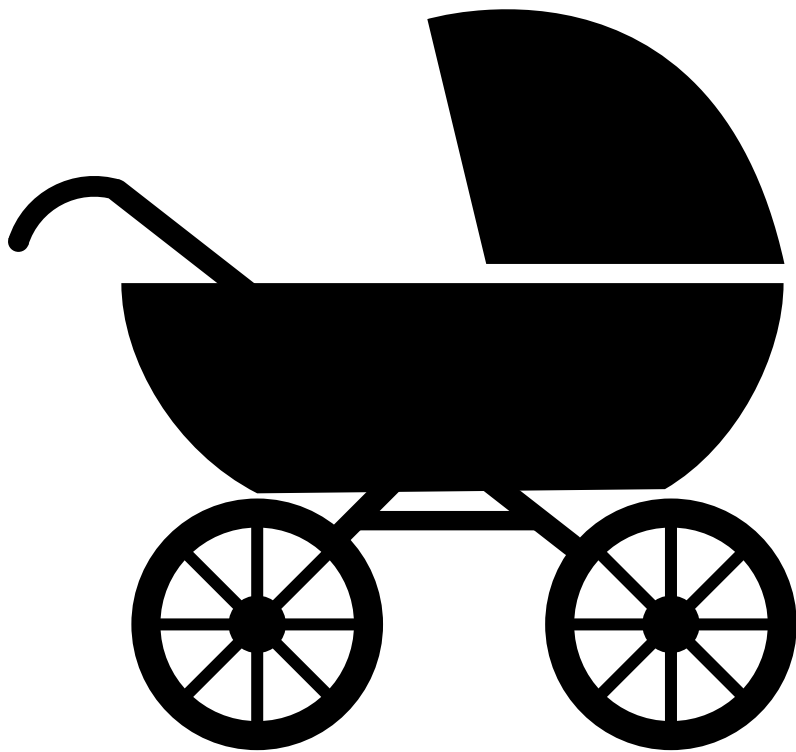




## Czy małe musi być zdrobnione?

Ser to ser, np. żółty z wielkiego koła, a serek to serek, np. wiejski, topiony trójkącik. Lampa, w domyśle duża. Lampka, wiadomo, na przykład na choince lub przy łóżku, niewielka. Pomidor – taki duży, czasem wielki, pomidorek – mały, okrągły lub owalny. Samochód – dla dorosłych, dla rodziny, jeżdżący po ulicach i szosach. Samochodzik? Też OK – mały blaszany, do zabawy w domowe wyścigi. Wniosek? Istnieją wyrazy, które mają odrębne znaczenia dla dużych i małych przedmiotów, wydarzeń. Żeby dobrze nazywać przedmioty, używając ewentualnie zdrobnienia, trzeba wiedzieć, czy odnosimy się do czegoś małego, czy jedynie zdrabniamy, tak jak często wiele osób mówi do małych dzieci (jakby dzieci nie były w stanie ogarnąć niezdrabnionych słów).

Maluszek skaleczył się w paluszek. Mały człowiek, mały paluszek, OK. Ale spacerek, rowerek, sweterek i czapeczka, mięsko z sosikiem, bułeczka z wędlinką, kisielek i budyniek?



Czy tego się dobrze słucha? Jak myślisz? Czy lubisz zdrobnionka, zdrobnienia?

A jak z liczebnikami? Czy podoba ci się ich zdrobnianie: jedyneczka, dwójeczek, trójeczek, stóweczka, tysięczek? A mały liczebnik to liczebniczek? Jak zareagujesz (może być różnie) na takie nazwy figurek – kóteczko, kwadracik, trójkącik, rombik, trapezik?

A co z bryłami (bryłkami)? Jak ewentualnie zdrobnić kulę (kulka, wiadomo), a walec?

## Alternatywa jest zawsze jedna

Znowu pojęcie z dwóch światów: logiki i języka potocznego. W logice alternatywa to zdanie złożone z dwóch zdań, pomiędzy którymi występuje spójnik „lub”. Jest fałszywe, gdy oba zdania są fałszywe. Jeśli choć jedno

jest prawdziwe, całe zdanie złożone jest prawdziwe. Alternatywą potocznie określa się wybór między dwiema opcjami. Dwie możliwości i koniec wyboru. To albo to, w prawo albo w lewo, kupić albo nie kupić, iść spać albo nie iść, jem jabłko albo pływam na basenie. Wiele razy słyszysz zdania – „Mamy wiele alternatyw”, „Mamy dwie alternatywy” – to nie są prawidłowe sformułowania. Można mieć pięć możliwości, ale alternatywa jest zawsze jedna!

Masz pomysł na przykład alternatywy w codziennym życiu?

## Głośne, wspólne czytanie

Z badań wynika, że czynnikiem wpływającym na łatwość myślenia matematycznego jest... głośne czytanie. Może polubicie rodzinne czytanie wieczorami na głos? Cokolwiek to będzie, cokolwiek wam się podoba. Mogą być bajki dla dzieci, ale też opowieści o zwierzętach, dalekich krajach, odkryciach, a może artykuł z prasy lub internetu o bieżących wydarzeniach, które skomentujecie, może rozmowa z interesującym człowiekiem albo zagadki i anegdota o matematyce, naukowcach.



Zainicjujesz czytanie z rodziną? Wyobraź sobie taki obrazek: rodzice przygotowują kolację, a ty im czytasz coś ciekawego. Ty siedzisz na kanapie i pijesz coś pysznego, a ktoś dorosły czyta ci coś, co lubisz (może matematyczne inspiracje?). Może się przyjmie. Ma być miło i zajmująco.

## Przesada czy ekspresja

100 razy dziennie słyszymy zdania: „Pół dnia stałam w korku”, „Setny raz powtarzam, żebyś wyrzucił śmieci”, „Do kasy po bilety na nowy film stało tysiąc osób”, „Godzinami można czekać na połączenie z infolinią”. Z dużym prawdopodobieństwem wszystkie te wypowiedzi są grubo przesadzone. Pani pewnie w korku spędziła ok. 20 minut, pan trzy razy usłyszał o śmieciach i zapomniał, do kasy stało 12 osób, a osoba z infolinii odezwała się po 6 minutach. Nie jest tak źle, ale wszyscy ulegamy ekspresyjnym środkom wyrazu. Pół dnia, sto razy, milion, tysiące robią większe wrażenie niż konkretne dane.

Przyłap się sama/sam na używaniu takich stwierdzeń. One ubarwiają porozumiewanie się, choć z matematycznymi rachunkami łączy je wyłączenie słowa. Wsłuchuj się w wypowiedzi innych, możesz ich łapać za słówka i dyskutować, zachęcać do precyzyjnego określania skali problemu. Porównywać skalę ekspresji.

## Stopniowanie

Dzięki stopniowaniu język stwarza wiele możliwości precyzyjnego oddania rzeczywistości. Każdy widzi po swojemu różnicę między dobrym

# ”

**Mogłoby się wydawać, że matematyka i poezja znajdują się na przeciwnych biegunach. A jednak są to najbliższe krewne, bo obie są wytworami wyobraźni**

Thomas Hill





chlebem a lepszym, niż był wczoraj, czy naj-  
lepszym, jaki się jadło w życiu. Trzy stopnie,  
każdy kolejny oddaje wyższy poziom odczuć,  
oceny. A czy można stopniować w dół? Tak,  
to będą takie językowe wartości ujemne ; ).  
Gorszy chleb, niż wczoraj, najgorszy, jaki się  
jadło w ogóle (albo w tym tygodniu, to zależy).  
Stopniowanie odbywa się w ramach zbioru, lecz  
trzeba określić precyzyjne kryteria (wiesz już  
o tym?), czyli ponownie kłania się matematy-  
ka. Możesz stwierdzić, że chleb jest najlepszy ze  
wszystkich chlebów zjedzonych w życiu, wtedy  
zbiorem są „chleby”. Albo możesz powiedzieć,  
że chleb jest lepszy od bułki, wtedy stopniujesz  
w ramach zbioru „pieczywo”. Raczej nie porów-  
nasz chleba z jabłkiem (chyba że zbiorem będą  
wszystkie produkty nadające się do jedzenia  
lub utworzysz inny zbiór, np. zdrowego jedzenia  
czy jedzenia nadającego się na drugie śniada-  
nie). Ale raczej nie porównasz smaku chleba  
z kolorem ani ze sportem, bo jaki by to miało  
sens?



Znasz tę wyliczankę: chory, chorszy, trup?  
Mimo poważnego tematu jest to śmieszne, nie  
uważasz? Trzeba użyć słówka „bardziej” – cho-  
ry, bardziej chory, najbardziej chory. Wymyśl  
coś w tym stylu. Może być bez sensu, tym bę-  
dzie śmieszniej.

Zrób remanent wśród przymiotników, które  
znasz. Czy przyjdzie ci na myśl jakiś, który jest  
niestopniowalny? Poćwicz, jak to brzmi i po-  
myśl, co mogłoby oznaczać.

To przykłady: optymalny, alternatywny, linio-  
wy, drewniany, tańczący...

Czy masz pomysł w sprawie stopniowania sło-  
wa „matematyczny”?

## □ Czytaj kryminały!

Czy to propozycja dla dzieci? A dlaczego nie?  
Niejednego dorosłego kryminały wciągnęły od  
dziecka, to miłość na całe życie. Umiesz czytać,  
możesz czytać kryminały, choćby te dla naj-  
młodszych. Wartka akcja, tajemnica, sensacje,  
zawsze zagadka do rozwiązania: kto jest win-  
ny? Przesłanki, dowody, mylne tropy, fałszywe  
zeznania, krzyżujące się wątki, wykluczające  
scenariusze, analiza, indukcja i dedukcja na

każdym kroku. Czy coś ci to przypomina? Może  
kryminały to świetna lekcja matematycznego  
myślenia? Logika w praktycznym zastosowa-  
niu? Plus emocje.



Gdy czytasz kryminał, ciągle w podświadomo-  
ści kombinujesz: kto jest winny? Tak docho-  
dzisz do wprawy w logiczną analizę faktów,  
odróżnianiu przesłanek od dowodów, łączeniu  
faktów. Poćwiczysz, a potem łatwiej będzie ci  
selekcjonować informacje, odczytywać naj-  
drobniejsze sygnały, tworzyć związki przyczy-  
nowo-skutkowe. Te sprawności przydadzą się  
w codziennym życiu, niekoniecznie z kryminal-  
nym tłem.

Czytaj kryminały, oglądaj filmowe wersje po-  
wieści kryminalnych, seriale kryminalne.

A może, to już wyższa szkoła jazdy, spróbujesz  
napisać coś sensacyjnego? Przyda się pomysł  
i logika.

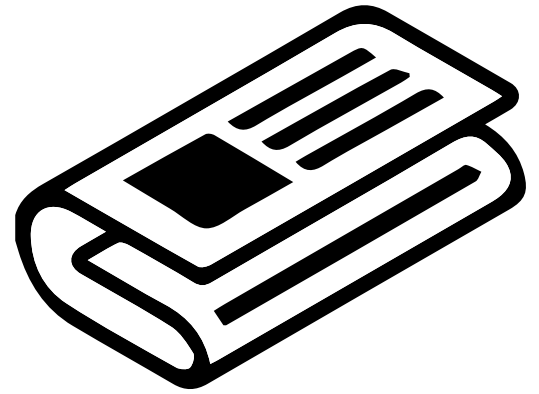
## □ Liternictwo

Gdy powstawały pierwsze litery, nie było kom-  
puterów ani długopisów. Pisano piórem, np.  
gęsim, naukę pisania opanowywali nieliczni,  
pisanie było sztuką. Znaki musiały być pro-  
ste, łatwe do napisania, ale i jednoznaczne dla  
czytającego. Alfabet łaćniński, którym do tej  
pory się posługujemy, powstał w oparciu o trzy  
podstawowe figury – okrąg, prostokąt i trójkąt.  
Czyli znów matematyka. Wszystkie wielkie lite-  
ry, zwane też majuskułami albo wersalami, są  
tej samej wysokości. Litery pisane, czyli małe,  
mają wydłużenia – dolne i górne, by łatwo było  
je odróżniać. Liternictwo jest kopalnią wątków,  
tematów, obserwacji, też w matematycznym,  
geometrycznym kontekście.

Zajrzyj do internetu albo weź dowolną gazetę.  
Spójrz na wielkie litery alfabetu rzymskiego –  
zrób analizę kształtu każdej. Czy widzisz te trzy  
podstawowe formy?

Rysuj litery palcem po papierze albo w powie-  
trzu, jedną ręką albo dwiema. Wyczujesz formę.  
Znajdź w internecie różne kroje czcionek –

przyjrzyj się, zauważysz różnice. Gdy będziesz  
czytać następne książki, zwracaj uwagę na  
czcionki. Liczy się łatwość czytania, przyja-  
zność dla oka. Zorientujesz się, bo niektóre  
teksty czyta się łatwo, inne ciężiej. Twoje oko  
samo wie, co lubi.



Poproś rodzinę, kolegów o napisanie jednego,  
tego samego dłuższego zdania. Porównajcie  
potem charakterzy pisma. Jak bardzo nadal są  
geometryczne? Czy płynność ruchu wynika-  
jąca z szybkości pisania ujęła coś kształtom  
podstawowym? To pewnie będzie pierwsza  
w twoim życiu analiza grafologiczna.

## □ Twoje litery

Trzy kształty dały początek literom – okrąg,  
prostokąt i trójkąt. Ale może można inaczej?

Zabaw się w projektantkę/projektanta liter.  
Spróbuj napisać je wszystkie (projektując jed-  
nocześnie) inaczej. Niech składają się (w kolej-  
nych wariantach) z samych:

- okręgów i prostokątów
- okręgów i trójkątów
- prostokątów i trójkątów
- okręgów
- prostokątów
- trójkątów

Dało się?

## □ Bajka o liczbach

W matematyce są liczby niepospolite, które  
opisują świat. Najbardziej znane to  $\varphi$  i  $\pi$ , ich  
rozwinęcia dziesiętne są nieskończone, więc  
zapisy poniżej to tylko przybliżenia z dokład-  
nością do 30 cyfr po przecinku:

- $\varphi$ , czyli złota liczba  $\varphi = 1,618033988749$   
894848204586834365... (poczytaj o tej  
pięknej liczbie w rozdziale o proporcjach),
- $\pi$ , czyli słynna liczba  $\pi = 3,1415926535$   
89793238462643383279... (określa sto-  
sunek obwodu koła do długości jego śred-  
nicy – bierzesz centymetr, sprawdzasz  
obwód jakiegoś koła, potem dzielisz tę  
wartość przez długość średnicy i powinno  
wyjść tyle, ile trzeba).

Jak je zapamiętać? To, co wystarczy dla wy-  
obrażenia i podstawowych obliczeń, to dokład-





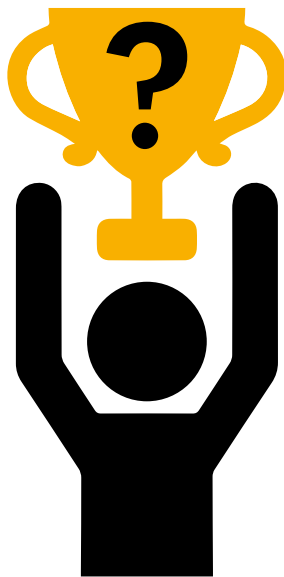
ność do trzech cyfr po przecinku dla liczby  $\varphi$  i dwóch dla  $\pi$  (ciekawe, czy domyślił się, dlaczego dokładność jest różna?). Raczej nie ma potrzeby, by poznać więcej, ale można to wykorzystać jako pretekst do zabawy, do ułożenia opowieści, bajki.

Ułóż dwie bajki. O  $\varphi$  i o  $\pi$ . Kolejne słowa mają mieć tyle liter, ile wynoszą kolejne liczby rozwinięcia. Opowiadka powinna mieć sens, ale nie musi. Tę technikę możesz z powodzeniem wykorzystywać do tworzenia historii, które ułatwią ci zapamiętywanie szeregu cyfr, np. numeru telefonu. Technika nazywa się mnemotechniką i znów sięgamy do starożytnej Grecji – po grecku mneme oznacza pamięć.

## Intuicja podpowie? Badanie potwierdzi?

Są litery bardziej powszechne w języku polskim i mniej. Ciekawe jest zestawienie częstości występowania poszczególnych liter, ustalone przez informatyków na podstawie ogromnej liczby tekstów (na podstawie danych z Wikipedii).

Nim spojrzysz na dane z Wikipedii, pomyśl, jak ci się wydaje, która litera jest najpopularniejsza? A kolejne? Możesz zrobić własne badania, np. zliczając poszczególne litery na fragmencie tekstu tej książki. Żeby policzyć procenty, najwygodniej będzie przeanalizować tekst składający się ze 100 albo 1000 znaków, ale przecież wiesz, że możesz ustalić dowolną objętość analizowanego tekstu i zastosować proporcję! :). Okaże się, czy twoje wyniki, siłą rzeczy przeprowadzone na przypadkowej próbce, a nie na próbce reprezentatywnej, będą zbliżone do statystycznych danych (poniżej). Sprawdź, porównaj.



## Zagmatwane dane

W polskim alfabecie mamy 32 litery. Tu dodatkowo statystyka dla trzech liter występujących gościnnie – q, v, x.

**a a b c c d e e f g h i j k l l m n n o o p r s s t u w y z z z z**  
**A A B C C D E E F G H I J K L L M N N O O P R S S T U W Y Z Z Z Z**

Rozszyfruj specjalnie zagmatwane dane (opisowy język polski miesza się z czystym zapisem matematycznym): „a” i „ą” – prawie 10%, „b” – niecałe 1,5%, „c” i „ć” – prawie 4,5%, „d” – równo 3,25%, „e” i „ę” – więcej niż 8 i  $\frac{3}{4}$  procent, „f” – 0,3%, „g” – prawie półtora procent, „h” – nieco ponad 1%, „i” – ponad 8%, „j” – ponad 2%, „k” – ponad 3,5%, „l” i „ł” – każda po około 2%, „m” – 2,80%, „n” i „ń” między 5,5% a 6%, „o” i „ó” równo 8,6%, „p” – prawie tyle procent, ile wynosi wartość liczby  $\pi$ , „q” – zaledwie trochę ponad 1%, „r” – bliżej 5 niż 4 procent, „s” i „ś” – ciut brakuje do 5%, „t” – ciut brakuje do 4%, u –  $\frac{1}{4}$  10%, „v” – prawie nic, choć dwa razy więcej niż „x”, „w” – prawie tyle, co „r”, „x” – rekordzista ma najmniej zastosowań, czyli prawie tyle, co nic, „y” – więcej niż 3 i  $\frac{3}{4}$  procent, „z”, „ż”, „ź” – razem ponad 6,5 proc.

Masz dużo niewygodnych danych. Są sytuacje, gdy otrzymujemy tak zaszyfrowane informacje i trzeba sobie poradzić. Gdyby ci się nie chciało, znajdziesz tabelkę, czyli uporządkowane, dokładne dane w Wikipedii.

## Konkurs popularności

To jasne, że jedne litery występują częściej niż inne. Wie to każdy, kto choć raz bawił się w słówka – ktoś rzuca słowo (rzeczownik), a następny gracz ma powiedzieć słowo na ostatnią literę usłyszanego słowa. I co się okazuje – ciągle jakieś słowo kończy się na „a”. Czy to sprawiedliwe?

Uszereguj według częstotliwości występowania. Czy skorzystasz z jednej (zagmatwanej powyżej), czy też drugiej formy podania danych (Wikipedia), możesz przeanalizować, jak rozkłada się popularność liter. Możesz podzielić je na zbiory – np. osobno zestawić samogłoski, osobno spółgłoski. Jak często występują? Które najczęściej? Które, ile razy częściej niż inne?

## Kto więcej?

Słowa składają się z liter. Z tych samych liter można ułożyć różne wyrazy. Im więcej liter mamy do dyspozycji, tym więcej kombinacji stworzymy.

Poćwicz samodzielnie, szybko zorientujesz się, o co chodzi. Bierzesz słowo, nie za krótkie, raczej dłuższe, ale nie za długie. Zapisujesz na kartce tak, żeby każda litera (lepiej nich będą to wielkie litery) była osobno, czyli niepołączona z sąsiednimi. Potraktuj te litery jako zbiór, z którego będziesz czerpać elementy do budowania następnych słów. Nowe wyrazy mogą być dowolnej długości, byle były mianownikami w liczbie pojedynczej, bez nazw własnych (słowa pisane wielką literą, np. imiona, miasta). Fajnie jest bawić się z kimś, więc zaprosz kogoś do gry. Możecie bawić się tak po prostu albo stworzyć rozgrywkę z punktacją, np. przyznając punkty za każdą literę w nowym zbiorze. Możecie ustanowić czas rozgrywki – przyda się klepsydra lub budzik.

Przykład (ciekawe, ile słów ułożysz z tego słowa):

### DEMOKRACJA

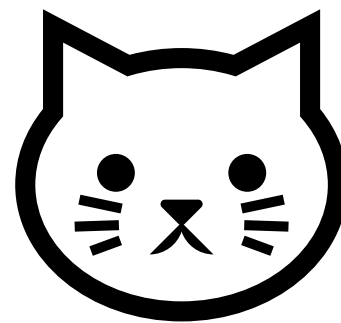
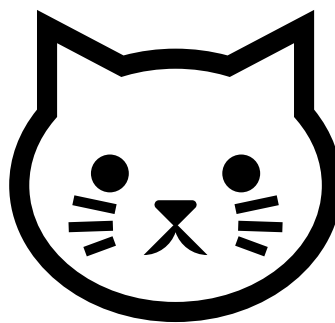
(na przykład: ja, raj, emocja, racja, cmok, jama, mordka, raca, mordka, rok, dok, domek, cera, maj, krem, rajd, amok, rama, oracja, derka, kora, draka, kraj, rak, mer, reda...)

## Wyliczniki

Dzieci lubią wyliczniki. Krótko, rytmicznie, wciągająco, razem z opiekunem. Jest wesoło i przy okazji coś wchodzi do dziecięcej głowy, tworzą się skojarzenia, kalki, zostaną na zawsze. Może dlatego sporo wyliczników, znanych od pokoleń, nawiązuje do pojęć matematycznych? Już samo słowo „wylicznik” wskazuje na matematyczny trop.

Pamiętasz wyliczniki z dzieciństwa? Przypominasz coś sobie? Może zachowały się w twojej pamięci pierwsze myśli o matematyce? Co to było? Przykłady różnych wyliczników w związku z matematyką:

- Ene due rike fake...
- Aaa, kotki dwa...



- Mam chusteczkę haftowaną, co ma cztery rogi...
- Baloniku nasz malutki, rośnij duży okrągłutki...
- Kółko graniaste, czworokanciaste, kółko nam się połamato...
- Mam trzy latka, trzy i pół...

## Matematyka w symbiozie z językiem

Pojęcia matematyczne pojawiają się też w zwyczajnych zdaniach. I jest ich mnóstwo. Tak po prostu mówimy, a inspiracją jest matematyka. To dowód na symbiozę języka i matematyki – wspierają się wzajemnie. Praktycznie są nierozłączne.





Czy znasz takie zestawienia słów (poniżej kilka przykładów)? Czy bez pomocy matematyki można byłoby to równie celnie wyrazić?

- po pierwsze..., po drugie...
- z resztą, rób co chcesz
- zanurzyć się bez reszty
- coś na plus, coś na minus
- równie dobrze
- ni mniej, ni więcej
- nie raz, nie dwa
- policzyć się z kimś
- linia postępowania
- porachować komuś kości
- gruba kreska
- trójkąt bermudzki
- w koło Wojtek
- punkt widzenia
- zachować pion
- utrzymać się w poziomie
- po dziesięciokroć...
- i po stokroć dalszych przykładów :)



### ☐ Synonimy

Synonim to z greckiego *synōnymos*, czyli równomienny, a to oznacza, że znaczy to samo. Czyli synonim to taki językowy znak równości. (Czy można by napisać dziwną matematyczno-językową równość: synonim równa się „=”?) Wiesz, że matematyka i język trzymają się blisko, tyle że matematyka jest jednoznaczna, język wieloznaczny. W matematyce np.  $2 + 2 = 4$ . Tej równości nie da się zapisać inaczej. W języku równość będzie polegała na możliwości zastąpienia jednego słowa innymi znaczącymi to samo lub o bliskim znaczeniu. Na przykład synonimami słowa „dużo”, według internetowego słownika synonimów języka polskiego polecanego przez prof. Jerzego Bralczyka [www.synonimy.pl](http://www.synonimy.pl), będą: mnóstwo, wiele, masę, huk, multum, niemało, nawał, moc, grad, deszcz, gąszcz, mnogość, wielość, pełno, zatrzęsienie, fura, tony, kupa, fuł, mrowie, tabun, rzesza, krocie, miriady, dziesiątki, setki, tysiące, miliony, co niemiara, cały szereg, na pięćki, jak psów, bez liku, od groma, od pyty, od metra, do licha i trochę, do licha i ciut-ciut, do diabła, do diabła i trochę, pospolicie od cholery. Język ma wiele możliwości wyrazu, w zakresie doboru środków jest bardziej elastyczny od matematyki. Ale przecież nie konkurują ze sobą.

Zaprzyjaźnij się z synonimami. Przyda się. Im więcej synonimów znasz, potrafisz stosować, tym twój język jest bogatszy.

Możesz sprawdzić, czy są synonimy pojęć geometrycznych. Jak inaczej nazwać koło, linia, trójkąt, graniastosłup, punkt...



### ☐ Ile jest słów?

Językoznawcy są zgodni: nie da się policzyć słów żadnego żywego języka. Żywy język to taki, w którym nieustająco zachodzą zmiany, pojawiają się nowe pojęcia, który rozwija się i ewoluuje – żywym językiem jest np. polski. Czyli (na pomoc przychodzi pojęcie matematyczne) zbiór słów w języku polskim jest zbiorem otwartym. Można tworzyć podzbiory – słowa podstawowe, zdrobnienia, gwara, odmiany, język młodzieżowy, żargon naukowy... Im dokładniej sprecyzowany podzbiór, tym większa szansa na dokładny szacunek. Tak czy owak,

słów jest więcej niż 100 000, kto wie, może nawet 300 000? A może jeszcze więcej – milion? Wiadomo, ile słów jest wspólnych wszystkim postępującym się naszym językiem – to 6-10 tysięcy, czyli zbiór możliwy do policzenia, choć różni się liczbą elementów/słów w zależności od kryteriów doprecyzowujących.



Czy zastanowiło cię kiedyś, ilu słów używasz? W zależności od ich liczby język staje się bardziej dojrzały, bogatszy. A jak myślisz, ile najmniej słów potrzeba, by komunikować się w obcym języku?

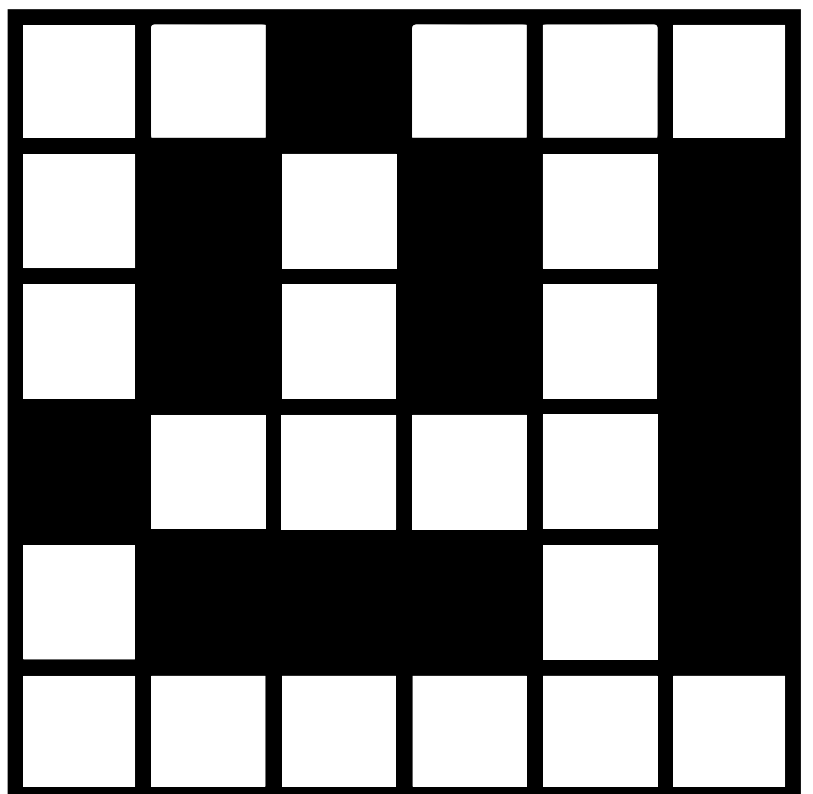
Według praktyków 600 słów to minimum, znając 1200–2000 – dasz sobie całkiem niezłą radę.

### ☐ Krzyżówka

Miliardy ludzi na świecie rozwiązują krzyżówki. Coś w tym musi być. Nagrody za ich rozwiązanie, jeśli są, to raczej symboliczne, zatem nie chęć zysku skłania ludzi do pochylania głowy nad krzyżówkami. Bliższa prawdy będzie teza, że ludzie czerpią przyjemność z gimnastykowania szarych komórek. Krzyżówki nadają się do tego świetnie. To rozrywka umysłowa z pogranicza matematyki i języka – układ (są nawet krzyżówki panoramiczne!), relacje i słowa. Przydaje się wprawa, wiedza ogólna, cierpliwość.

Masz dwa piętra zadań:

- rozwiąż krzyżówki
- spróbuj samodzielnie (albo z pomocą) ułożyć krzyżówkę. Na temat matematyki albo dowolnie. To nie jest takie proste, ale satysfakcja gwarantowana. Robisz ksero, rozdajesz domownikom i patrzysz, jak się męczą :).



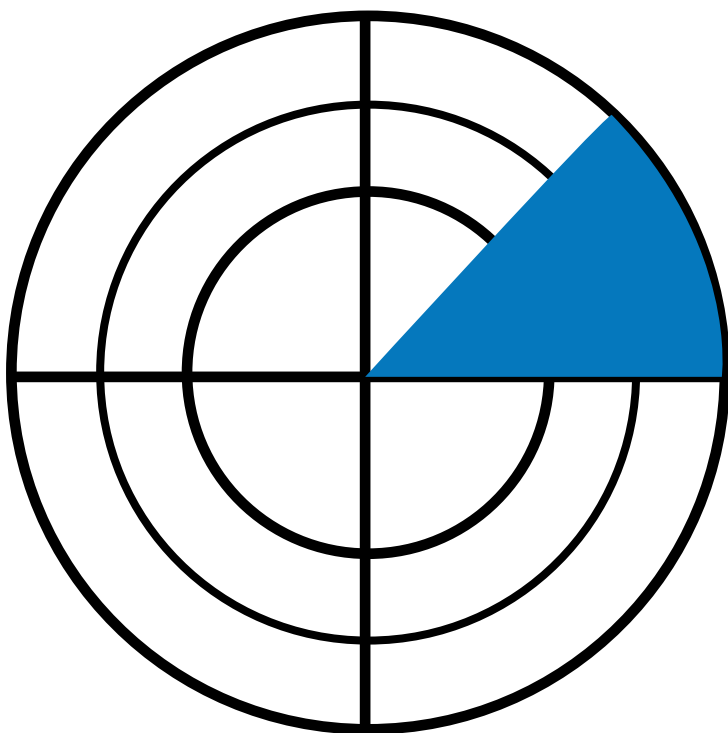


# Kąty i trójkąty, czyli nie wszystko jest proste

Przykładów kątów wokół nas jest bez liku. Każde spotkanie płaszczyzn czy przecięcie linii prostych wyznacza kąt. Nie da się inaczej, nawet jeśli coś jest płaskie albo wydaje się płaskie, być może też jest kątem – zerowym, półpełnym albo pełnym. Kąty dobrze widać w budownictwie – tu najwięcej jest kątów prostych. Elewacja, piętra, osadzenie okien, ściany spotykają się (zazwyczaj) pod kątem prostym. Dachy wysokich budynków mieszkalnych i większości przemysłowych są płaskie, czyli tworzą kąt prosty ze ścianami budynku. Ale już połacie dwuspadowych (niepłaskich) dachów domów jednorodzinnych projektuje się pod jakimś kątem. Naturalne, że ekran komputera lub tablet pochylamy, żeby obraz był lepiej widoczny. Zdarza się, że grafiki i obrazy nachyla się, czyli ustawia się pod kątem w stosunku do ściany. Jadąc na rowerze, odruchowo pochylamy się na zakręcie, czyli jedziemy pod kątem, żeby utrzymać równowagę (jakie siły na nas działają, to inny temat). Gimnastyka, joga to ćwiczenia polegające na ustawianiu ciała pod różnymi kątami – rozkrok, skłon, pajacyk. Nie przeczytamy książki, jeśli jej nie otworzymy, a wtedy okładki układają się pod kątem. Nie da się nalać płynu z butelki czy dzbanka bezpośrednio do szklanki, nie przechylając ich. Ptaki wodne, żaglówki, statki zostawiają na wodzie ślad w formie kąta, samoloty na niebie tworzą charakterystyczne białe linie, które w miejscach przecięcia potrafią ułożyć się w istną krzyżówkę. Kąty występują w naturze – konary i gałęzie wyrastają z pnia pod kątem, bobry gryzą drzewo pod kątem, rzeka wpływa do morza pod kątem, górskie szlaki biegną pod kątem, nieprzebrane są wątki kątów w życiu, w świecie, we wszechświecie. No i oczywiście wskazówki zegara non stop tworzą kąty.

## □ Wyostrz radar

W codziennym życiu często używamy słowa kąt, ale jeszcze częściej mamy na myśli działanie związane z kątem. Skręć w prawo, skręć w lewo, skręć pod kątem, ułóż pod kątem, uchyl, nachyl, coś jest ze skosu.



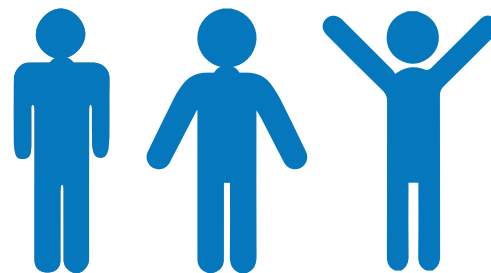
Zwróć uwagę, ile jest kątów – w rzeczach, mechanizmach, czynnościach.

## □ Do poćwiczenia i zastanowienia

Ty masz ramiona i kąt ma ramiona. Tak mówimy – ramiona kąta. Czy to przypadkowa zbieżność określeń?

Poćwicz kąty na sobie.

Wyobraź sobie, że twoje ręce (ramiona) to ramiona kąta. Co możesz? Rozłóż ręce jak najszerzej – to kąt półpełny. Gdy jedną rękę zostawisz szeroko rozstawioną, a drugą wyciągniesz prosto przed



siebie – stworzysz kąt prosty, bo kąt prosty tworzą proste prostopadłe. Zmieniając kierunek ręki wystawionej na wprost – raz w prawo, raz w lewo – będziesz zbliżać lub oddalać dłonie od siebie. Szybko zorientujesz się, który kąt jest ostry (dłonie bliżej), który rozwarty (dłonie dalej od siebie). Rozstaw jak najszerzej ręce i pomyśl, czy linia prosta może być kątem? Jakim? Czy kąt może być linią prostą?

Sprawdź, jaki jest maksymalny kąt, pod którym można otworzyć drzwi do mieszkania. A okno uchylne? A drzwiczki piekarnika? Nie chodzi dokładnie o stopnie, choć kąty mierzy się w stopniach, ale o określenie, jaki to kąt – ostry, prosty, rozwarty. Gdy raz wyczujesz, jak oceniać kąty, nie będziesz mieć już z tym problemu.

## □ Poligon doświadczalny

Ile najwięcej kątów może być pomiędzy dwiema prostymi? Co jest charakterystycznego w kątach, gdy dwie proste się krzyżują?

Odkrywaj prawidłowości. Weź dwa ołówki, flamastry, kredki, patyczki, słomki do picia – cokolwiek to będzie, byle było proste i dosyć długie – zagrają rolę ramion kątów w twoich doświadczeniach. Poćwicz ustawienie ich wobec siebie. Możesz je obracać, tak jak obracają się wskazówki na tarczy zegara, krzyżować, układać z dala od siebie i przewidywać, czy linie będące ich przedłużeniem przetną się.

Przeanalizuj, jak mają się do siebie kąty, które powstają na przecięciu dwóch prostych. Czy widzisz prawidłowość? To będzie twoje ciekawe odkrycie!







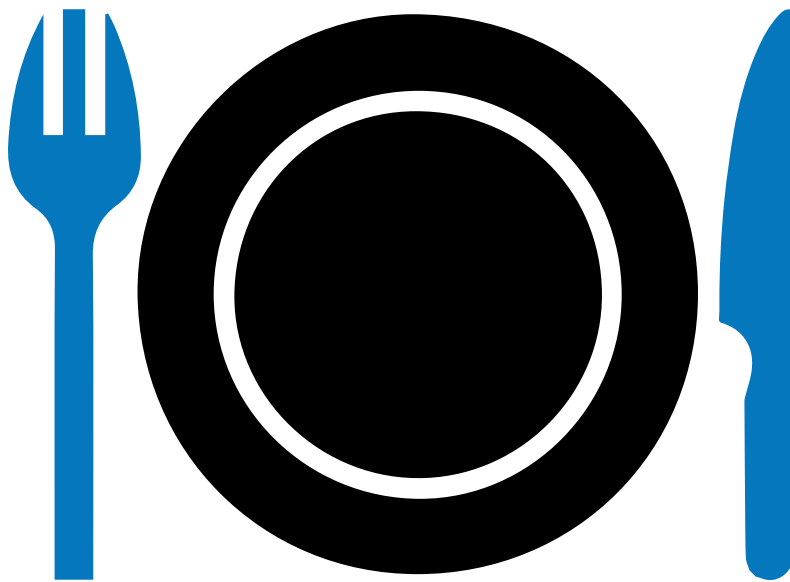
## □ Przymiarka architektoniczna

Kąt prosty jest jednym z kątów. Ale jakim! Wyjątkowym. Prawdopodobnie żyjesz w mieszkaniu, domu, gdzie wszystkie kąty między ścianami (to kąty przyścienne) są kątami prostymi. Tak jest praktycznie.

Wyobraź sobie, że ściany w twoim mieszkaniu spotykają się pod innym kątem – ostrym lub rozwartym. Jak wyglądałby plan takiego mieszkania? Czy dałoby się ustawić regał w narożniku? Jak zabudować kuchnię? Gdzie postawić łóżko? Albo wyobraź sobie, że w mieszkaniu w ogóle nie ma kątów, bo... ściany są okrągłe (jak w igloo). Jak jest? Ciekawiej?

## □ Obserwacja przy stole

Większość czynności związanych z jedzeniem, gotowaniem, przygotowaniem posiłków wymaga ustawień pod kątem.



Zauważ to.

- Czy przechylasz talerz, gdy chcesz zjeść zupę do końca?
- Pod jakim kątem nachylasz butelkę, dzbanek, by nalać wodę do szklanki? Od czego zależy kąt nachylenia?
- Pod jakim kątem trzymasz nóż i widelec, gdy kroisz coś na talerzu?
- Jak układasz sztućce, gdy sięgasz po dodatkę, a jak po skończonym posiłku, czyli pod jakimi kątami do krawędzi stołu?

Obserwuj, czy wszyscy biesiadnicy zachowują się tak samo. Ile w tym matematyki, ile fizyki, a ile savoir-vivre'u? Może postawisz kolejne pytania? Może to temat do rozmowy przy posiłku?

## □ Punkt widzenia

Gdy prawidłowo myjesz zęby, w trakcie tej czynności ustawiasz szczoteczkę pod różnymi kątami, w każdej płaszczyźnie. Szczoteczka zawsze tworzy kąt z powierzchnią zębów, a że szczęka jest półokrągła, to z każdym twoim ruchem kąt się zmienia. Jaki kąt tworzy, gdy myjesz zęby? Ha! Zależy, w której ręce trzymasz szczoteczkę, z której strony oceniasz

– z jednej strony – to kąt ostry, z drugiej – rozwarty. Są też momenty, gdy trzymasz szczoteczkę prostopadle do zębów, wtedy szczoteczka ze szczęką tworzy kąt prosty. Ważne, żeby wyszorować zęby dokładnie, docierając do wszystkich zakamarków. Gdy skończysz, możesz powiedzieć, że masz zęby umyte pod wszystkimi kątami.



Codziennie, w czasie tej czynności przypomnij sobie o kątach. Możesz pomyśleć, jakie inne codzienne czynności skojarzą ci się z działaniami pod kątem? Jakie to są kąty – ostre, rozwarte, pełne? Czy można sobie wyobrazić każde z działań pod kątem prostym? Czy ocena: jaki to kąt zależy od punktu widzenia – od odniesienia do krawędzi, określonej powierzchni, jednej ze stron?

Na przykład:

- kąpiel – ustawienie rączki prysznica w stosunku do ściany (i do twojego ciała, gdy myjesz różne części)
- pisanie i rysowanie – ustawienie pisaka
- krojenie, obieranie – ustawienie noża
- nalewanie czegokolwiek – ustawienie kubka, butelki (sprawdź, jak jest przy nalewaniu z kranu)
- pokonywanie pięt – nachylenie schodów, winda
- siedzenie – pochylenie, odchylenie górnej części ciała
- leżenie – kąt uniesienia głowy, nóg
- mieszanie w garnku – nachylenie łyżki

## □ Skrót

Czy zdarzyło ci się skrócić drogę np. do przystanku, ścinając narożnik trawnika? Większość osób tak robi, dlatego jest tak wiele wydeptanych ścieżek, skrótów, niezależnie od wyznaczonych chodników. Nasz umysł ma naturalną skłonność do wybierania najkrótszej trasy. Idąc po chodniku, musisz skręcić pod kątem prostym, ścinając narożnik, skracasz sobie drogę.

Przyjrzyj się skrótom na osiedlu. Jak powinny być twoim zdaniem projektowane chodniki?

## □ Zadanie całodobowe

W klasycznym, mechanicznym zegarze wskazówki – duża godzinowa i mała minutowa – tworzą kąty.

Poobserwuj zegar. Kiedy wskazówki tworzą kąt prosty, kiedy rozwarty, kiedy ostry? A kiedy wskazówki się pokrywają lub leżą na swoim przedłożeniu (wtedy też tworzą kąty)?

” **Co to jest trójkąt? Nie wiesz? To rysuj tak długo, aż pojmiesz idealny trójkąt**

Platon





# ” Punkt widzenia zależy od punktu siedzenia

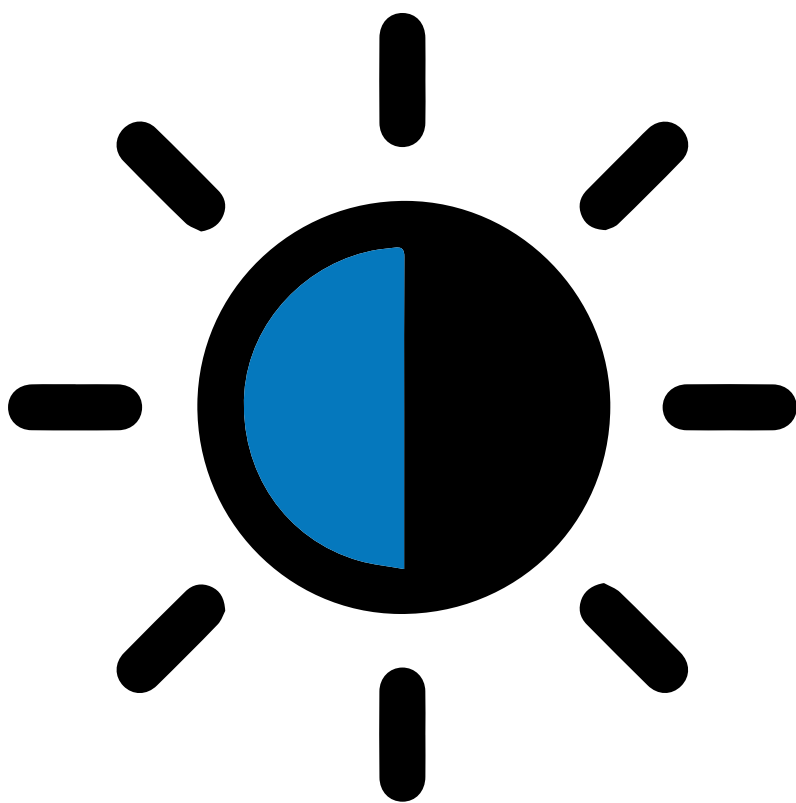
## powiedzenie

A teraz trudniej...

Zrób konstrukcję, która pozwoli obserwować zegar w lustrze. Czy teraz kąty wyglądają tak samo, czy zupełnie inaczej? Czy w każdej chwili wiesz, która godzina? Kwestia wyćwiczenia :).

### Jaki ma związek cień i godzina?

Wiesz, że Ziemia krąży wokół Słońca? Że w każdej chwili jej położenie względem Słońca się zmienia? Wiesz, że światło słoneczne dociera na Ziemię, a każdy przedmiot rzuca cień? Wiesz to, a jak jeszcze nie wiesz, to łatwo się zorientujesz.



Obserwuj swój cień – rano, w południe, wieczorem, w lecie i w zimie. Zauważysz, że zawsze pada pod kątem. Jaki to ma związek z zegarem? Skonstruuj zegar słoneczny. Najprostszy to kijek wbity w ziemię. W słoneczny dzień kijek będzie rzucał cień, który będzie się przesuwał jak wskazówka zegara. Na własne oczy zobaczysz, jak nasi przodkowie przed wiekami odczytywali godzinę.

### Inwentaryzacja kątów

Kąty są wszędzie, tylko trzeba je zauważyć. Jakich kątów widzisz wokół siebie i w otoczeniu najczęściej? Liczy się wszystko – kąt między gałęzią drzewa a pniem, między oparciem fotela a siedzeniem, kąt ramienia lampy, kąt nachylenia dachu, kąt, pod którym ustawione są schody. Kąt tworzy nawet otwarte skrzydło okna/balkonu z ramą.

Których kątów jest najwięcej? Oszacuj w ciemno, a potem sprawdź swoją intuicję: rozejrzyj się, policz.

- Ostre
- Proste
- Rozwarte

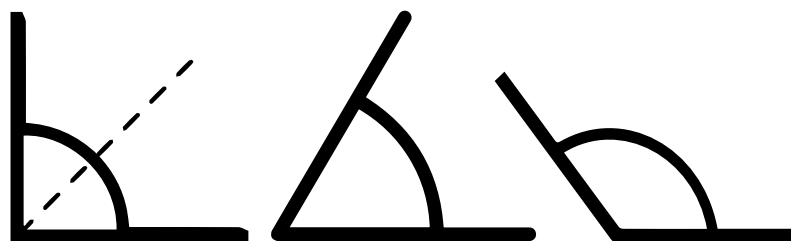
### Trójkąty na mapie

Czy wiesz, jaki jest najstłanniejszy trójkąt świata? Być może to Trójkąt Bermudzki, obszar na Oceanie Atlantyckim, gdzie w nieznanymi, niewyjaśnionych okolicznościach przepadają samoloty. Był samolot na radarze i nagle... nie ma, katastrofa. W Polsce mamy znany, choć mniej spektakularny trójkąt, wytyczony przez miasta, Konin – Koło – Turek, czyli po prostu zagłębienie węgla brunatnego.

Zabaw się w projektanta dróg i autostrad. Weź mapę i wybieraj po trzy dowolne miasta w Polsce, w Europie, Azji (żeby dało się tam dojechać samochodem), według jakiegoś klucza, o których wiesz, że mają coś wspólnego (choćby to, że ich nazwy zaczynają się tą samą literą), i łącz je w trójkąt. Jakie to trójkąty? Czy ramiona kątów pokrywają się (mniej więcej) z istniejącymi drogami? Jak zechcesz, możesz zacząć od połączenia trzech historycznych stolic naszego kraju.

### Kąty w mowie potocznej

Matematyka przeplata się z językiem. Dotyczy to każdego matematycznego pojęcia, w tym kątów.



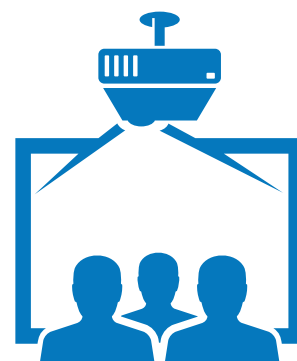
Słuchaj uważnie, wytapuj znaczenia, przerośnię, porównania, powiedzenia związane z „kątaami”. I rozszyfrowuj je:

- Idź do kąta – nagroda czy kara?
- Widzieć coś kątem oka – czy jest coś takiego jak „kąta oka”?
- Patrzyć na sprawę pod jakimś kątem – czy to jest jednoznaczne z powiedzeniem, że punkt widzenia zależy od punktu siedzenia?
- Patrzyć z ukosa – skąd mogło wziąć się takie określenie?
- Mieszkać u kogoś kątem – w luksusach, czy raczej nie?
- Snuć się z kąta w kąta – nudzić się, czy nie nudzić?
- Cztery kąta i piec piąty – pusto czy pełno we wnętrzu?
- Zanalizować pod kątem – czyli jak?

Szukaj odniesień w języku, w codziennych powiedzeniach.

### Kąta patrzenia

Siedzisz w kinie. Na wprost ekranu albo z boku sali. Z każdego miejsca patrzysz na ekran pod innym kątem. Podobnie w domu – każdy domownik, siadając przed telewizorem, patrzy na odbiornik pod innym kątem. To jest geometria.



Usiądź pod kątem prostym do ekranu, następnie pod kątem ostrym. Z którego miejsca najlepiej widać? Masz ulubione miejsce? Czy da się oglądać film, siedząc pod kątem rozwartym?





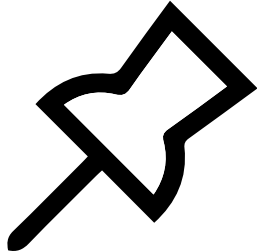
## □ Doświadczenie z cięciem pod kątem

Trzeba mieć doświadczenie, żeby drzewo po ścięciu upadło tam, gdzie chcemy. Zależy to między innymi od kąta, pod jakim fachowiec wykona cięcie. To wyższa szkoła jazdy. Ale i w domowych czynnościach wykorzystujemy sprawność działania „pod kątem” – tu też liczy się doświadczenie. Pod kątem kroimy bagietkę, wycinamy głąb z kapusty czy szypułkę z pomidora, robimy trójkąciki z pieczywa tostowego, pod kątem kroimy upieczone mięso, wałeczki ciasta na kopytka.



Poćwicz przy okazji. Ciekawe, co jeszcze przyjdzie ci na myśl. W sumie zupa z trójkątnych warzyw może być rodzinnym przebojem.

## □ Domowa obserwacja kątów



Jakie są kąty?  
Jak się zmieniają?

Poobserwuj. Weź sznurek i dwie pineski (mogą być gwoźdźki). Wbij pineski w teksturę albo inne podłoże, które się od tego nie zniszczy (raczej nie w blat kuchenny ani ulubiony rodzinny stół). Zawiąz supełek na każdej. Ważne, żeby pineski były w mniejszej odległości niż długość sznurka, pozostała po zawiązaniu supełków. Weź patyczek albo ołówek – to będzie wierzchołek obserwowanego kąta. Przesuwaj patyczek tak, by sznurek był napięty. Zobacz, jak zmienia się kąt między linią łączącą pineski a ramionami stworzonymi przez sznurek, gdy przesuwasz patyczek. Może zaobserwujesz jakieś prawidłowości?

Bonus: podłóż papier, a zobaczysz tor, jaki rysuje ołówek na podłożu, gdy nim poruszasz. Co to będzie? Podpowiedź: właśnie narysowałaś/narysowałeś elipsę. Takie trochę rozciągnięte albo przydeптane koło. Brawo!

## □ Równia coraz bardziej pochyła

Czy zdarzyło ci się, że coś spadło, stoczyło się z jakiejś pochyłej powierzchni? Na pewno masz za sobą doświadczenie zjazdu z górki na sankach albo nartach. Pochyła powierzchnia płaska np. podniesiona z jednego końca deska, górka saneczkowa, to przykłady równi pochyłej, czyli powierzchni nachylonej pod kątem do poziomu. Choć o pra-

wach rządzących ruchem po równi pochyłej nauczysz się za kilka lat na fizyce, na razie pobaw się i obserwuj. Z matematycznego punktu widzenia interesuje cię kąt nachylenia powierzchni.



Zrób prosty eksperyment: przygotuj jak największą, cienką książkę z twardymi okładkami (albo deseczkę, arkusz tektury) i małą kulkę – taką jak do ping-ponga albo mniejszą. Najpierw połóż książkę (czy coś) na stole, a na książce połóż kulkę. I co? Pewnie nic. Stół jest poziomy, kulka leży spokojnie. Teraz podnieś leciutko krótszy bok książki. I puść kulkę. Ruszyła, choć ledwo się toczy. Podnosząc coraz wyżej, za każdym razem puszczaj kulkę i obserwuj. Im wyżej podnosisz, tym większy tworzy się kąt, a kulka toczy się coraz szybciej. A co stanie się z kulką, gdy ustawisz książkę pionowo, czyli utworzy kąt prosty (bo wtedy książka stoi prosto! To proste :)? Sprawdź.

Może w innych domowych, wakacyjnych sytuacjach wypatrzysz inny przypadek równi pochyłej z czegoś?

## □ Obserwacja dachów

Dom rysowany przez dziecko zwykle ma trójkątny dach (i obowiązkowo dym z komina). W oczach małego dziecka dach to po prostu trójkąt. To schemat. Najprostsze, dwuspadowe, strome dachy rzeczywiście przypominają trójkąty, ich boczne krawędzie tworzą kąt ostry. Jednak wiele domów ma dachy o innych kształtach. Są proste i skomplikowane, klasyczne i uduchowione. Płaskie, jednospadowe, dwuspadowe, czterospadowe, mansardowe, namiotowe, polskie – musisz to zobaczyć, choćby w internecie. Temat jest, bo dachy to kąty.

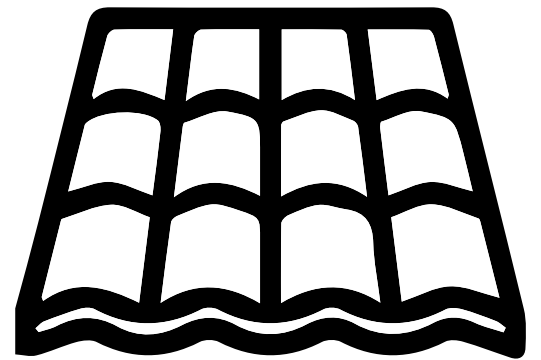


Obserwuj dachy, to dosyć ciekawe zajęcie. Można się wciągnąć. Chodząc po mieście, jadąc

przez wieś, odwiedzając różne regiony Polski, inne kraje, spoglądaj na dachy różnych budowli – domków, kamienic, bloków i wielkich biurowców, fabryk, kościołów, centrów handlowych, hal sportowych... Co ci przypominają? Których jest najwięcej? Jakie kąty zauważasz w konstrukcjach dachów?

Może:

- wyłapiesz prawidłowości np. związane z tradycyjnym budownictwem w danym regionie?
- poszukasz odpowiedzi na pytanie, dlaczego dachy na terenach górskich są z reguły bardziej strome niż na nizinach?
- spróbujesz naszkicować jakiś dach z natury albo inspirując się ilustracją? Prościej będzie narysować dach „jak dziecko”, trudniej oddać perspektywę. Ale spróbuj.
- podejmiesz wyzwanie i zbudujesz dach z dostępnych elementów (klocki, tektura, książki...)? Jaki to będzie dach?



## □ Jak łatwiej zaparkować?

Każdy, kto jeździ samochodem, musi umieć parkować. To jasne. Dobry kierowca poradzi sobie w każdych warunkach, a nawet nie najlepszy z czasem dochodzi do wprawy. Ćwiczenie czyni mistrza.

Jak myślisz, czy parkowanie pod kątem (po skosie) jest łatwiejsze (a może trudniejsze?) od parkowania równoległego (np. równoległe do chodnika) i/lub prostopadłego (pod kątem prostym do jezdni, np. w galerach handlowych)? Dlaczego? Spytaj dorosłych, którzy mają prawo jazdy i doświadczenie.





# Konstrukcje, budowa i remont, matematyka i doświadczenie

Budowa i remont, wykańczanie i meblowanie domu czy mieszkania to idealny poligon matematyczny. Przydaje się geometria, arytmetyka, umiejętność rozwiązywania równań i układów równań, planowanie. Ale przede wszystkim liczy się wyobraźnia i doświadczenie. Warto wykorzystywać każdy pretekst do ćwiczenia. Rzemieślnicy starej daty, choć prawdopodobnie nie mają doktoratu z matematyki, z głowy znajdują rozwiązania matematycznych problemów, liczą w pamięci, często kalkulują „na oko” i wszystko działa. Warto z dziećmi oglądać ilustracje, filmy pokazujące fantastyczne, ożywiające wyobraźnię konstrukcje, które powstały wieki temu: piramidy w Gizie, rzymskie Koloseum, Wielki Mur Chiński, starożytne akwedukty (łac. aquae ductus, czyli ciąg wodny), dzieła nowożytnych architektów, np. wieżę Eiffla, czy współczesne kosmiczne projekty inżynieryjne i architektoniczne. Wkoło nas, na każdym kroku są budynki i budowle, które dostarczają pretekstów do matematycznej analizy. Cuda inżynierii sprzed wieków dają dowody, że można projektować i budować bez pomocy komputerów, ale bez znajomości praw matematyki się nie da.

## Czy domy zawsze muszą być proste?

Patrzemy w koło i co jak co, ale domy zawsze są proste. Domy, inne budowle – każde dziecko to wie – to równe ściany, rzędy okien, wszystko jak pod sznurek. Ale od każdej reguły są wyjątki. Ponad 100 lat temu oryginalne budowle, w których nic nie jest proste, tworzył kataloński architekt Antoni Gaudí. Do dziś jego dzieła przyciągają turystów do Barcelony (pewnie kojarzysz to miasto z wyjątkowym katalońskim klubem piłkarskim FC Barcelona). Gaudí żył i projektował na przełomie XIX i XX wieku, gdy o komputerach nikomu się jeszcze nie śniło. Projektował fantastyczne i fantastyczne bryły – kamienice, świątynie, małą architekturę inaczej niż inni. Dla niego linie proste, oczywiste i podstawowe w architekturze, były abstrakcją. W jego projektach wszystko jest miękkie, nie ma kątów prostych.

Zobacz zdjęcia obiektów zbudowanych według jego projektów w internecie, a gdy będzie okazja, na żywo. Podoba ci się? Jesteś pod wrażeniem? To dwie różne rzeczy. Jaką architekturę wybierasz – jak spod sznurka czy jak ze snu?



## Sprawność: budownicza/budowniczy

Ludzie budują od zarania dziejów. Najpierw adaptowali jaskinie, w których się chronili, potem zaczęli budować szałas, chaty, z czasem powstały grody, kamienice, pałace, zamki, twierdze, mosty i akwedukty. Dziś żyjemy wśród przeróżnych budowli o różnym charakterze, odmiennym przeznaczeniu. Zbudować można wszystko, lecz trzeba wiedzieć, jak. A to zależy, co chcemy zbudować, po co, jaką to ma mieć funkcjonalność, wytrzymałość i estetykę. Przyszli architekci, inżynierowie budownictwa, konstruktorzy zdobywają wiedzę na te tematy na studiach. Co nie znaczy, że budować mogą wyłącznie fachowcy. Przez wieki ludzie budowali z serca – najpierw obserwując mistrzów, potem stając się mistrzami. Poza tym doskonałe konstrukcje tworzą nie tylko ludzie, ale i zwierzęta: ptaki budują gniazda, bobry żeremia, mrówki mrowiska – to konstrukcje doskonałe.

Buduj przestrzenne kompozycje, konstrukcje, z czego chcesz, z czego możesz, co masz pod ręką:

- z klocków,
  - z przedmiotów przeznaczonych do recyklingu (pudła, kartony, rurki...),
  - z książek,
  - z wikliny,
  - z gazety (wystarczy rozkładówka gazety codziennej, by zbudować most),
  - z gałęzi,
  - z piachu,
  - z gliny,
  - z patyczków do szaszłyków (słomek) itd.
- Za każdym razem konstrukcja będzie inna. Zobaczysz praktyczne zastosowanie figur geometrycznych, kształtów. Kombinuj.

”

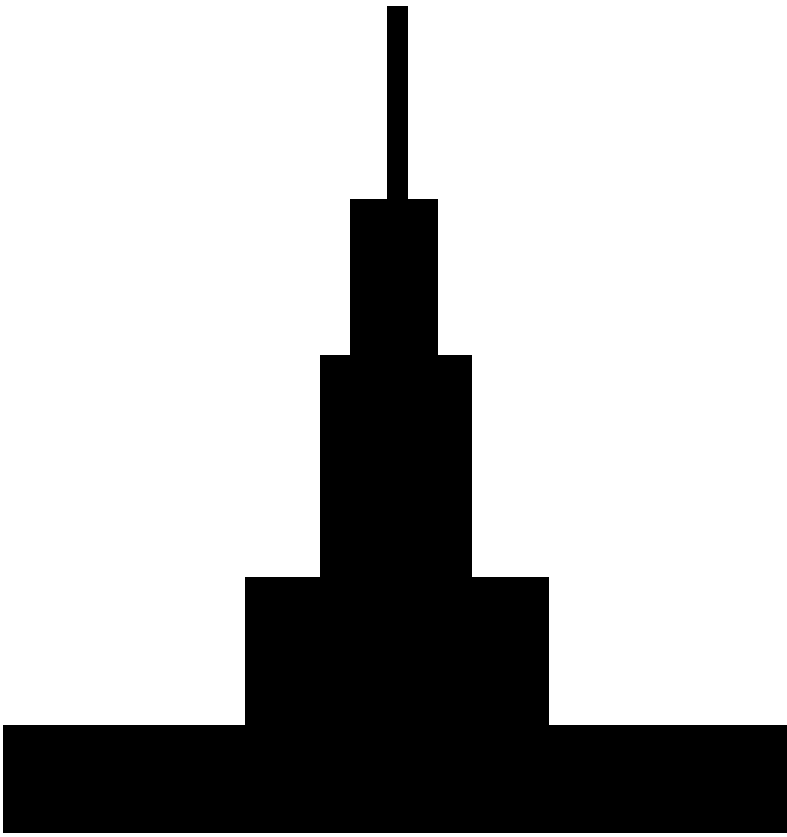
**Wyobraźnia jest początkiem tworzenia. Wyobrażasz sobie to, czego pragniesz, chcesz tego, co sobie wyobraziłeś i w końcu tworzysz to, czego chcesz**

**George Bernard Shaw**

## Fantazja w architekturze

Nie trzeba jechać do Barcelony, żeby zobaczyć coś fantastycznego. Na polskich ziemiach też są różne nieliniowe zabytki, obiekty bardziej fantastyczne niż podstawowe formy geometryczne.





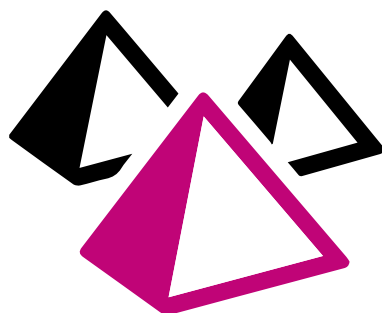
Poszukaj inspiracji w przewodnikach. Pojeźdź i zobacz na własne oczy albo zobacz, co się da, w internecie. Rozejrzyj się w najbliższej okolicy – czy dostrzegasz konstrukcje wyjątkowe, inne od wszystkich? Jakie formy tam odnajdziesz? Czy ci się spodobają? To już kwestia gustu.

- Pałac Kultury i Nauki w Warszawie (nie ma bardziej kontrowersyjnego budynku w Polsce),
- Pałac Moszna w województwie opolskim (jakiego kształtu tam nie ma?),
- zamek/twierdza Krzyżtopór w województwie świętokrzyskim (podąż tropem kalendarza – nie ma konkurencji na świecie),
- Sukiennice w Krakowie,
- zamek/twierdza Malbork – nigdy niezdobuty,
- Filharmonia w Szczecinie (góra lodowa w środku miasta – czy to możliwe?),
- co jeszcze polecasz?

## Piramidy egipskie

Wiesz, jak wyglądają egipskie piramidy? Może widziałas/widziałeś je na własne oczy? Robią wrażenie? Ich konstruktorzy mieli do dyspozycji jedynie patyczki i piasek pustyni, ewentualnie rysik i papirus. Prowadzili obliczenia bez pomocy komputerów, musieli polegać na doświadczeniu i wyobraźni. Pewnie nie raz popełnili błąd, bardzo prawdopodobne, że nie raz doszło do katastrofy, gdy jakiś element nie wytrzymał obciążeń, budowa pochłonęła też wiele ofiar – nieudolnie wykorzystywani niewolnicy ginęli jak muchy. Ale efekt finalny jest imponujący, a niepowtarzalnie konstrukcje co roku przyciągają miliony turystów z całego świata.

Poświęć pół godziny i pomyśl, jak budowano piramidy, możesz poczytać, obejrzeć filmy. Ważne, żeby uruchomić wyobraźnię. Budowa była matematycznym wyzwaniem. Czy to nie zdumiewające, że w piramidach też można odnaleźć złotą proporcję? Poczytaj o tym więcej w rozdziale o proporcjach. Jak masz ochotę, zbierz twarde matematyczne fakty:



- ile czasu budowano piramidę,
- z ilu bloków i jakiej wielkości jest zbudowana,
- ile ważył jeden blok,
- z jakiej odległości ściągano kamienne bloki,
- jak określano pion i poziom,
- ilu niewolników budowało piramidę,
- ile waży piramida,
- od ilu lat stoi na ziemi (licząc od końca budowy).

Zadaj jeszcze więcej pytań. Zgromadzisz podstawowe informacje, możesz policzyć różne matematyczne wielkości: pole powierzchni piramid, długość ramion piramid, kąt nachylenia ścian. Jeśli zechcesz, ułóż jak najwięcej zadań na ten temat. Szukanie odpowiedzi nie będzie zabawą na małych liczbach. Wręcz przeciwnie, może odkryjesz jakieś tajemnice.

## Skala 1 – Jak się zorientować, jaka skala

W języku polskim często używamy pojęcia skala. Mówimy o skali zniszczeń, skali głosu, skali barw, skali twardości, skali temperatury, skali siły wiatru czy skali siły trzęsienia ziemi. Skala to zakres, rozpiętość.

Jakie znasz skale? Co można przedstawić na skali? Jakie to są rodzaje skali? Jaki mają zakres? Czy może być skala „bez matematyki”?

## Skala 2 – jak duże zmniejszyć, małe powiększyć

Dzieci od małego, rysując z natury większe obiekty, czy to człowieka, drzewo, wazon, dom, naturalnie, intuicyjnie pomniejszają obraz. Obiekt w rzeczywistych wymiarach nie zmieści się przecież na kartce. Gdy dziecko rysuje coś relatywnie małego – motyla, biedronkę, kwiatek – wtedy po prostu powiększa rysowane obiekty. Raz wykorzystuje skalę zmniejszającą, raz zwiększającą.

Wybierz dowolny obiekt i narysuj w kilku wielkościach. Tym razem nie chodzi o urodę rysunku, ale o ćwiczenie. Zmierz obiekt (jeden wymiar) w naturze i na rysunkach. Spróbuj z pomniejszeniem i z powiększeniem. Gdy dowiesz się, jak ustala się skalę, wykorzystaj to przy opisie rysunków.

## Skala 3 – Jak odwzorować coś dokładnie

Jak mają się do siebie: kula ziemiska i globus, terytorium Polski i mapa Polski, twoje miasto i plan twojego miasta, twoje mieszkanie i plan tego mieszkania? Mapy i plany odwzorowują rzeczywistość, lecz (tak mówimy po polsku) w mniejszej skali. Czym jest skala? To stopień pomniejszenia obrazu. Gdy mówimy, że coś jest w skali 1:1, oznacza to, że jest dokładnie takiej wielkości, jak jest w rzeczywistości. Coś jest dwa razy mniejsze niż w rzeczywistości, jeśli jest w skali 1:2. Czyli skala (mówi się np. jeden do pięciu):

- 1:5 – oznacza, że wymiary zostały zmniejszone 5 razy, czyli 1 metr w rzeczywistości na kartce będzie miał 20 cm;
- 1:10 – wymiary zostały zmniejszone 10 razy, czyli 1 metr będzie miał 10 cm na kartce;
- 1:20 – wymiary zostały zmniejszone 20 razy, czyli 1 metr będzie miał 5 cm na kartce;
- 1:100 – to wymiary zmniejszone 100 razy, czyli 1 metr w rzeczywistości na kartce będzie miał 1 cm;

I tak dalej.

Narysuj odcinek długości 1 metra w różnych skalach. Poćwicz. Wybierz skalę, w której najłatwiej będzie zmieścić plan twojego pokoju, mieszkania na kartce. Jak myślisz, czy skala działa też w drugą stronę? Czy można odwzorować coś bardzo małego, jako większe? Jak wtedy będzie wyglądać zapis skali?





## □ Plan pomieszczenia

Każde pomieszczenie da się narysować. Taki rysunek nazywamy planem. Plan może być orientacyjny – to szkic, bez dokładnego mierzenia odległości, bez szczegółów – chodzi o oddanie układu pomieszczenia. Ale może być bardziej szczegółowy, profesjonalny – wtedy trzeba dokładnie zmierzyć wszystkie odległości, rozmieścić drzwi, okna. Na planie można też zaplanować ustawienie mebli, sprzętów. Zrobienie planu ożywia wyobraźnię, jest podstawą decyzji o urządzeniu pomieszczenia.



Zabaw się w architekta i narysuj swój pokój albo ambitniej – całe mieszkanie. Zrób szkic lub plan profesjonalny. Gdy zdecydujesz się na ten profesjonalny, wymierz wszystkie ważne odległości i dokładnie przenieś je na papier (najłatwiej będzie rysować na kartce w kratkę albo na papierze milimetrowym). Spróbuj swych sił jako projektant wnętrz – gdy wymierzysz dokładnie wielkość mebli, możesz narysować je na osobnej kartce, wyciąć i postarać się ustawić je w nowy sposób. Pokaż swoją koncepcję rodzicom, może zainicjujesz dobre zmiany? Ktoś musi.

Uwaga! Pamiętaj, że plan mieszkania i meble muszą być narysowane w tej samej skali, czyli np. przyjmij, że 1 metr to 2 cm.

## □ Konstruktywna krytyka

Architekt tworzy budynki i inne budowle. Architekt wnętrz aranżuje wnętrza. W tych zawodach liczy się wyobraźnia przestrzenna, ale bez matematyki nie da się nic zaprojektować, zaplanować. To nie jest kwestia urody wnętrz, lecz układu pomieszczeń, ich funkcjonalności.

Spójrz krytycznie na swoje mieszkanie. Oceń prace projektantów – weź notes i notuj, co ci się nie podoba albo na co masz lepszy pomysł. Masz do tego wystarczające kompetencje, bo tu mieszkasz. Spisz albo narysuj uwagi dla architekta. Może coś da się zmienić według tego, co zaproponujesz? A jeśli nie, przynajmniej wy-

ostrzysz spojrzenie na te zagadnienia. Czasami 10 cm robi różnicę!

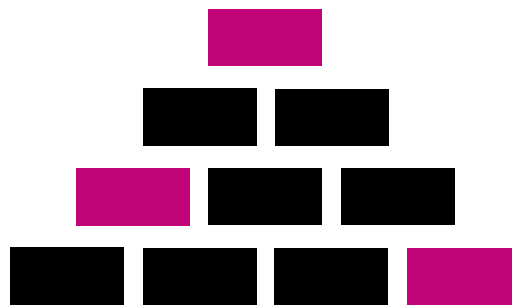
Przykłady tematów do analizy:

- czy połączenia między zlewem, lodówką, blatem roboczym, śmietnikiem są funkcjonalne? (narysuj kuchnię i zaznaczaj, skąd dokąd najczęściej przenosi się rzeczy)
- gdzie przydałoby się 10, 20 cm więcej długości, szerokości, wysokości?
- czy wnęki są wystarczająco duże, żeby zmieściła się szafa?
- czy wygodnie siedzi się na WC, korzysta z prysznica, myje zęby nad umywalką?
- czy goście komfortowo siedzą przy stole?
- czy można swobodnie minąć się w korytarzu?

A może masz pomysł, by coś przearanżować w mieszkaniu – odsunąć stół od ściany albo przestawić szafkę? Zaproponuj zmiany.

## □ Jaka piękna katastrofa!

Stajesz na balkonie, wsiadasz do windy, wjeżdżasz na most, kładziesz się na łóżku, idziesz kibicować na stadion – masz zaufanie, że te konstrukcje wytrzymają twój ciężar. I słusznie, bo wszystkie współczesne obiekty – małe i wielkie – są dokładnie policzone. Matematyka! Obliczeniami wytrzymałości wszelkich budowli zajmują się inżynierowie konstruktorzy, pomagają im w tym specjalistyczne programy komputerowe. Ale budowniczowie sprzed dziesiątek lat, nie wspominając o tych sprzed stuleci, bez komputerów tworzyli wspaniałe dzieła, które cieszą nas do dziś. Wiedzieli doskonale, jak oprzeć kopułę katedry na ścianach, jaki kształt i konstrukcję muszą mieć przęsła mostu, jak poprowadzić akwedukt – te budowle miały spełniać swoje role i nie zawalić się. Mieli wiedzę i doświadczenie. Możesz pójść w ich ślady i zdobyć doświadczenie w warunkach domowych.



Buduj konstrukcje, z czego się da, zawsze coś znajdzie się pod ręką – z klocków, z książek, z patyków, z piasku, z puszek, z zapalek. Każda próba czegoś uczy, w najgorszym razie obserwuj, kiedy następuje... katastrofa. Z porażek najlepiej wyciąga się wnioski na przyszłość.

## □ Ile farby kupić i ile to będzie kosztowało

Założmy teoretycznie, że masz pomalować całe pomieszczenie, bez podłogi oczywiście. Takie

ćwiczenie logicznego myślenia w czasie remontu nie raz ci się jeszcze przyda.

Wypisz kolejne kroki. Jakie informacje musisz zebrać, żeby dobrze przygotować się do pracy, wykonać ją i wydać jak najmniej pieniędzy? Brak wiedzy kosztuje i sprawia kłopoty, bo gdy kupimy czegoś za dużo, to zostanie, jak za mało, trzeba będzie jeszcze raz jechać do sklepu. Gdy rodzina będzie robić rzeczywisty remont albo będzie planowała przeprowadzkę, zgłoś się do rozmów na ten temat, nie tylko w sprawie malowania, ale we wszystkich innych też. Bo dlaczego nie? Może się okazać, że twoje pytania, uwagi są bezcenne.

Podpowiedzi:

- jaka jest powierzchnia do pomalowania (nie zapomnij o suficie!, uwzględnij drzwi, okna, w łazience odejmij powierzchnię, która jest pokryta glazurą, wklejonym w ścianę lustrem, gdy jest szafa wbudowana, trzeba ustalić, czy wnętrze będzie malowane, czy nie).
- ustal, czy trzeba ściany gruntować – jeśli tak, należy kupić dodatkowy środek do gruntowania powierzchni.
- ile razy trzeba malować – czy ściany są surowe, czy będą odświeżane, gdy będą odświeżane, czy będą malowane takim samym kolorem, ciemniejszym czy jaśniejszym (wtedy przyda się jeszcze jedna warstwa).
- gdy wiesz, jaka jest powierzchnia do pomalowania, ile razy trzeba malować, możesz policzyć, ile litrów farby potrzeba. Do tego potrzebujesz informacji od producenta, o wydajności farby. I tu znowu nie jest łatwo, bo producenci podają ją w przeróżny sposób. Jeden – ile metrów kwadratowych można pomalować jednym litrem farby, inny – na ile metrów kwadratowych wystarczy puszka farby (objętości bywają rozmaite). Zdarza się, że podają liczbę metrów podwójnego malowania albo pojedynczego. Rada – trzeba czytać ze zrozumieniem.
- na koniec możesz podsumować, ile będzie kosztowała farba. Gdy już wiesz, na jaką farbę się decydujesz i ile jej potrzeba, wybierz takie objętości puszek, żeby jak najmniej zostało i jednocześnie, by były to większe opakowania. To reguła – litr farby w większym opakowaniu jest tańszy niż w mniejszym. Po co przepłacać!

## □ Ile metrów z metra

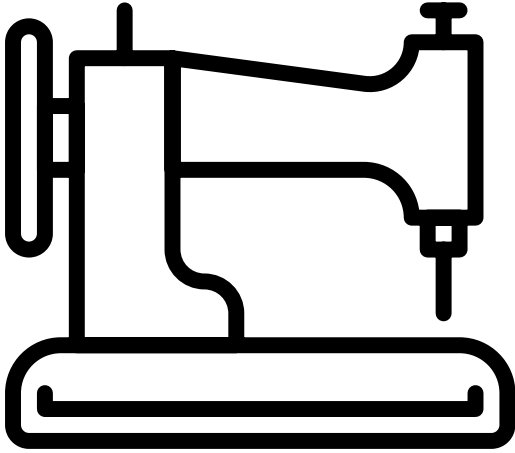
Materiały produkowane są w belach o różnej szerokości. Kupuje je się na metry.

Kolejna zabawa z wyobraźnią. Tym razem kupujesz materiał na zastony. Jak policzyć, ile go potrzeba? Przyda się dodawanie, mnożenie i wyobraźnia. Zmierz się z tematem, udzielając odpowiedzi na pytania:





- ile jest okien?
- jaka szerokość zaston jest potrzebna (trzeba założyć co najmniej o połowę więcej materiału, niż wynosi szerokość okien – żeby się ładnie układało)?
- jak szeroki jest wybrany materiał?



- jaka długość zaston jest potrzebna, żeby starczyło od karnisza do podłogi, do parapetu (trzeba ustalić, czy zastony mają się opierać na podłodze, a może mają być ileś centymetrów nad powierzchnią)?
- ile materiału z długości trzeba przewidzieć do założenia – od dołu i od góry?
- czy wybrany materiał się kurczy w praniu, czy też nie? Jeżeli tak, to o ile dłuższy odcinek trzeba będzie kupić? (zwykle producenci podają kurczliwość w procentach, np. 5%)

Teraz wystarczy wszystko wymierzyć, policzyć, sprawdzić dwa razy, kupić, uszyć i powiesić. Powinno pasować.

## □ Mistrzowska aranżacja

Założmy, że chcesz zamówić półki. Musisz wiedzieć, co zlecić stolarzowi. Fachowiec nie przyjmie zlecenia, jeśli nie będzie wiedział (z dokładnością do milimetra!), na jaki wymiar ma ciąć deski. Czyli musisz podać wymiary półek – długość, szerokość – i ich liczbę. Niby prosta rzecz, a tyle pytań i decyzji.

Przeprowadź ćwiczenie teoretyczne. Doświadczenie i wprawa kiedyś przyda ci się w życiu. Na pewno. Podstawowe pytania:

- jakie wymiary ma szafa albo ściana? Możesz zmierzyć istniejącą domową ścianę lub szafę – to będzie baza do przymiarki. Gdy mierzysz ścianę – wystarczą dwa wymiary, gdy mierzysz wewnątrz szafy albo wnękę – niezbędne są trzy wymiary – długość, szerokość i wysokość. To podstawa.
- jaka będzie szerokość półek? Gdy będą mocowane do ściany, możesz swobodnie, w granicach rozsądku, zdecydować o ich szerokości, biorąc pod uwagę, co ma stać lub leżeć na półkach (gdy będą to książki, wymierz najszerszą). Jeśli będą mocowane w szafie lub wnęcie, dobrze, żeby były

maksymalnie szerokie, ale tak, żeby bez problemu zamykały się drzwi.

- co chcesz położyć/postawić na półkach? Od tego zależy odległość między nimi. Nie muszą być równe – na jednej półce mogą stać wyższe przedmioty, na innej niższe. Musisz podjąć decyzję.
- ile zmieści się półek, biorąc pod uwagę wymiary i odległości pomiędzy nimi oraz ich grubość?
- jak będą zamocowane? Dla stolarza to bez znaczenia, ale na projekcie musisz przewidzieć system mocowania (na haczykach, podpórkach, kołkach) – trzeba wiedzieć, gdzie wierceć dziury w ścianie.

Praktyczna podpowiedź – gdy masz takie zadanie, spróbuj narysować projekt, przenieś wszystkie wymiary na rysunek. Łatwiej skorygować założenia na rysunku, niż potem np. wyrzucić gotowe, ale niepasujące półki. Pamiętaj – obliczenia warto sprawdzić dwa razy.

## □ Szkoła cięcia

Ile razy trzeba ciąć, żeby przeciąć kartkę na dwie części? A na trzy części? A na siedem? Jaka jest zasada?



Weź kartkę i tnij. Zapisz wyniki. Już wiesz? Jaka regułę obserwujesz? Ile razy pan stolarz musi przeciąć długą deskę, żeby mieć cztery półki? A jak ten temat wygląda przy cięciu czegoś okrągłego? A jak przy cięciu np. sześcianu?

## □ Niewyczerpana inspiracja

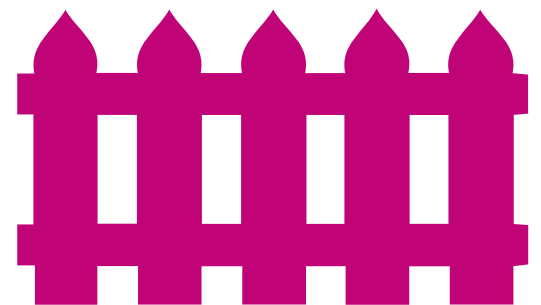
Co to? Ogrodzenia. Fascynujący temat – miliony fasonów, wzorów, koncepcji. Klasyczne z prostych desek i wyrafinowane, często wydumane. Tanie i drogie. Każdy się grodzi zgodnie z własnym gustem, czyli można powiedzieć: „moje ogrodzenie świadczy o mnie”. Podstawowy cel – odgrodzić swoje od tego, co publiczne, od sąsiada. Sztachety drewniane, kute kraty, panele betonowe, plastikowe, siatka. Nieprzebrane kombinacje geometryczne: elementy pionowe, poziome, w kratkę, po skosie. Każdy parkan to wyzwanie dla projektanta, wykonawcy – trzeba zmierzyć długość, wybrać wzór, zdecydować o mocowaniu, na podmurówce lub nie, zaplanować rozstaw słupków, ustalić wysokość, wyliczyć ilość materiałów – słupków, desek, cegieł, cementu, impregnatu... Prawdziwie matematyczny test.

Przyglądaj się parkanom, doszukuj się matematyki. Jakie ogrodzenie lubisz? Proste czy skomplikowane? Z jakich materiałów? Zapro-

” **Matematyka podobna jest do wieży, której fundamenty położono przed wiekami, a do której dobudowuje się coraz wyższe piętra. Aby zobaczyć postęp budowy, trzeba iść na piętro najwyższe, a schody są strome i składają się z licznych stopni. Rzeczą popularyzatora jest zabrać słuchacza do windy, z której nie zobaczy ani pośrednich pięter, ani pracą wieków ozdobionych komnat, ale przekona się, że gmach jest wysoki i że wciąż rośnie**

Hugo Steinhaus

jektuj, narysuj własny model. Może odkryjesz w sobie nowy talent? Przechodzisz koło ogrodu, mierz długość krokami, potem przeliczysz na metry. Obliczanie długości to podstawowe zadanie na obliczanie obwodu figur.



## □ Drabina a matematyka

Czy wiesz, że ustawienie drabiny może mieć wpływ na bezpieczeństwo? Jej dolna część musi być odpowiednio odsunięta od ściany, czyli drabina musi tworzyć kąt ze ścianą. Jaki? Fachowcy wiedzą to z doświadczenia, amator powinien przeczytać instrukcję.

Żeby zrozumieć, o co chodzi, nie musisz eksperymentować z prawdziwą drabiną, nawet lepiej nie, ale przymierz się i zrozum. Weź

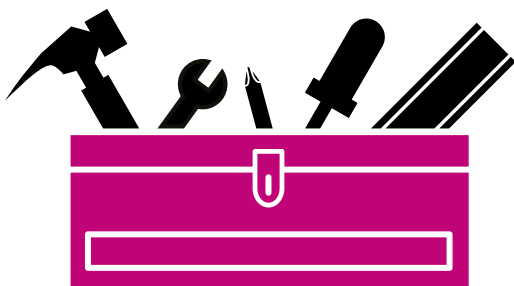




np. książkę, nie za grubą, w twardej oprawie i oprzyj ją o ścianę. Poćwicz z różnymi kątami nachylenia. Szybko zorientujesz się, że nie może być on ani za mały, ani za duży, czyli dół drabiny (w twoim eksperymencie dół książki) nie może stać ani za blisko, ani za daleko od ściany. Znajdź złoty środek.

## Z wizytą w sklepie z narzędziami

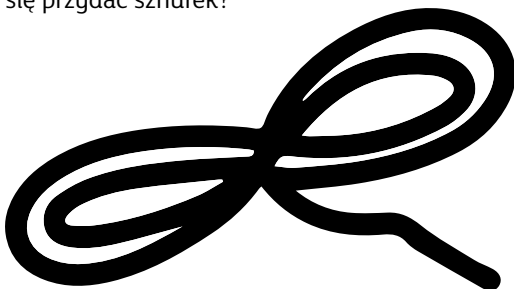
Czy lubisz wizyty w sklepach technicznych: z narzędziami, z artykułami do ogrodów, z chemikaliami? Jedni lubią, inni mniej, ale trudno zaprzeczyć: jest tam obfitość produktów, większość z nich dobieramy, podając wielkość, rozmiar, kupujemy, wiedząc jaka ilość jest potrzebna. Każdy produkt, grupa produktów ma specyfikę i logikę opisu wymiarów – czasem brzmią fantastycznie: np.  $\phi 14$ , czyli fi 14, to znaczy, że coś ma średnicę 14 mm, albo w innym systemie, np.  $3/4$ ", czyli  $3/4$  cala, czyli coś, co ma średnicę ok. 1,9 cm. Aby kupić to, co jest potrzebne, przydaje się wiedza o parametrach.



Przy okazji pokręć się pomiędzy półkami i popatrz, jak oznaczane są wielkości, rozmiary: gwoździ, śrub, wiertel, rur, złączek, lin, węży ogrodowych, kluczy francuskich, nasadkowych, nakładek i tysiąca innych rzeczy.

## Patenty ze sznurka

Niby wszystko można kupić, ale fachowcy, szczególnie ci starszej daty, choć nie tylko, nadal chętnie sięgają po niezawodne metody – na budowie bez sznurka ani rusz. Do czego może się przydać sznurek?



Pomyśl. Wypróbuj, choćby w zabawie. Za każdy pomysł dostajesz brawa.

Na wszelki wypadek odpowiedzi:

- pion doskonały – sznurek i obciążnik pokaza idealnie pion.
- poziom doskonały – gdy trzeba zaznaczyć

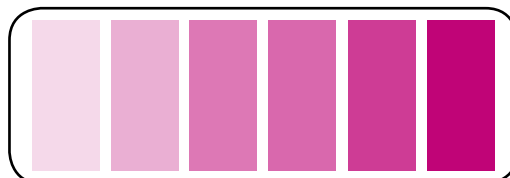
# ” Architektura jest geometrią stosowaną do budownictwa

Hugo Steinhaus

długi, poziomy odcinek na ścianie (np. wyznaczyć linię malowania), potrzebny jest długi sznurek, farba albo wapno w proszku (coś sypkiego). Zamocowaną na tej samej wysokości linię napinamy jak strunę i puszczaemy – na ścianie zostaje idealnie prosta linia.

- kolejna warstwa cegieł – sznurek zamocowany z dwóch stron murowanej ściany pozwala murować „pod sznurek”, czyli równo, z gwarancją, że nie położy się za dużo zaprawy.
- kontrola kształtu pomieszczenia – czy jest prostokątem, czyli ma wszystkie kąty proste? Sznurek pomoże sprawdzić, czy obie przekątne są równe. Jeśli tak, można przyjąć, że jest OK. Raczej trudno założyć, że wykonawcy niechcący wyszedłby trapez równoramienny.
- wytyczanie długiej linii prostej – wiesz przecież, że przez każde dwa punkty można poprowadzić jedną i tylko jedną prostą. Sznurek przydaje się więc przy wytyczaniu np. linii ogrodzenia – wystarczy wbić kołki na początku, na końcu odcinka rozciągnąć sznurek i już wiadomo, gdzie stawiać pośrednie słupki.
- kontrola równego układania płytek, kostki chodnikowej – gdy rzędy mają być proste, jak pod sznurek, znów przydaje się sznurek.

## Budowa to też kolor



Kolor ma znaczenie w budownictwie. Kolory otaczają nas z każdej strony – na zewnątrz, w mieście, na autostradzie i we własnym mieszkaniu. Tak jak przyroda pomalowana jest ręką natury, tak o kolorystyce budowli, mebli, tkanin decyduje człowiek. Ciekawe, czy masz talent do widzenia, rozpoznawania, dobierania barw?

Zajrzyj do internetu i obejrzyj mnogość kolorów, a jak będziesz w sklepie z farbami, popatrz na

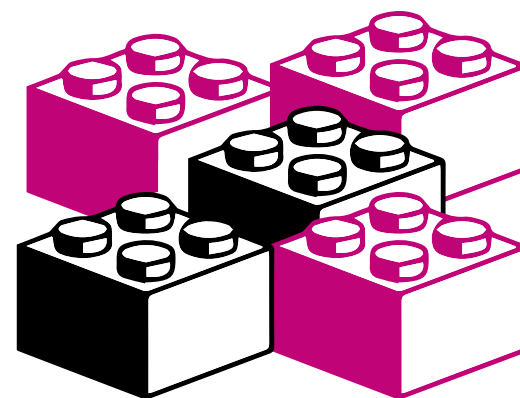
próbki kolorystyczne. Kolory mają swoje oznaczenia – numery w systemach RAL (np. 1015), Pantone (np. kolor roku 2017 – GREENERY PANTONE 15-0343). Rozejrzyj się po otoczeniu i spróbuj dobrać najbliższe mu barwy z wzorników dostępnych w internecie albo ze sklepowych próbników.

- jakie kolory przeważają w twoim mieszkaniu?
- ściany są białe czy kolorowe?
- w jakich kolorach są tkaniny w twoim domu – zasłony, dywany, obrusy, ręczniki?
- w jakim kolorze są szafki kuchenne?
- w jakim kolorze są grzejniki?
- jakie kolory są w łazience?
- na jaki kolor jest pomalowany twój dom/blok/kamienica? A ten naprzeciwko?

Mieszanie barwników, by uzyskać kolor marzeń, to też prawdziwa, praktyczna matematyka. Chcesz się dowiedzieć więcej na ten temat – poszukaj informacji o systemie CMYK, popatrz na próbki Pantone z informacją o składzie procentowym barwników. Fascynujące. Ta technika jest podstawą kolorowego druku, ale to już inna historia.

## To warto mieć

Budować można ze wszystkiego, co się chce. Na pewno znasz najpopularniejsze na świecie klocki LEGO, grę video Minecraft, może masz zestaw metalowych elementów z dziurkami pod nazwą „Młody konstruktor”. To jedno z wielu propozycji – rozwijają wyobraźnię, dają praktycznie nieograniczone możliwości budowy małych i wielkich konstrukcji.





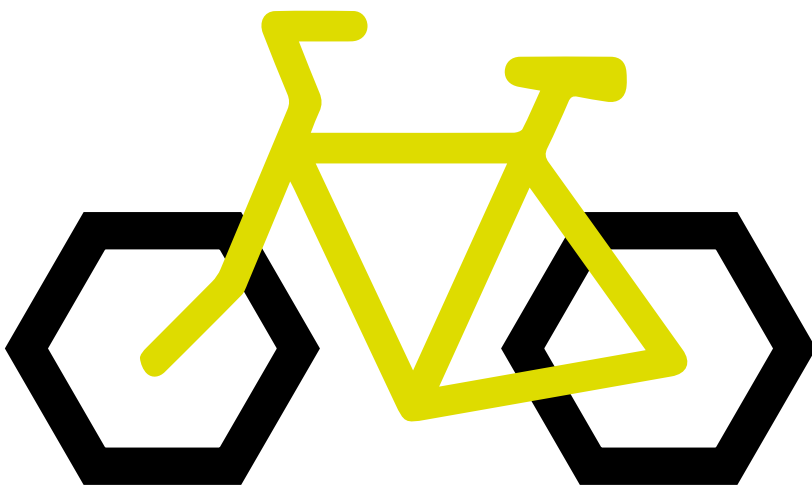


# Kształty, czyli co jest podobne, do czego i dlaczego?

Podstawowe kształty są charakterystyczne, znamy je dobrze. Potrafimy je odróżnić, określić cechy, nazwać. Już małe dzieci prawidłowo dopasowują formy klocków do szablonów – trójkąt, kwadrat, koło... Świadomość różnorodności kształtów jest ważna, bo dotyczą one prawie każdej rzeczy, wszystkich przedmiotów, istot żywych, obiektów, tych najmniejszych i największych (wyjątkiem są ciecze i gazy). Kształt może być różny – płaski lub przestrzenny, regularny czy nieregularny, prosty lub złożony, foremny lub nieforemny, stały czy zmienny, własny lub nadany. Kształt mają linie (proste, krzywe, łamana, okręgi, elipsy, parabole), figury płaskie: wśród nich trójkąty, czworokąty, pięciokąty i dalsze wielokąty, koła, owale, oraz bryły, czyli obiekty trójwymiarowe, takie jak kule, sześciany, ostrosłupy, walce, prostopadłościany. Wiele przedmiotów jest czystą formą, inne tylko przypominają podstawowe kształty geometryczne, wiele w ogóle, bo otacza nas bogactwo różnych fantastycznych form, konturów, kształtów, fasonów. Język, którym opisujemy świat, czerpie z geometrii, lecz pełen jest umowności, uproszczeń, interpretacji. Ważne, że wiemy, co mamy na myśli, gdy mówimy o owalnym stole, prostokątnej kromce chleba, trójkątnej pizzy (mimo że jeden z jej boków nie jest prosty), esach-floresach. Wszystko wokół nas da się skojarzyć z matematyką, nazwać jej językiem, choć nie jest czystą matematyką. A kształty to ocean – pojęć, skojarzeń, tematów.

## Materiał do przemyslenia

Wiesz więcej, niż myślisz, że wiesz. Każdy tak ma. Trochę wiemy, bo się nauczyliśmy, trochę podpowiada nam intuicja, trochę doświadczenie, osłuchanie. Czasem może się wydawać, że czegoś nie wiemy tylko dlatego, że nie było okazji o tym pomyśleć.



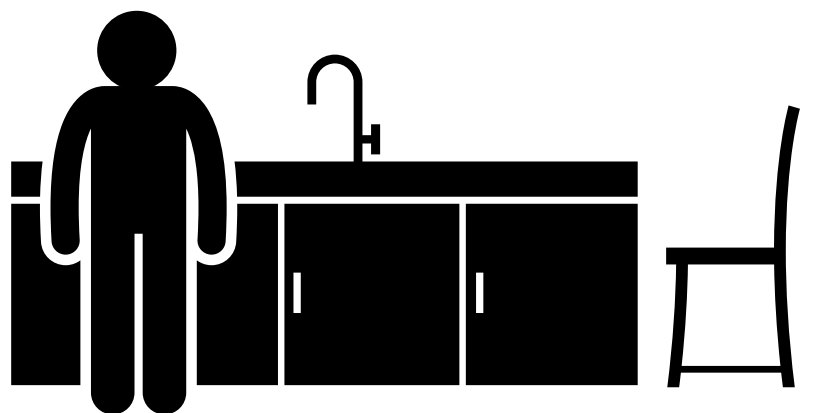
Pomyśl, zastanów się, ciekawe, co myślisz, jaka jest twoja intuicja:

- czy koło samochodu/roweru mogłoby mieć inny kształt, nie być kołem? Czy kwadratowe lub trójkątne koło spełniałoby swoją funkcję?
- czy wyobrażasz sobie odmienne (jakie?) kształty przedmiotów o tradycyjnie utrwalonych formach: piłki, bańki mydlanej, jajka, książki...?
- czy woda może mieć kształt? Czy i jak można nadać jej kształt? (odpowiedź: np. w upalne dni wrzucasz do napoju kostki lodu).
- jaka jest różnica między kształtem, formą a fasonem przedmiotów codziennego użytku? (możesz poszukać połączeń funkcjonalnych z potocznego języka – np. fason sukienki, kształt stołu, forma architektoniczna).
- co jest konturem, a co kształtem? (najprościej – kontur to linia obramująca kształt, ale może nie tylko).
- czy coś niematerialnego może mieć kształt? (tak, choć będzie to przenośnia, np. kształt wypowiedzi)

Pytań jest mnóstwo. Wszędzie, we wszystkim, zawsze znajdziesz coś ciekawego, dziwnego. Masz zadanie i misję: wymyślaj pytania, odkrywaj prawidłowości, szukaj rozwiązań, dociekaj istoty rzeczy.

## Wymiar widzenia

Na rzeczy można patrzeć przestrzennie, trójwymiarowo (długość, wysokość, szerokość lub głębokość) albo płasko, dwuwymiarowo (długość, szerokość). Szafka kuchenna jest prostopadłościanem, ale gdy patrzymy tylko na drzwiczki szafki, powiemy, że są prostokątne albo kwadratowe. Abażur lampy, który jest ściętym ostrosłupem, dwuwymiarowo wygląda jak trapez.



Poszukaj przedmiotów w regularnych kształtach geometrycznych. Czym są w przestrzeni, czym stają się, gdy spojrzymy na nie jak na figury płaskie? Nazwiesz je?

## Prawie robi różnicę

W rzeczywistości nie ma rzeczy, które nie mają grubości. Z matematycznego punktu widzenia nawet 1 milimetr, a nawet nieskończenie mniej jest grubością. Istnieje jednak wiele przedmiotów, które z naszej perspektywy praktycznie mają tylko dwa wymiary (trzeci wymiar, czyli grubość, ze względu na minimalny rozmiar można pominąć w analizie) – np. kartka papieru, dywan, zastłona. Dla nas są płaskie, traktujemy je jak powierzchnie – dwuwymiarowo.



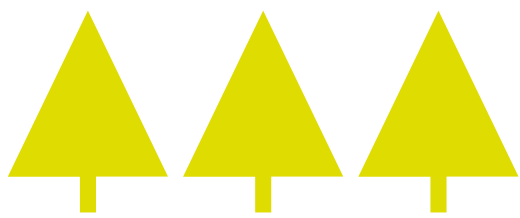


Rozejrzyj się, czy w twoim otoczeniu zauważasz takie (prawie) płaskie rzeczy? Jakiej mają kształt? Z jakimi figurami płaskimi można je porównać? Czym byłyby, gdyby miały konkretną z naszego punktu widzenia grubość?



## Inwentaryzacja

Figury geometryczne to teoria, przedmioty wokół nas – rzeczywistość. Czasami obiekt jest w kształcie czystej formy, ale częściej tylko nam się kojarzy z podstawowymi figurami. Wyszukiwanie cech charakterystycznych prowadzi do rozpoznania i kwalifikacji: fotel jak trapez, żyrandol jak kula, dywan jak kwadrat, korona drzewa jak trójkąt, jajko – owal, liść jak pięciokąt, wąż od prysznicy, karnisz, barierka balkonu jak linia.



Rozejrzyj się. Jakiej kształtów widzisz wokoło siebie? Wszystko jest tematem. Policz, których kształtów jest najwięcej? Których najmniej? Może któryś w ogóle nie ma w twoim otoczeniu?

- Kwadrat
- Prostokąt
- Romb
- Trapez
- Owal
- Trójkąt
- Wielokąt (np. pięciokąt, sześciokąt)
- Koło
- Kula
- Walec
- Graniastosłup
- Ostrosłup
- Prostopadłościan
- Kształt nieregularny

## Przekształcanie fizyczne

Rzeczy materialne mają potencjał przekształceń – wyjściowo są czymś, do czegoś służą, ale niewiele brakuje, by stały się czymś zupełnie innym, zmieniając kształt. Na przykład gumka, tzw. recepturka jest okręgiem – ma swoje zadania (taką gumką kwiaty wiązane są w bukiet, szczypiorek zbierany w pęczek, nakrętka stoika

# ” **Matematyka wyposaża nas w coś jakby nowy zmysł**

**Karol Darwin**

upiększana serwetką w kratkę). Jak ją przetnieć, stanie się potencjalnie bezużytecznym odcinkiem prostym albo krzywą. Sznurkiem też można związać pęczek czegoś albo wiązać snopki, ale ze sznurka można wyczarować dowolny kształt. Z płaskiej kartki można zrobić czapkę, pudełko albo samolot (niby taki na niby, ale może latać). Rulon pozostały po rolce papieru kuchennego ma potencjał nieograniczony – bywa, że startuje w kosmos. Możemy bawić się kształtami? Możemy i bawmy się.

Weź różne proste przedmioty, które możesz zniszczyć bez szkody. Znajdź jak najwięcej zastosowań. Każda technika dobra – zginaj, składaj, wycinaj, klej. Baw się kształtami. Granicą jest tylko twoja wyobraźnia.

- kartki papieru różnych formatów, np. kartka z zeszytu, gazeta, papier pakowy, serwetka,
- waciki kosmetyczne, podkładki pod talerze,
- tutka po papierze toaletowym, ręczniku kuchennym,
- gumki, sznureczki, tasiemki,
- słomki do picia,
- pudełka, kartony po czymkolwiek.

Jaki mają wyjściowy kształt? Czym są oryginalnie? Czy da się je przekształcić? Czy są tylko płaskie, a może też przestrzenne?

## Przekształcanie metafizyczne

Od czego pochodzi słowo „przekształcać”? To zmienianie czegoś, co ma kształt? A że wszystko w naszym otoczeniu ma kształt, możemy bawić się, przekształcając to nie tylko fizycznie, ale i w myślach, tworząc koncepcje, na różne sposoby. Tędy droga do nowatorskich pomysłów, tu tkwi szansa na epokowe odkrycia. Pamiętaj – przekształcać możesz też pomysły. Tak powstawały i powstają wszystkie wynalazki świata.

Wybieraj obiekty i je przekształcaj – w wyobraźni, na papierze, w dowolnej technice:

- zmieniaj ich wielkość – pomniejszaj, powiększaj (wyobraź sobie ruch wykorzystywany do powiększania i pomniejszania obrazów na smartfonach, tabletach), ...
- zmieniaj ich sens – lampie wyrastają uszy, dzbanek zmienia się w żyrafę, kanapa staje się rydwanem, pudło po nowym mikserze przemienia się w raketę, ...

- zwielokrotniaj ich liczbę, wymyślaj układy – np. tapeta w jabłko, więcej drzew w lesie, więcej samochodów na parking, ...
- uruchamiaj je – dywan lata, książki tańczą, stół podskakuje, ...
- wymyślaj nowe funkcje, przeznaczenie – do czego by tu można jeszcze zastosować widelec, jak nadać inne życie torbie na śmieci, jaki potencjał ma rura od odkurzacza, ...
- syntetyzuj – sprowadzaj do najprostszej postaci, symbolu, może w czymś odkryjesz rewolucyjny potencjał uproszczenia?

## Spójrz w lustro

Czy wiesz, że nasze twarze przypominają różne kształty? Jedne kojarzą się z kwadratem, inne z prostokątem lub owalem, jeszcze inne z kołem albo trójkątem czy trapezem.



Spójrz na swoje odbicie w lustrze albo na selfie. Jaki kształt ma twoja twarz? A twarz twoich bliskich, kolegów, sąsiadów, ulubionych aktorów? Może narysujesz autoportret lub życzliwie sportretujesz innych? Z jakich kształtów skorzystasz?

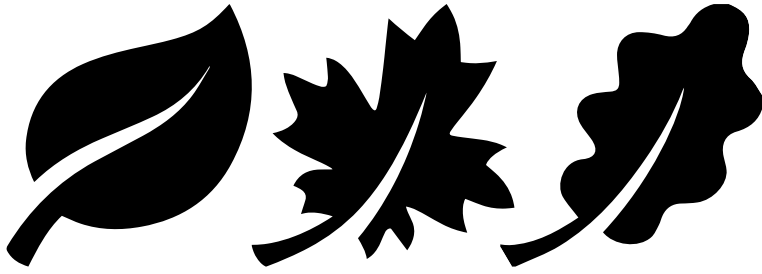
## Obserwacje terenowe

Na świat patrzysz w każdej sekundzie. Zawsze (no może z wyjątkiem pustyni) widzisz wiele różnych elementów. Wszystko jest tematem i jest interesujące ze swej natury, pod warunkiem, że... to zauważasz. Wszystko możesz nazywać, analizować, porównywać. Czy masz w sobie ciekawość – czy zastanawiasz się, co





widzisz? Czy o tym myślisz? Czy się zadziwiasz?



Spójrz na liście różnych gatunków drzew. Z jakimi kształtami ci się kojarzą? Gdy będzie okazja, popatrz na sylwetki drzew, na kwiaty, kamienie, samochody, chmury... Jakie kształty dostrzegasz? Obserwuj architekturę (domy, mosty, wieżowce, ogrodzenia) – z jakimi kojarzą się kształtami? Z jakimi najczęściej?

### Matematyka czy poezja?

Coś przypomina koło. Albo jest prostokątem. To proste. Ale nie wszystko jest jednoznaczne. Gdy mamy do czynienia z kształtami bardziej złożonymi, można odnieść się do poetyckich skojarzeń. Żeby o nich opowiedzieć, opisać je, musimy uruchomić wyobraźnię. Te niejednoznaczne kształty każdy może widzieć inaczej, z czym innym kojarzyć. Włochy na mapie wszystkim przypominają but, truskawkę można porównać do serca, tradycyjne podkoszulki nazywamy T-shirtami (wiesz dlaczego?), ale ta sama chmura jednemu przywiedzie na myśl grzbiet smoka, a innemu torebkę pełną frytek albo lody. I fajnie. Kwestia fantazji i inwencji.

Patrz, nazywaj matematycznie i/lub poetycko, porównuj, ćwicz wyobraźnię. Jesteś o krok od twórczości.

### Rozbiór na czynniki pierwsze

Wszystko da się rozłożyć na czynniki pierwsze. Dzięki temu można dojrzeć w przedmiocie, liczbie to, z czego się składa, co na nią się składa. Rozbijanie na czynniki pierwsze przydaje się w życiu wielokrotnie. Na 100 procent, czyli na pewno.

Wybierz dowolny przedmiot. Może być prosty, tak jak deska do krojenia, butelka, talerz, albo bardziej skomplikowany, np. wyciskarka do cytrusów, wazon, fotel, rower, samochód. Obejrzyj go z każdej strony – z przodu, z tyłu, z boku, z góry i od dołu. Rozbierz wzrokiem na czynniki pierwsze i nazwij wszystkie elementy, które kojarzą ci się ze znanymi kształtami. Coś będzie kwadratem, ale coś może przypominać kwadrat. I to jest OK, upraszczamy (zobacz: wyżej).

Możesz zrobić rodzinny albo towarzyski konkurs: kto wypatrzy więcej kształtów w zadanym przedmiocie. Ciekawe kto wygra.

### Portret pamięciowy

Jak dziecko rysuje sylwetkę człowieka? Z jakich figur składa się ludzka postać? Jak dziecko rysuje psa, samolot, raketę, drzewo? Dziecko rysuje bardzo prosto.

Już nie jesteś małym dzieckiem, ale na chwilę cofnij się do dzieciństwa. Być może masz swoje rysunki sprzed lat. Zobacz, jak wyglądały. Zapomnij, że umiesz już rysować dorosłej i zabaw się w dziecko. Narysuj różne przedmioty, jakby to było po raz pierwszy w twoim życiu. Jak najprościej. Co da się tak narysować? A może wszystko da się uprościć, sprowadzić do prostych form? Z pomocą przychodzą podstawowe kształty.



### A to malarska ciekawostka!

Czy wiesz, że najwspanialszy malarze tworzą tak charakterystyczne dzieła, że ludzie na całym świecie patrzą i już wiedzą, kto to namalował? Nieczęsto to się zdarza, ale jednak. Kwestia talentu. Do tych wyjątkowych należą np.: Pablo Picasso, Leonardo da Vinci, Vincent van Gogh, Mark Rothko, Andy Warhol, Rembrandt van Rijn, Jackson Pollock, Salvador Dali, Claude Monet. Czy używając podstawowych kształtów geometrycznych, można oddać specyfikę ich dzieł? Okazuje się, że można.

Czy wiesz, że powstała geometryczna, graficzna synteza ich twórczości? Charakterystyczne elementy, motywy, kreska zostały sprowadzone do najprostszych kształtów geometrycznych. Czarne tło, biała kreska i wszystko jasne. Poszukaj w internecie grafiki „History of art”. Zobacz, porównaj z oryginałami. Już wiesz, o co chodzi z syntezą graficzną? Może spróbujesz stworzyć własną uproszczoną wizję jakichś dzieł, obiektów?

### Im prościej, tym lepiej?

Uproszczenie to ujęcie czegoś prościej, symbolicznie, bez szczegółów. Ikony, znaki drogowe, rysunki złożone z kształtów geometrycznych, nawet dzieła twórców malarskich – to uproszczenia. Patrzysz i wiesz, co autor miał na myśli. Co więcej, wszyscy ludzie na świecie podobnie czytają ten uproszczony język graficzny.

Pamiętaj, że wyrazić coś prosto wcale nie znaczy łatwiej, czasami jest trudniej. Ćwiczenie czyni mistrza – to banał, ale działa.

Możesz się wprawiać przy każdej okazji. Do dyspozycji masz wszystkie kształty. Są naszym kodem.

### Klucz na drodze

Znaki drogowe i tablice informacyjne mają kształty figur. Wiele elementów graficznych przedstawionych na tablicach to liczby i figury.

Jadąc samochodem, przyglądaj się. Czy odkryjesz reguły rządzące znakami? Zobaczysz znaki trójkątne, kwadratowe, okrągłe, w rozmaitych kolorach. Jaki jest klucz? Przyjrzyj się wszystkim rodzajom znaków, każda grupa to zbiór. Są wśród nich:

” **Wszystko powinno zostać uproszczone tak bardzo, jak to tylko możliwe, ale nie bardziej**

**Albert Einstein**





- Znaki ostrzegawcze
- Znaki zakazu
- Znaki nakazu
- Znaki informacyjne
- Znaki kierunku
- Znaki uzupełniające



Może masz pomysł na nieistniejący znak drogowy? Zaprojektuj.

## □ Eksperymentalne krojenie

Czy nóż nie powinien być traktowany jak bohater niezbędny w poznawaniu istoty kształtów? Dzięki pracy noża – w rzeczywistości, nie tylko w wyobraźni – wiemy, jak wyglądają przekroje figur geometrycznych. Bez żadnych wątpliwości.

Wybierz kilka warzyw, owoców o różnych kształtach. Wszystkie wykorzystasz potem do przyrządzenia posiłku. Weź nóż i działaj (najlepiej pod okiem kogoś dorosłego). Z każdego obiektu, jednym cięciem noża, postaraj się uzyskać jak najwięcej kształtów. Tnij owoce i warzywa w rozmaitych płaszczyznach, pod wieloma kątami.

Następny etap – możesz twórczo nadawać im kształty, np. z plasterka marchewki wyciąć trójkąt, a z arbuza gwiazdę, albo jeszcze fantazyjniej. Ciekawa będzie jarzyna, sałatka, którą potem przygotujesz na obiad.

Sztuka rzeźbienia w owocach i warzywach wywodząca się z Dalekiego Wschodu to carving. Możesz się wyspecjalizować i odnieść sukces, bo w tej dziedzinie są nawet mistrzostwa świata.

## □ Potencjał w wykałaczkach

Weź garść wykałaczek (albo innych patyczków), możesz ułożyć z nich bardzo wiele kształtów, równań, wzorów.



Czyli:

- układaj z wykałaczek różne kształty – regularne i fantazyjne.
- ułóż różne cyfry rzymskie i, nawet jeśli to nie będzie łatwe, układaj i zadawaj zagadki z wykorzystaniem cyfr rzymskich (inspiracje są w internecie).
- ustal, jak długa będzie prosta ze wszystkich wykałaczek? Czy musisz ją ułożyć, żeby zmierzyć, czy dasz sobie radę prościej? (tu przyda się tabliczka mnożenia i linijka).
- pokombinuj w sprawie trójkątów – trójkąt możesz ułożyć z trzech wykałaczek, bo każdy wie, że trójkąt ma trzy boki. To będzie trójkąt równoboczny, ale czy możesz do budowy trójkąta użyć więcej patyczków? Ile różnych trójkątów możesz zbudować z trzech, czterech, pięciu i więcej wykałaczek? A może zbudujesz trójkąt ze wszystkich?
- czy z wykałaczek, jakkolwiek by było, to odcinki proste, da się zbudować koło? Z ilu patyczków najmniej da się zbudować coś, co by choć trochę przypominało koło, choćby to było bardzo umowne koło? Jak będzie wyglądało twoje „koło” ze wszystkich wykałaczek? Czy to będzie już prawdziwe koło, czy nadal wielokąt? Ilość? Stwórz wielokąt największy z możliwych.
- a może coś w trzech wymiarach? Zbuduj, wykrój, ulep, wyrzeźb dowolną bryłę z dowolnego materiału albo stwórz model krawędziowy bryły (potrzebna będzie do tego jakaś masa spajająca, np. plastelina i patyczki).

## □ Studiowanie znaków firmowych samochodów

Interesujesz się samochodami? Tak czy nie, to pewnie kojarzysz i potrafisz rozpoznać większość marek, bo widzisz je wszędzie – na parkingach, stojąc na światłach, w reklamach. Każda marka ma logo, czyli znak firmowy, i nie zawsze jest to słowo, nazwa marki, częściej znak graficzny, kompozycja różnych kształtów, wśród nich podstawowych, takich jak kółka, kąty, wielokąty, romby.

Zbadaj, jak wyglądają, z jakich elementów się składają – jakie kształty dostrzeżesz? Postaraj się przestudiować jak najwięcej samochodowych logotypów. Wypisz/narysuj wszystkie, które dostrzeżesz, i zanalizuj je pod kątem kształtu.

## □ Ocean logotypów

Jak już skończysz analizę znaków firmowych samochodów, możesz rozszerzyć swoje zainteresowanie na firmy, marki – każda ma logo. Otacza nas ocean logotypów. Nie każdy jest godzien uwagi i analizy, ale wiele jest do-

skonałych w swej prostocie, celności, syntezie. Głównym celem logotypu jest charakter i niepowtarzalność – każdy wie, jak wygląda logo napoju gazowanego z czerwoną etykietą, a jak serce Wielkiej Orkiestry Świątecznej Pomocy.

Zbierz przykłady różnych logotypów – produktów spożywczych, chemicznych, ubrań, cokolwiek masz w domu. Zrób wystawę i przyjrzyjcie się im całą rodziną. Oceńcie, każdy sam, a potem wspólnie, które przyciągają uwagę, które macie w pamięci, które przyciągają wasze zainteresowanie. Czy jakiś kształt wygrywa w domowym rankingu?

## □ Warto to mieć

Tangram, czyli zestaw kształtów, z których można zbudować nieskończenie wiele różnych figur, postaci, a nawet cyfr. Tangram to układanka z historią. Ma już ponad 3000 lat, a wymyślili ją Chińczycy. Należą się gratulacje, bo jest to zabawa doskonała dla każdego – prosta, dostępna, rozwija wyobraźnię, kreatywność. Uczy, bawi, nie nudzi.

Możesz kupić gotowy zestaw (poproś na urodziny) albo zrób go samodzielnie. Zrobienie tangramu nie jest trudne. Znajdź wzór w internecie, weź kartkę (lepiej grubszą niż cieńszą, ale każda dobra), odrysuj wszystkie elementy. I wymyślaj własne kompozycje. Baw się, układaj.



Co więcej? Wytnij kilka kompletów, a wtedy:

- ułożysz świetne scenki z wieloma bohaterami,
- będziesz tworzyć parkietaże,
- możesz kreować różne zbiory (np. trójkąty, czworokąty...),
- możesz zrobić konkurs – kto szybciej ułoży rybę albo dom,
- możesz ułożyć obraz (z jednego kompletu też możesz, ale z kilku będzie bogatszy),
- możesz każdemu dać jego zestaw i zobaczyć, że wszyscy szybko się wciągną w zabawę,



# Kuchnia, domowe laboratorium matematyczne

W kuchni w czasie planowania, przygotowywania posiłków nie można uwolnić się od matematyki. Już sam wybór produktów, ułożenie menu tak, by posiłki były zdrowe, zbilansowane (to się da matematycznie policzyć) wymaga świadomego działania. Można o tym nie myśleć i pracować, podejmować decyzje intuicyjnie, ale to nie zmienia faktu. Cokolwiek robimy w kuchni, musimy oszacować – ile czego kupić, ile ugotować, ile dodać, żeby nie było ani za mało, ani za dużo, lepiej, żeby było zdrowo niż niezdrowo. Korzystamy z przepisów, musimy umieć odmierzyć produkty – na sztuki, na wagę, na objętość (szczególnie w cukiernictwie proporcje to podstawa sukcesu!). Przy szykowaniu potraw przydaje się umiejętność przeliczania wagi na objętość i odwrotnie. Niezbędne do tego są sprzęty: waga kuchenna, pojemniki z zaznaczoną objętością różnych produktów, łyżeczki o różnych pojemnościach, podziałki wskazujące ilość wody w garnkach. Efekty gotowania i pieczenia zależą od temperatury obróbki. Gdy gotujemy, pieczemy, smażymy, ważny jest też pomiar czasu – za krótko źle i za długo niedobrze. A zatem bez zegarka, minutnika byłoby ciężko. Kuchnia to codzienny matematyczny poligon obliczeń, szacunków, pomiarów: wagi, objętości, ilości, temperatury, czasu, proporcji i wielu innych sprawności matematycznych – od planowania, do wykrawania. I to jest bardzo ciekawy poligon. Dla każdego chętnego, bez ograniczeń wieku.

## Ile człowiek musi zjeść?

To oczywiste, że musimy jeść. Nasze organizmy potrzebują paliwa jak samochód. Ile paliwa jest potrzebne? To zależy od wieku, aktywności fizycznej, etapu rozwoju – ty rośniesz, więc musisz jeść zdrowo i odpowiednio do wymagań twojego organizmu. Rzadko myślimy o sumie tego, co jemy – w ciągu dnia, tygodnia, miesiąca. Wyobraź sobie taką sytuację – pani polarniczka wybiera się samotnie zdobyć biegun południowy. Przed nią 60 dni wędrówki, temperatura  $-30^{\circ}\text{C}$ , 1200 kilometrów do przebycia, droga cały czas wiedzie pod górę. Musi mieć dokładnie wyliczone i zbilansowane porcje żywności. Na całą podróż. My nie musimy aż tak planować, ale dobrze wiedzieć, ile jedzenia pochłaniamy codziennie.

Zachęć rodzinę do współpracy – wybierzcie jakiś wolny dzień, gdy wszyscy są w domu, i zważcie wszystko, co zjecie. Ciekawe, czy wynik was zaskoczy. Możecie wcześniej zrobić domowe zakłady – niech każdy oszacuje i zapisze swój wynik. Ktoś wygra nagrodę!

## Po pierwsze – planowanie

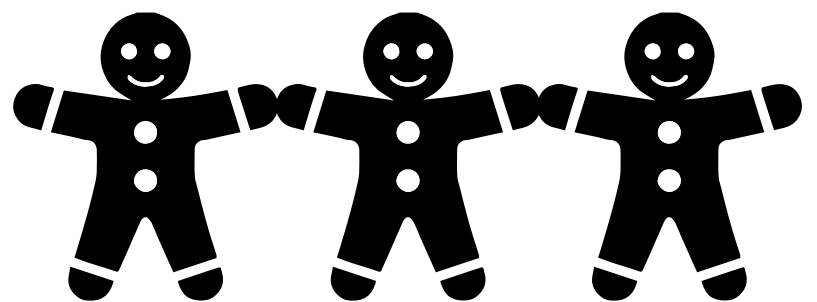
Każdy wie, że nie można marnować jedzenia, czyli niedobrze jest przygotować za dużo, bo nie ma co jeść na siłę, a nie chcemy nic wyrzucić. Z drugiej strony, jedzenia nie powinno być za mało, bo się nie najemy, bo goście nie dostaną swojej porcji. Czyli musimy planować posiłki – żeby było akurat. A nawet jeśli nie musimy, to może być całkiem zajmujące zajęcie.

Zaplanuj, teoretycznie, a może w przyszłości przyda się to doświadczenie. Zapraszasz gości na urodziny, na deser zamierzasz zrobić galaretkę z owocami. Załóżmy, że tym razem będą to pomarańcze. Ilu gości się spodziewasz? Ile owoców musisz kupić? Zastanów się – jaką część owocu w galaretkę możesz zjeść? Czy pół pomarańczy będzie akurat? A może  $\frac{1}{4}$  wystarczy, bo będą przecież inne desery? Prosty rachunek – i już wiesz, ile pomarańczy kupić, obrać i zalać galaretką, żeby na pewno (no z dużym prawdopodobieństwem) dla wszystkich gości starczyło i nic albo niewiele zostało. I tak szacuj przy każdym posiłku. Jest nadzieja: na początku liczysz, potem dochodzisz do wprawy.

## Przeliczanie przepisów

Często inspirujemy się przepisami – z programów kulinarnych, z książek, z internetu, z rodzinnych zasobów. Przepisy są różne. Czasami punktem wyjścia jest ilość produktu – np. pieczeń z kilograma mięsa, naleśniki z pół kilograma mąki, zupa z jednego kalafiora, albo autorzy podają przepis dla konkretnej liczby osób – np. na 4 kotlety, 6 talerzy zupy, na 50 pierniczek. Co zrobić, gdy mamy gości i chcemy nakarmić więcej osób? Trzeba mnożyć. Gdy chcemy mniej, trzeba dzielić. Czy to nie jest najsmaczniejszy sposób ćwiczenia tabliczki mnożenia?

Poćwicz na pierniczkach. Prosty przepis na pyszne pierniczki – z tej ilości składników wyjdzie ok. 50 sztuk (pamiętaj, żeby nie wałkować zbyt cienko, mają mieć min. 4 mm – jak to sprawdzić, zmierzyc?).



Czyli potrzebujesz:

- 200 g mąki pszennej
- 200 g mąki żytniej (najlepiej pełnoziarnistej)
- 1 łyżeczkę proszku do pieczenia (albo sody oczyszczonej)
- 2-3 jajka (zależy od rozmiaru)
- szklankę cukru pudru
- pół kostki masła, roztopionego i lekko przestudzonego
- 4 łyżki płynnego miodu z dobrej pasieki
- 1,5 łyżki przyprawy korzennej do piernika (albo więcej)

Wszystkie składniki zagnieć i wykrawaj pierniczki dowolnych kształtów. Połóż na blachę na papierze do pieczenia i wstaw do pieca nagrzanego do  $180^{\circ}\text{C}$ . Po 7–8 minutach sprawdź, czy się upiekły. W ocenie pomoże patyczek – np. wykałaczka, wbita w ciasto powinna być sucha. Ciasto jeszcze się klei? Poczekać minutę, dwie. Nie odchodź daleko – kontroluj sytuację.





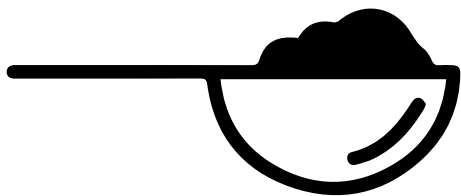
A teraz dwa ćwiczenia:

- Nie znasz tego przepisu, nie wiesz, czy pier- niczki wyjdą smaczne. Chcesz spróbować? Zrób z połowy składników.
- Okażą się pyszne, chcesz zrobić o połowę wię- cej. Ile czego potrzebujesz?

## □ Przeliczanie testowe



Jeszcze raz spójrz na przepis i zwróć uwagę na różne miary – np. podana jest waga (200 g) mąki, objętość (łyżka) miodu, (szklanka) cukru, liczba (2-3) sztuki jaj. Ilość każdego produktu można różnie opisać, zamiennie podając wagę, objętość, w miarach nie zawsze z systemu me- trycznego – bo np. czym jest łyżeczka, szczypta albo garść? Wytrawne kucharki i kucharze z du- żym doświadczeniem gotują na oko, bo po ła- tach prób i błędów mają wyczucie. Każdy wie, ile to 2 jajka, trudno popełnić błąd, odmierzając łyżkę miodu, ale mało kto wie z głowy, ile to jest 200 g mąki. Dlatego warto wiedzieć, jak sobie poradzić z przeliczaniem na wygodniejszą do oszacowania miarę.



Poćwicz, a nabierzesz wprawy, wyczujesz wagę, objętość. Do testowania przydadzą się, a wła- ściwie konieczne są: waga kuchenna, klasyczna szklanka o poj. 250 ml wody, łyżka do zupy, ły- żeczka do herbaty. Tematów do przeliczeń jest

mnóstwo – właściwie nieskończoność. Przykła- dowo (kuchnia może trochę ucierpieć w czasie eksperymentów):

- ile waży szklanka mąki? Ile szklanek mąki można nasypać z 1 kilograma? To samo dotyczy wszystkich innych produktów sypkich.
- torebka przypraw ma podaną wagę – 50 g. Ile to łyżek? Ile łyżeczek?
- ile waży jajko? Ale jakie jajko? Małe, duże, wielkie? No właśnie, dlatego szczególnie w starych przepisach i w przepisach cukier- niczych ilość jaj jest podawana na wagę.
- ile waży garść płatków owsianych? Ile czu- batych łyżek płatków daje 50 g?
- czy pół litra mleka waży tyle, ile pół litra wody? Czy to samo dotyczy porównania szklanki mleka i wody, litra mleka i wody? Co jest cięższe?
- ile waży łyżka masła?

## □ Ile mam tego zjeść?

Przeliczanie testowe daje wyobrażenie, ile co waży, co ma jaką objętość. Nie zawsze cho- dzi o aptekarską dokładność, ale o wycucie. A to przyda się w codziennych szacunkach, decyzjach, wyobrażeniach o porcjach jedzenia. W różnych źródłach można znaleźć przykła- dowo zbilansowane jadłospisy. Poszukaj, jak wy- gląda taki przykładowy dla siebie. Gdy trafisz na jadłospis przyjazny – np. kromka chleba, garść płatków, kotlet – to nie będzie problemu, gdy na precyzyjne instrukcje – 70 g chleba, 50 g płatków śniadaniowych, 100 g mięsa – przeliczanie przyda się jak znalazł.

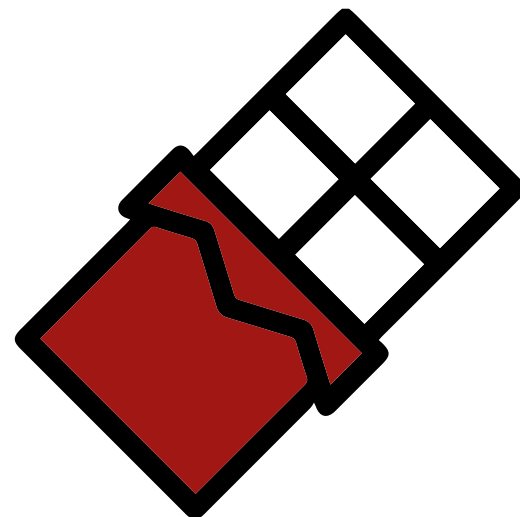
Możesz zważyć to, co jesz na co dzień, i spraw- dzić, jak to się ma do wzoru diety. Wzory, wia- domo, trudno doścignąć, ale mają sens.

## □ Co tam jest?

Każda rzecz, którą jemy, z czegoś się składa. Albo jest jednorodna – to w najczystszej po- staci np. świeże warzywa i owoce, albo prze- tworzona, mniej lub bardziej – to wędliny, słodycze, konserwy. Nie zawsze jemy to, co myślimy, że jemy. Czy procenty mają w kuch- ni znaczenie?

A jak myślisz? W jakich produktach są ważne (czyli na co warto zwracać uwagę przy zakupie):

- nabiał (czy przygotujesz bitą śmietanę ze śmietanki 12%? Spróbuj. Raczej się nie uda. W sklepie znajdziesz śmietanę w kil- ku rodzajach: 12%, 18%, 30% i 42%. Każda służy do czegoś innego. Trzeba wiedzieć, co kupić, żeby nie było niespodzianek. Poproś kiedyś rodziców o zakup wszyst- kich czterech – na pewno przydadzą się w kuchni. Popróbujesz, zrozumiesz, jak smakuje „zawartość tłuszczu”. Pamiętaj, że prawdziwe masło ma minimum 82%, mniejsza zawartość tłuszczu daje sygnał – to nie jest masło. Z kolei masło klarowa- ne, specjalnie przeznaczone do smażenia, musi mieć ponad 99% tłuszczu, nawet 99,8%).
- czekolada – co kto lubi, im większy pro- cent kakao – 70%, 85%, nawet 90% – tym bardziej gorzki smak, ale czeko- lada najprawdziwsza. Czasami czeko- lada wcale nie jest czekoladą, a wyrobem czekoladopodobnym (zapytaj rodziców, dziadków).



- kiełbasa (parówki) – pewnie można by zorganizować konkurs na najniższą za- wartość mięsa w kiełbasie ujawnioną na etykiecie. Niestety są rekordziści w pro- dukcji udawanego mięsa. Jeśli nie jesteś wegetarianką/wegetarianinem, czyli jesz mięso, wędliny, pamiętaj – im wyższa za- wartość mięsa (byle nie MOM, czyli mię- so oddzielane mechanicznie), tym lepiej. Wiesz, co jesz, a tym bardziej wiesz, czego nie jesz.

” **Matematyka jest uniwersalna: nie ma rzeczy, która byłaby jej obca**

Hugo Steinhaus





- koncentrat pomidorowy
- mleko – to rodzice decydują, jak tłuste masz pić. Każde jest dobre, różnią się smakiem i kalorycznością.
- sok owocowy – tu bez wątpliwości – im większy procent, tym lepiej. Najlepsze są soki wyciskane w domu – masz kontrolę, na 100% mają 100% soku w soku.
- dżem/konfitura – wyobraź sobie letnią, domową fabrykę konfitur. Wielka kadź, pełna owoców, trochę cukru – najlepiej zdrowszego niż rafinowany. To konfitury marzeń.

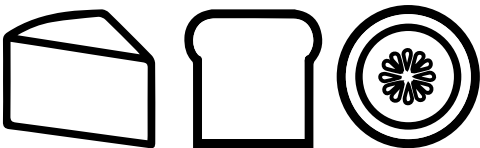
Zgłoś się, zostaniesz RODZINNYM EKSPERTEM lub RODZINNĄ EKSPERTKĄ ds. zdrowej żywności. Dorośli czasem mają kłopot z przeczytaniem, bo zwykle informacje na etykietach podane są bardzo małym drukiem. Czytaj etykiety, sprawdzaj skład. Albo zdrowie, albo tablica Mendelejewa (Co to? Dowiesz się na zajęciach z chemii, na razie wystarczy, że zdasz sobie sprawę z obecności niezdrowych zamienników, chemicznych dodatków, wypełniaczy, polepszaczy, konserwantów w wielu produktach).

## □ Geometryczny poczęstunek

Posiłki to bardzo wdzięczny temat do matematycznych inspiracji. Na przykład temat przewodni: GEOMETRIA. Na pewno wymyślisz coś, co wszystkim będzie smakowało.

Przejmij inicjatywę, zaskocz rodzinę i przygotuj geometryczny posiłek, np. kolację albo niedzielne śniadanie. Jak to możliwe? Wyobraź sobie różne kształty – płaskie i przestrzenne – na półmisku.

Poniżej inspiracje, choć twoja wyobraźnia sięga dużo dalej (wykorzystaj naturalne kształty albo wytnij cokolwiek w taki kształt):



- trójkąty – ser topiony w trójkącikach (banan), plasterki wędliny, sera pokrojone na ćwiartki albo jeszcze mniejsze trójkąty (wycinki koła), złożone naleśniki, tosty trójkątne, trójkąty z plasterków ogórka, pomidora...
- kółka – jajko sadzone albo w dowolnej postaci (podwójna atrakcja, bo od razu masz dwa kółka), plasterki pomidora albo ogórka, plasterki kiełbasy, parówek, rzodkiewek, banana itp.,
- ćwiartki – papryki, jajka, ogórka – wszystko, co potniesz na cztery w miarę równe części będzie ćwiartką,
- kwadraty, prostokąty – pieczywo tostowe, plasterki kwadratowego sera,
- owal – plasterki parówek pokrojone ukośnie, jajka na twardo, plasterki owoców i warzyw cięte pod kątem,

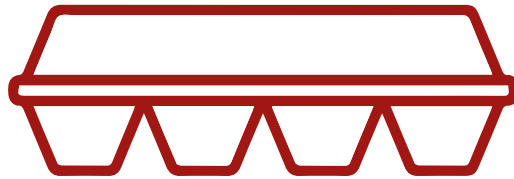
- kulki – mozzarella, rzodkiewki, wycięte z miąższu melona, arbuza, oliwki, uformowane tyżką kulki z białego sera,
- stożki z twarogu, papryczki,
- linie ze szczypiorku i innych łydźek, np. świetny w tej roli jest koper,
- sześciany – np. kostki masła, kostki sera, tak zwane kiedyś koreczki – kostka żółtego sera plus dodatki wbite na wykałaczkę.

Ze wszystkiego da się wyczarować i nazwać kształt, naturalny lub nadany. Czaruj.

## □ Na ile starczy? – różne warianty

Pytanie: na ile dni starczy pudełko jajek? To zależy. Na tak postawione pytanie nie ma jednoznacznej, jednej odpowiedzi. Wariantów jest wiele.

Pytaj, zastanawiaj się, kalkuluj na każdy temat związany z zaopatrzeniem rodzinnej lodówki, przygotowaniem posiłków. A pomyśl o planowaniu zakupów w szkolnej stołówce, w restauracji. To dopiero matematyczne wyzwania.



Wracając do planowania rodzinnego zapotrzebowania na jajka: musisz zadać kilka pytań, przeprowadzić minisledztwo, by udzielić odpowiedzi. A więc na przykład:

- Ile jajek jest w pudełku?
- Czy jajka będą wykorzystane np. do zrobienia ciasta, czy też będą jedzone jako posiłek?
- Ile osób będzie jadło jajka?
- Czy jajka jedzone będą codziennie?
- Po ile jajek zje każdy chętny na jeden posiłek?

Zabawa w obliczanie to dzielenie i mnożenie w klasycznej postaci. Dopiero konkretnie zakładając, np. że w pudełku jest 10 jajek, dwóch domowników je jedno jajko dziennie, a dwóch po dwa jajka, możesz ustalić, na ile dni starczy jajek. Na ile? Czy na pełne dni, czy też na któryś kolejny zabraknie? Ile pudełek jajek trzeba mieć w zapasie, żeby zakupy robić raz w tygodniu? To tylko przykład. Takich pytań, o różne produkty, możesz stawiać wiele, nie tylko w sprawie jajek.

## □ Łatwiej dodać czy odjąć?

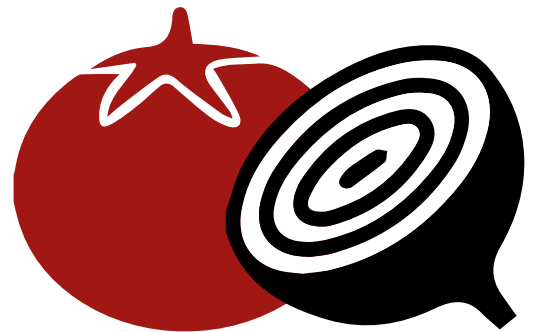
Gdy działamy na liczbach, można dodawać, odejmować w nieskończoność. A jak jest w kuchni? Już nie tak prosto. Nikt nie lubi przesolonej zupy, gdy dodamy za dużo mąki, ciasto będzie za twarde, dosypanie zbyt dużej ilości

pieprzu czy innych przypraw też nie wpłynie dobrze na smak potrawy. Gdy mamy czegoś za mało, prawie zawsze można dodać.

Zwracaj uwagę na ilość dodawanych produktów. Gdyby ktoś przypadkiem przesolił zupę, podpowiedz, że dodanie surowych ziemniaków może ją uratować.

## □ Ile składników?

Jesz pomidora. To jeden składnik. Jesz pomidora z cebulą – dwa składniki na talerzu. Możesz zrobić sałatkę – co dodasz? Co chcesz, może to być ogórek małosolny, papryka, kapary, szczypiorek, kalafor, botwina... Nie za dużo? Czy to ma sens? No właśnie. Decyzja należy do ciebie, ale w jedzeniu jak w życiu – co za dużo, to niezdrowo. Czasami może nawet zdrowo, ale nie- zbyt smacznie.



Dla orientacji licz, ile składników jest w każdej potrawie.

## □ Proste menu – 1,2,3. I już.

Wiele potraw ma 3 główne składniki. Są restauracje, gdzie 3 składniki są kluczem do opisu potraw w menu. Trzy produkty i już jest pyszne danie. Na przykład:

- przystawka – ser kozi, gruszka, orzechy;
- pasta – tagliatelle, łosoś, gorgonzola;
- pizza – pomidory, rukola, mozzarella;
- zupa – pomidor, balsamico, pestki słonecznika;
- drugie danie jarskie – dorsz, jajko w koszulce, szpinak;
- drugie danie mięsne – mielony, mizeria, młode ziemniaki;
- deser – beza, truskawki, mięta.

I wszystko jasne.



Układaj menu do rodzinnych posiłków. Może nie na co dzień, ale w weekend? Licz składniki. Możesz wyspecjalizować się w poetyckim ujęciu (ale nie przesadz).

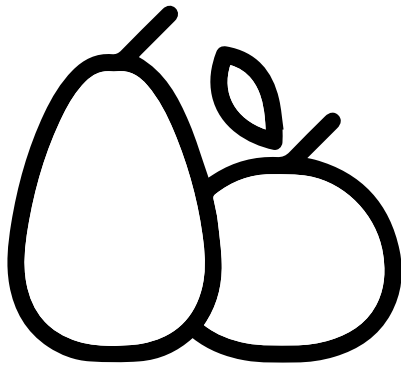
## □ Różne formy z jednego

Z jednego owocu lub warzywa możesz wyczarować przeróżne kształty. Jeszcze ciekawiej, bo każdy owoc, warzywo ma niepowtarzalny





kształt, a to daje ogromne możliwości twórcze i badawcze. Kto zechce, może się bawić w ułamki, nazywać powstałe kształty. Jeśli choć raz brałaś/brateś udział w przygotowywaniu posiłków (pewnie tak?), to wiesz z grubsza, o co chodzi. Krojenie to geometria w praktyce. Trzeba wiedzieć jak kroić, by uzyskać to, co się chce. Można kroić byle jak – np. ziemniaki do gotowania – albo z jakimś pomysłem. Załóżmy, że masz pokroić cukinię. Przekroisz ją raz wzdłuż – masz dwie połówki, każdą dalej na pół – masz ćwiartki. Kroisz dalej w tym samym kierunku – dostaniesz długie ósemki. Możesz ją pokroić na plasterki, na półplasterki, na ćwiartki plasterków. Plasterki mogą wyglądać jak kółka (gdy kroisz prostopadle do osi) albo owale (gdy poprowadzisz nóż ukośnie, czyli pod kątem do osi). Gdy ułożysz plasterki w słupku (jeden na drugim) i przetniesz stosik w kilku miejscach prostopadle do deski, przygotujesz słupki. Pokroisz słupki, też prostopadle do deski w kilku miejscach i masz kostkę.



Baw się produktywnie owocami, warzywami – zostaniesz podkuchenną/podkuchennym i cała rodzina ucieszy się z efektów twojej pracy w postaci półproduktów do gotowania, pieczenia. Możesz się wyspecjalizować i zostaniesz mistrzynią/mistrzem zdrowych surówek i sałatek.

## □ Warzywne hobby

Czy wiesz, że są ludzie, którzy specjalizują się w rzeźbach z warzyw? Taka konkurencja, bo to jest konkurencja, organizowane są nawet mistrzostwa, nazywa się carving.

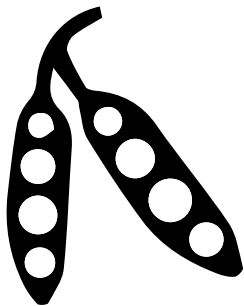
Zobacz, jak wyglądają dzieła mistrzów – niektóre są niewiarygodne. Do rzeźbienia w warzywach i owocach jest konieczna wyobraźnia przestrzenna. Przymierz się, może cię wciągnie. Warto spróbować, bo nawet jeśli nie uwiedzie cię artystyczny wymiar rzeźb, to jest to dobre ćwiczenie z geometrią w tle.

## □ Mrożonki

Po pierwsze, są bardzo zdrowe, bo proces szybkiego i głębokiego zamrożenia pozwala zachować wartości odżywcze produktów. Po drugie, są przykładem profesjonalnego rozdrobnienia warzyw na różne formy geometryczne.

Jedz mrożonki i przyglądaj się, w jakich są kształtach.

- groszek, kukurydza – ziarnka (kulki)
- warzywa jako włoszczyzna – paski
- por – kółka
- marchewka – kostki
- szpinak – całe liście lub miazga
- kalafior, brokuły – różyczki
- buraki – kostka lub miazga
- fasola – ziarna



Nie uważasz, że warzywa, nawet w formie mrożonki, są bardzo malownicze?

## □ Ciekawa analiza

Bez wody nie ma życia. To fakt bezsprzeczny. Wszyscy pijemy wodę, jedni z kranu, inni mineralną ze sklepu. Na skład kranówki nie mamy wpływu, ale na wybór wody kupowanej w butelkach, z określonymi składnikami,

już tak. W sprzedaży jest jej do wyboru, do koloru (choć woda koloru nie ma :). Każdą butelkowaną wodą mineralną da się ugasić pragnienie, ale każda, w zależności od źródła, z którego jest czerpana, ma odmienny skład. W wodach mineralnych, pozyskiwanych z różnych źródeł, jest inny skład anionów i kationów różnych pierwiastków (będziesz się o tym uczyć na chemii), ale już teraz możesz się zainteresować zawartością wapnia, pierwiastka ważnego dla budowy twoich kości. Przecież rośniesz!

Obejrzyj w sklepie etykiety ze składem chemicznym kilku różnych wód mineralnych. Zrób analizę zawartości wapnia (warto, bo może ona wynosić od ok. 20 mg/l do ponad 300 mg/l) i wybierzcie z rodzicami najlepszą wodę dla rodziny.

## □ Wszystkie figury serów

Sery są świetnym poligonem do obserwacji kształtów, są setki rodzajów, gatunków – sery świata występują we wszystkich możliwych formach. Wierzysz? Nie wierzysz? Sprawdź. Są sery trójkątne i trójkątne. Koła wielkie i niewielkie albo kulki. Prostopadłościanny, walce, ostrostupy. Są wrzeciono, nitki i torusy (zobacz, jak wygląda taka ciekawa, nieoczywista bryła). Chyba nie ma regularnej figury geometrycznej, która nie miałaby reprezentacji wśród serów.



Jak będziesz na rodzinnych zakupach w supermarkecie, skorzystaj z okazji, podejdz do stoiska z serami i popatrz. Poobserwuj. Wybierz ser o jakimś ciekawym kształcie. Może rodzice zgodzą się kupić? Spróbujecie, poznacie nowy smak. Ciekawe, czy pasuje do kształtu?

## □ Przetwory

W lecie i jesienią mamy ogromne bogactwo owoców i warzyw. Warto je przetworzyć, by cieszyć się ich smakiem i korzystać z właściwości późną jesienią, zimą, wczesną wiosną. Przetwory robi się według przepisu – dobrze jest wiedzieć, ile dodać cukru do powideł, jak przyrządzić zalewę octową do pikli, ile soli potrzeba do kiszenia.



Weź aktywny udział w domowym przetwórstwie. Zobaczysz, że co chwila trzeba będzie podejmować decyzje, ważyć, odmierzać, wyważać proporcje. Gdy chcesz wejść na wyższy poziom wtajemniczenia, spisz receptury – to wcale nie jest takie proste! Może za rok powtórzysz samodzielnie? Lub zmodyfikujesz przepisy?

## □ Piramida

Naukowcy są zgodni – to, co jemy, ma znaczenie. Wszyscy, a dzieci szczególnie, powinniśmy jeść zdrowo. Zdrowo, czyli jak? Codziennie mamy jeść pięć porcji owoców i warzyw – tak wynika z ogólnościatowych badań i zaleceń.







# ” *Zawsze jest sposób, żeby zrobić coś lepiej. Znajdź go*

Thomas Edison

Zobacz, jak wygląda piramida żywieniowa. Przy okazji docenij metodę prezentacji hierarchii w postaci piramidy. Wystarczy spojrzeć i wiadomo – na dole znajduje się to, czego potrzebujemy najwięcej, na szczycie produkty, które powinniśmy ograniczać w diecie (np. słodkie można jeść, ale nie zamiast posiłków, raczej przy wyjątkowych okazjach). Piramida przydaje się też w innych zastosowaniach. Najbardziej znana piramida to „Hierarchia potrzeb” Abrahama Masłowa (XX wiek). Kiedyś się z nią na pewno zapoznasz.

## □ Misja owocowo-warzywna

Mamy codziennie – wszyscy, bez wyjątku, jeść owoce i warzywa. Żeby zjeść, trzeba mieć. A to kuchenny raj dla matematyki, matematycznego planowania.

Zgłoś się na ochotnika i przejmij odpowiedzialność za zaopatrzenie rodziny w owoce oraz warzywa. Czeką cię poważna misja. Możesz codziennie przygotować owocowo-warzywny menu i plan zakupów. Choć wiele produktów kupuje się na zapas, to warzywa i owoce lepiej, żeby były świeże. Stwórz arkusz i prowadź domową tabelkę posiłków, zakupów. I pilnuj, żeby rodzice, dziadkowie nie migali się od jedzenia zdrowo.

Jak zwykle trzeba zacząć od ustaleń, założeń i tabliczki mnożenia:

- ile osób mieszka pod jednym dachem i ile porcji warzyw lub owoców jedzą w domu albo z produktów przygotowywanych w domu (bo wszyscy mogą jeść obiad i podwieczorek poza domem).

- jeżeli wiadomo, że jedna porcja owoców lub warzyw to 150 g, czyli 15 dkg, czyli ok. 1/6 kilograma (czyli odwrotnie – jeden kilogram to ok. 6 porcji), to ile kilogramów owoców i warzyw potrzebujecie na jeden dzień?

Uwaga: przy planowaniu posiłków musisz pamiętać o poprawce na wagę netto–brutto, gdzie brutto to waga owoców i warzyw ze skórką, ogryzkiem, gałązkami, ogonkami, a netto to waga samego owocu lub warzywa. Warto też wziąć pod uwagę, co kto lubi. To dodatkowa komplikacja, ale lepiej,

żeby każdy jadł ze smakiem i przyjemnością. Sprawa nieco zagmatwana, jednak do opanowania.

## □ Energia z kalorii (a właściwie kilokalorii)

Na pewno obito ci się o uszy: to ma dużo kalorii, coś ma za dużo kalorii, coś o pustych kaloriach, o spalaniu kalorii. Kalorie to w skrócie informacja o wartości energetycznej produktów. Naukowcy, dietetycy zbadali, ile kalorii potrzebujemy do życia, w zależności od wieku, płci, aktywno-

ści fizycznej. Zbadali też, ile kalorii mają wszystkie produkty spożywcze, a nawet dania. W internecie i innych źródłach dostępne są tabele kalorii, kalkulatory kalorii. Prawie wszystko, co jemy i pijemy, ma kalorie – wyjątkiem jest woda, czarna kawa, herbata. Kalorie mają i produkty zdrowe, prosto z krzaka, np. truskawki, i niezdrowe, np. przetworzone wafelki z kremem czekoladowym i orzeszkami. Tyle, że jedne kalorie drugim nie są równe – ani ilością, ani jakością. Liczenie kalorii dla niektórych to podstawa diety, inni je lekceważą. Każdy wybiera swoją ścieżkę, ważne, żeby wiedzieć, że są i mieć pojęcie, które produkty mają dobre kalorie, a które złe (zwane pustymi) i ile.



Zwróć uwagę na dane o kaloriach – oznaczenie: kcal – podane na opakowaniach. Szybko zorientujesz się, jakie produkty mają więcej, jakie mniej kalorii. Łatwo porównać, bo liczba kalorii podawana jest dla 100 g produktu, czasami również w przeliczeniu na porcję.

## □ E ileś

Kiedyś jedzenie było naturalne, dziś jest wzbogacone o E ileś. Czy to nie paradoks? O przemysłowym przetwarzaniu często mówi się jak o wzbogacaniu. W co? W polepszacze, spulchniacze, barwniki, przeciwutleniacze, stabilizatory, zagęszczacze, konserwanty, wzmacniacze smaku i zapachu... – każda „wzbogacająca” substancja kryje się za kryptonimem zaczynającym się na literę E – np. E102, E249, E900 itd. Wszystkie są do-





puszczone do użytku, pytanie, czy niezbędne do życia, czy zdrowe. Na szczęście wybór należy do każdej rodziny – można załadować koszyk przetworzonym jedzeniem, można pójść na targ i kupić, co się da, od rolnika.

Zrób przegląd szafki z produktami – popatrz na skład, oceń, czy dużo tych dodatków, czy mało. Chcesz zrobić krok do przodu – poczytaj co to, po co dodane, jakie mogą być skutki uboczne. Może rodzinie nastawicie się na jedzenie z ograniczoną ilością dodatków E ileś?

### Mistrz zdrowego kombinowania

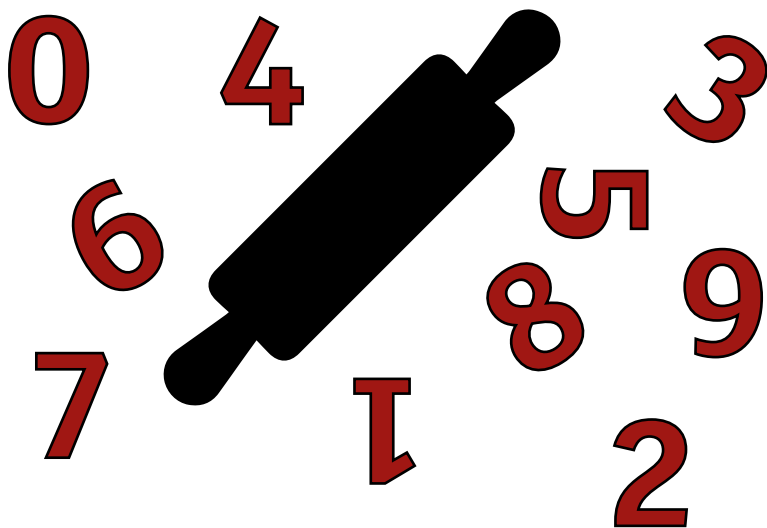
„Przy gotowaniu trzeba dobrze kombinować” – mówi Jamie Oliver, mistrz prostego, zdrowego gotowania, robiąc pyszny sos z chudego jogurtu (0% tłuszczu) zamiast majonezu. I ma rację. Wybierając produkty, sprawdza, który ma ile kalorii.

Idź w ślady mistrza.



### Cyferki z ciasta

Znasz gotowy makaron do zupy w kształcie cyferek? Lubisz? Podobno dzieci to lubią, bo coś się dzieje w rosole – na łyżkę trafiają cyferki i można je na przykład pododawać w myśli.



Spróbuj i ty. Cyferki możesz też zrobić samodzielnie np. z kruchego albo piernikowego ciasta. Jak? Znajdź przepis, zgromadź składniki, wyrób ciasto, ugnieć kulę, rozwałkuj (ciekawe, na jaki kształt uda się rozwałkować ciasto?) i wykrawaj cyferki. Wszystkie po kolei albo ulubione. Potem wstaw je do piekarnika nagrzanego do określonej temperatury na określony czas. Smacznego.

### Mroźne kształty

Kiedyś, w czasach gdy twoi dziadkowie byli dziećmi, najpopularniejsze lody, kręczone przez rzemieślników, zamawiało się na kulki. Potem pojawiły się lody włoskie z automatu – wyglądały jak pofalowane stożki. Były jeszcze lody na patyku, pakowane w kostki i w kubeczkach – te sprzedawali lodziarze. I tyle. Dzisiaj oferta jest bogatsza, więc można zadać pytanie: jakich kształtów lodów nie ma?

Czy należysz do ogromnego zbioru ludzi przepadających za lodami? Jeśli tak, to na pewno wiesz, jakie są w ofercie (co sezon mamy do wyboru coś nowego) i bez wątplenia masz nie tylko ulubione smaki (wybór smaku nie podlega prawom matematyki ;), ale i fasony, formy, kształty.

Zrób przegląd – jakie lody lubisz? Jaki mają kształt? W czym są podane (wafelek, pudełko) i jaki to coś ma kształt? Czy wolisz jeść lody w lodziarni, czy też w domu dzielone z większego opakowania? Przyjrzyj się następnym razem, na ile porcji wystarczy pudełko lodów (pamiętaj, że odpowiedź na to pytanie zależy od zmiennych – jakie pudełko, jaka porcja).

### Operacja: ostre ćwiczenie!

Nigdy nie jest za wcześnie na naukę skutecznych i bezpiecznych technik. A krojenie nożem to sztuka i podstawa – potwierdzi to każdy sprawny kucharz! Pierwszy raz nie będzie łatwo. Ale dojdiesz do wprawy i nauczysz się kroić na wiele plasterków. Popatrz, jak kroją mistrzowie. To technika, która przydaje się w kuchni.

Na ile najwięcej (w miarę równych) plasterków uda ci się pokroić banana? A parówkę?

Założ się. Oceń na oko. Ile części zakładasz? Niech dorośli też oszacują twój sukces.



Spróbuj pokroić coś długiego na jak najwięcej części. Koniecznie pod opieką kogoś dorosłego i pamiętaj o technice krojenia – zawsze chowaj zgięte końce palców tak, by nóż w czasie krojenia ocierał się o kłykcie (rodzice pokażą, co to jest).

Przy okazji poćwiczysz warianty krojenia, bo są różne taktyki. Albo kroisz na pół, czyli na dwie części – żaden problem. Każdą część znów na pół – też proste. No to może znowu każdą część na pół? A możesz inaczej – od początku do końca. Może któreś plasterki jeszcze dadzą się pokroić na mniejsze?

### Różne drogi

Myślenie matematyczne polega na znajdowaniu najprostszyc, logicznych rozwiązań, dostosowanych do sytuacji i możliwych do zastosowania. Na co dzień. Każdy pomysł jest dobry, ale niektóre są lepsze. Wyobraź sobie, że masz tylko jeden, całkiem duży owoc i czterech chętnych. Już wiesz, że każdy powinien dostać  $\frac{1}{4}$  owocu (inaczej mówiąc – ćwiartkę). Jak podzielić go sprawiedliwie? Jak pokroić? Odpowiedź sama się nasunie, ale najpierw pytanie – jaki owoc?

Wyobraź sobie albo pokrój, podziel naprawdę: jabłko, banana, arbuza, pomarańczę, ananasa, brzoskwinie, winogrona (kiść). W sumie to całkiem proste, za każdym razem jest kilka opcji, ale czy zawsze jest jedna metoda najlepsza? Czy będzie sprawiedliwa? Co ty na to?





# Linia, czyli jak po sznurku, ale skąd i dokąd

Linia, niby prosta, ale to całkiem skomplikowana sprawa. Każdy, już od dziecka, ma kontakt z liniami – widzi je wszędzie, nawet jeśli jeszcze nie rozpoznaje, które są proste, łamane, krzywe, spiralne, otwarte i zamknięte, cienkie i grube, ciągłe i przerywane. Definicję linii podpowiada nam intuicja – linia to linia, rozumie się samo przez się. W codziennym języku linia ma wiele znaczeń – więcej potocznych określeń, przenośni niż formalnie związanych z pojęciem matematycznym, co nie upraszcza relacji między linią w matematyce a w rzeczywistości. Nie trzeba znać matematycznych teorii, by wiedzieć, że linia służy do rysowania konturów, bo bez niej nie ma rysunku (chyba że środkiem ekspresji będą punkty albo plamy). Każda litera pisana jest linią odpowiedniego kształtu. Szereg zapisanych słów to też linia, czyli wiersz tekstu. Piłka przekracza linię pola karnego, autobusy jeżdżą zgodnie z rozkładem danej linii, samolot jest na linii podejścia, krawiec czy stolarz kraje materiał według linii, zgodnie z projektem. Mówimy mniej lub bardziej abstrakcyjnie o linii produkcyjnej i linii produktów, o linii telefonicznej, elektrycznej, linii granicznej. Poetycko wspominamy o rozciągającej się linii horyzontu. Może być też linia postępowania – słuszna lub nie, linia obrony, linia natarcia. Równoleżniki i południki na globusie w twoim pokoju to nic innego jak umowne linie opasujące naszą Ziemię, na każdej drodze, autostradzie ruch pojazdów organizują linie. Przykłady można mnożyć w nieskończoność. Co łączy wszystkie znaczenia? Ciągłość? Wytoczony kierunek? Następstwo elementów? Oto jest pytanie.

” *Matematyka może zniekształcać myśli, ale nigdy prostować*

William Rowan Hamilton

## □ Wyobraź sobie

Linia prosta w rozumieniu matematycznym istnieje jako pojęcie. Nie ma sposobu, by ją narysować, bo jest obiektem nieskończonym, więc musimy sobie ją wyobrazić. Jest tylko (albo aż) modelem doskonałej formy. Historyczna definicja linii prostej zakłada, że rozciąga się ona niezakrzywiona, w nieskończoność z obu stron i że nie ma grubości. Taka prosta to w realnym, codziennym życiu abstrakcja.

Zamknij oczy i spróbuj sobie wyobrazić linię prostą.

## □ Dowód z natury

Czy wiesz, że przez każde dwa punkty można poprowadzić jedną i tylko jedną linię prostą? To pewnik, inaczej aksjomat, czyli twierdzenie, które bez dowodu uznajemy za prawdziwe.

Wybierz jakieś dowolne pary punktów (to będą miejsca, ale symbolicznie nazywamy je punktami) i sprawdź, czy to prawda. Wybieraj różne punkty, położone blisko siebie oraz odległe, i łącz je – za pomocą sznurka lub w wyobraźni. Linia łącząca punkt A z punktem B nazywa się odcinkiem.



Przykłady dla ożywienia wyobraźni (jak chcesz, oszacuj odległości tych linii), w pionie i w poziomie:

- lodówka i kuchenka, kuchenka i zlew, lodówka i zlew,
- balkon i parking pod domem,
- biurko w twoim pokoju i stół w kuchni,
- twój dom i główny plac w twojej miejscowości (zajrzyj do planu),
- twój dom i centrum miasta/miejsca na świecie, do którego chcesz pojechać,
- najwyżej i najniżej położone miejsca na Ziemi,

- twój fotel i wybrana gwiazda na niebie, Czy takie linie dałyby się poprowadzić fizycznie z pomocą np. sznurka? Czy na trasie są przeszkody? Pomyśl, jak można byłoby je obejść, objechać. Co wtedy dzieje się z twoją linią?

## □ Twoja autorska definicja

Według starożytnych linia była „granicą powierzchni” albo „długością niemającą szerokości”. Milion wariantów i możliwości.

Zaproponuj swoją definicję.

## □ Linie nie tylko proste

Są linie proste, te wiadomo – muszą być proste. Są też linie łamane – złożone z odcinków i linie faliste – nie proste i nie łamane. Najzwyklejszą krzywą jest okrąg. Są też elipsy, parabole, hiperbole, spirale...

Z liniami prostymi, odcinkami i innymi krzywymi nie będziesz mieć najmniejszego problemu. O parabolach i hiperbolach, elipsach, spiralach będziesz się uczyć w starszych klasach, ale na razie możesz podejrzeć ich charakterystyczny kształt w internecie i obserwować, może gdzieś je wypatrzysz? Obserwuj, jak układają się linie, nazywaj je, jeśli kojarzysz ich nazwę, jeśli się da.

- linia elektryczna między słupami
- trasa autobusu miejskiego
- sznurek z suszącym się praniem
- tor piłki rzuconej przed siebie





- tor piłki rzuconej do góry
- woda z węża do podlewania
- krawężnik
- tory kolejowe
- lina górskiej kolejki linowej
- woda tryskająca z fontanny
- czoło fali morskiej
- brzeg stołu
- łuki mostów i starych budowli
- ugięcie drzew, traw pod wpływem silnego wiatru
- tor skakanki – gdy skacze jedna osoba i gdy skakanką kręca dwie osoby
- ugięcie liścia pod ciężarem wody
- szpalery drzew w parku, przy drogach, w sadach
- układ roślin na polach, klombów w parkach
- ugięcie łodyżki pod ciężarem kwiatu, gałęzi pod ciężarem ptaka
- łuk tęczy
- co jeszcze?



Coś cię zachwyciło? Jeśli tak, uwiecznij malownicze linie w kadrze. Aparat zawsze znajdzie się pod ręką.

## □ Równoległe, prostopadłe, przecinające się

Jeśli mamy dwie proste i możemy dowolnie zmieniać ich położenie na płaszczyźnie, to jest nieskończenie wiele ustawień, gdy będą równoległe i nieskończenie wiele, gdy nie będą. Co innego, gdy mamy dwie proste o ustalonym położeniu – ktoś je położył i leżą na stole. W takim wypadku albo są równoległe, albo się przecinają. Mają jedno, wyłącznie jedno, położenie względem siebie, kiedy są równoległe (to słowo wszystko mówi?), czyli nigdy się nie spotkają. Znacznie łatwiej im się przeciąć, niż nie przeciąć – takich układów jest nieskończenie wiele. Przeciąć mogą się w naszym polu widzenia albo gdzieś w drodze do nieskończoności – to bez znaczenia. Takie linie o ustalonym położeniu mają też tylko jedno ułożenie, gdy są prostopadłe (to słowo też wszystko mówi?). To przecięcie pod kątem prostym.

Weź coś prostego – dwa przedmioty, które odegrają rolę dwóch prostych. Mogą to być patyczki, pałeczki do jedzenia chińskiego, dwa ołówki albo dwie słomki do picia (pamiętaj to tylko niedoskonałe modele, bo linie w matematyce to nie patyczki – nie mają końców!). Wo-

liz większy wymiar – weź dwa kije od szczotek, dwa sznurki, dwie rolki papieru toaletowego (rodzina to przeżyje) i eksperymentuj. Układaj, zmieniaj, przymierzaj, eksperymentuj. Pamiętaj, że w życiu możemy przyjmować pewne uproszczenia, np. możemy się umówić, że linie są równoległe (choć pewności nie mamy). Ważne, by wiedzieć, o co chodzi.

## □ Ćwiczenia praktyczne

Przyciskasz kredkę, flamaster, węgiel do kartki i prowadzisz ręką, zostawiasz na kartce ślad. Bez odrywania, jednym pociągnięciem. Co jest efektem? Kreska. Każdy to potrafi. Ale czy każda kreska jest linią? Czy każda linia jest kreską? To zależy – w popularnym, powszechnym rozumieniu – tak, w odniesieniu do definicji matematycznej – nie, bo ta nauka nie zna pojęcia: kreska.

Rysuj różne linie, kreski – krzywe, proste, odcinki, grube i cienkie, otwarte i zamknięte, regularne i esy-floresy. Stawiaj kreski prostopadłe i równoległe, niech się krzyżują. Technika dowolna – rysuj odręcznie lub przy linijce. Okręgi możesz rysować cyrkiem ze sklepu albo zbuduj domowy cyrkiel ze sznurka i pineski, sznurek i dwie pineski to patent na elipsę. Eksperymentuj. Ćwicz rękę.

## □ Seans filmowy

Czy znasz włoski serial animowany „La Linea”? Opowiada o przygodach temperamentnego bohatera narysowanego jedną kreską, który walczy z przeszkodami i sprytnie pokonuje je dzięki tajemniczej ręce dorysowującej kolejne kreski – patenty zza ekranu. Jak się okazuje, linią można oddać wszystko – przygody, emocje, myśli. Wystarczy dobry pomysł i czarodziejski ołówek.

Zobacz odcinki na YouTube. Może wymyślisz swoją opowieść?

## □ Linie jednobieżne

Co to takiego? Linie, które można rysować bez odrywania ołówka od kartki, jednym pociągnięciem. Nie muszą być proste! Nawet ciekawiej, gdy nie są proste, mogą być łamane, krzywe, mogą być abstrakcyjne, albo coś przedstawiać. Ale jest warunek – nawet najkrótszego odcinka nie można narysować powtórnie (to znaczy też, że linie nie mogą się przecinać).

Spróbuj. Zacznij od najprostszych figur geometrycznych. Każdy zamknięty kształt można tak obrysować. To proste.

Zrób krok dalej – takimi liniami można pisać, rysować, przedstawiać różne obiekty, postacie (La Linea).

Ciekawe, czy od razu poradzisz sobie z narysowaniem koperty bez odrywania ołówka?



Znajdź w internecie przykłady innych takich linii. Podążaj ich śladem.

Może stworzysz własną kompozycję?

## □ Słynne zadanie Eulera o mostach

Wybitny szwajcarski matematyk Leonhard Euler, żyjący w XVIII wieku, głowił się nad zadaniem: Czy spacerując po mieście (chodziło o Królewiec) można przejść przez wszystkie mosty, a było ich siedem, ale przez każdy tylko raz? Udowodnił, że jest to niemożliwe.



Sprawdź, czy się nie pomylił.

## □ Gra w kartofla

Linia przydaje się w grach. Gdy pada deszcz albo jest nudno, można zagrać w kartofla, grę starą jak świat. Jej zasady są proste, ale wciąga i ćwiczy pewność ręki. Wystarczy kartka i coś do pisania. Może być też plaża, droga gruntowa i kijek, chodnik i kreda.

Zagraj. Narysuj dowolną liczbę kótek (kartofli). Kartofle trzeba ponumerować – od 1 do ilu chcesz (maksymalnie 30, bo przy większej liczbie kartofli będzie ciężko). Sztuka polega na tym, by przejść – od pierwszego do ostatniego kartofla (zgodnie z numeracją), rysując linie (odcinki) pomiędzy kolejnymi. Warunek – linie nie mogą się przecinać. Ta gra nie zawsze musi wyglądać tak samo, poszukaj inspiracji w internecie.

## □ Coś prostego

Otoczają nas zauważalne linie, wiele z nich jest prostych, które potocznie, zamiennie nazywamy zwyczajnie liniami, kreskami, odcinkami, albo o których mówimy „to coś jest proste”. Odróżniamy je intuicyjnie i bezbłędnie od wszelkich krzywizn. Proste to proste. Pionowe, poziome, ukośne. Narożnik ściany, noga od stołu,





krawędź telefonu, podział szafek kuchennych, barierka balkonu.

Rozejrzyj się. Ile widzisz takich linii z jednego punktu, np. z fotela albo w tramwaju? Zmruż oko i, przesuając głowę, spróbuj nałożyć optycznie dwie linie na siebie – czy się pokrywają? Czy są równoległe? O czym świadczą, gdy się nie pokrywają? Czy w polu widzenia zauważasz więcej linii prostych, łamanych czy krzywych?

## □ Niekoniecznie najprostsza droga

Czy da się poprowadzić prostą w naturze? Teoretycznie i matematycznie prosta jest najprostszą drogą pomiędzy dwoma punktami, niezależnie od tego, jak daleko od siebie te punkty są położone. Ale czasami trzeba wytyczyć trasę za pomocą linii łamanej albo krętej.

Zastanów się, czy znasz takie przypadki? Kiedy? Na przykład:

- trasa podróży – raczej nie przejedziesz linią prostą między miejscowościami A i B. Trzeba jechać drogą, którą wytyczono tak, jak było możliwe, najczęściej tak, by było najbardziej ekonomicznie – przeważnie nie jest to linia prosta.
- obchodzenie przeszkód – muru nie przebijesz, jeśli np. kuchnię od łazienki dzieli ściana, musisz iść dookoła – po łuku albo po linii łamanej.
- spacer po mieście – co zrobisz, jak trafisz na ogrodzone osiedle na swojej trasie? Nie ma rady. Musisz obejść wzdłuż ogrodzenia.
- objazd – trwają roboty drogowe i droga jest zamknięta. Trzeba objechać zamknięty odcinek.
- uwaga! Góra – przez górę nie przejedziemy na wprost, chyba że jest wykopany tunel. Na górę trzeba wspiąć się zakosami.
- rejs żaglówką – niby blisko do portu, ale wieje silny wiatr od przodu. Trzeba halsować (dowiedz się, o co chodzi).

Jakie inne sytuacje z życia przychodzą ci na myśl? Jaką drogą trafiasz do celu – łamaną, krzywą?

## □ Najkrótsza droga

Jak pies goni za piłką? Dlaczego depczemy trawniki, spiesząc się na przystanek? Jak leci światło latarki? Jak spada kamień rzucony do góry? Wszystko, no prawie wszystko, na świecie porusza się po najkrótszej krzywej. Raz będzie to ruch po prostej, raz po okręgu, raz parabola... (nawet nie przeczuwasz, ale jesteś na tropie teorii względności).

Obserwuj ruch. Zwracaj uwagę, co jak się porusza. Wyobrażaj sobie tor ruchu. Może zauważysz szansę skrócenia jakiejś drogi?

## □ Linia jako granica

Linia dzieli czy łączy? To zależy. Może być i tak, i tak. Granica zawsze jest linią. A czy linia zawsze jest granicą? To jest pytanie!

Pomyśl, jakie granice przychodzą ci do głowy? W świecie rzeczywistym i wyobraźni, materialnie i symbolicznie. Co dzieli? Co łączy?

Rysowanie to nie tylko tworzenie, ale też sposób relaksowania się, wyciszenia, możliwość pomyślenia o czymś ważnym albo miłym. Nie zawsze rysujemy coś albo po coś. Czasami najzwyczajniej bazgrolimy. Każdy ma ulubione motywy. Jedni rysują linie – dużo linii, różne linie. Inni okręgi albo kwiatki, albo znak nieskończoności. Co komu w duszy gra. A ty, jaki masz ulubiony motyw?

Zrób test – nie mając planu, zacznij rysować coś na pustej kartce. Czy to są linie? Jakie? To nie linie? To co to jest?

Weź kartkę i narysuj pionowe równoległe kreski – ile chcesz. Z czym ci się kojarzą? A gdy narysujesz kreski prostopadłe? Może staną się inspiracją jakiegoś obrazu?

A gdybyś chciał/chciała narysować (zaprojektować) kratkę, jaka ona będzie?

Jak myślisz, czy całą kartkę papieru można pokryć liniami (prostymi albo krzywymi, dowolnej grubości)? Jak to zrobić? Wybierz technikę i narzędzie. Co to będzie? Ołówek, a może pędzel? Spróbuj. Chwilę ci to zajmie :)

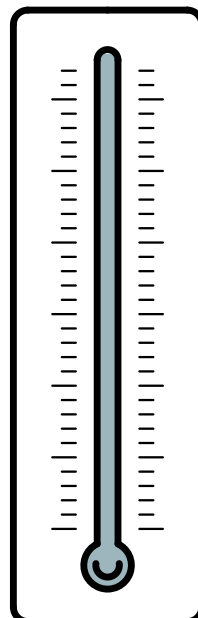
Wymyśl inne wyzwania związane z rysowaniem kresek, prostych.

## □ Linie pomocnicze dla orientacji

Czasami linie bardzo się przydają. To linie pomocnicze, pełnią funkcje, ułatwiają orientację, łącząc określone punkty, wskazują na prawidłowości, zależności. Oglądasz prognozę pogody – pani pogodynka prezentuje jakieś linie. Na mapie fizycznej np. Polski widzisz linie.

Poznaj nowe słowa. Dowiedz się, jak nazywane są linie wyznaczające na mapie miejsca o tej samej:

- temperaturze (widać je na mapach meteorologicznych prezentujących pogodę),
- ciśnieniu (też zaznaczone na niektórych mapach prognozy pogody, są bardzo ważne, szczególnie gdy słyszysz, że dorosłych boli głowa, bo jest za niskie/za wysokie\* ciśnienie),
- wysokości nad poziomem morza

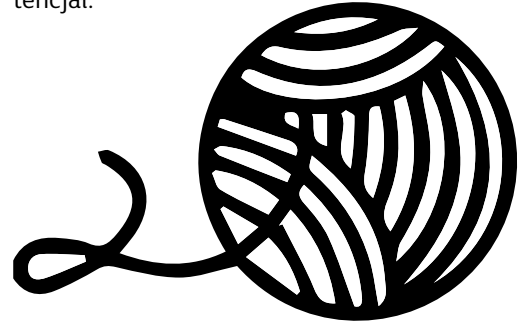


(znajdziesz je na mapach fizycznych podających wysokości terenu).

\*niepotrzebne skreślić

## □ 100 pomysłów

Weź coś prostego – sznurek, wstążkę, sznurowadło, drucik. I kombinuj – co można z tego/z tym zrobić. Niby proste, ale ma nieograniczoną potencjał.



Uruchoom wyobraźnię i baw się.

Podpowiedzi, co możesz (choć możesz znacznie więcej):

- ułożyć ciekawy kształt na stole – to może być konkret, np. kształt kwiatka, ślimak, dom, albo esy-floresy,
- oszacować, a potem zmierzyć długość, wykorzystując linijkę, centymetr, miarkę,
- użyć do pomiarów długości i porównań wprowadzając dowolne miary (np. sznurek ma długość 2 stołów, 7 łokci i troszeczkę, 10 i pół kroku),
- owinąć sznurkiem coś okrągłego (szklanek, wazon, wazę) i policzyć, ile razy udało się „okrążyć okrągły obiekt”, ustalić, czy wynik dało się przewidzieć, czy jest zaskoczenie,
- zrobić kokardkę albo profesjonalny węzeł (sztuka robienia węzłów ma wiele wspólnego z matematyką, gdy zainteresujesz się, poszukaj wiedzy w źródłach),
- spróbować przewiązać (tak jak na prezent) jakąś paczkę, książkę, karton (analizując, ile sznurka było potrzebne),
- wyznaczyć pion i/lub poziom,
- zrobić wagę i ważyć różne przedmioty, porównywać ich ciężar,
- zrobić dowolną konstrukcję, wykorzystując do budowy również inne materiały,
- zwinąć w kłębek lub złożyć jak najwięcej razy i zmierzyć, jak krótki odcinek powstał, ile złożeń udało się wykonać.

## □ Jedna linia po obu stronach kartki?

Chcesz się przekonać, że istnieje linia bez końca, którą możesz narysować i którą możesz podążać po obu stronach kartki? Brzmi dziwnie? Nie wierzysz? Wietrzysz w tym jakiś podstęp, magiczną sztuczkę? Nie, to możliwość w zasięgu twojej ręki. Niby możesz do nieskończoności rysować linie wzdłuż brze-





gu dowolnej figury zamkniętej, ale to nie to samo. Tu bez odrywania ołówka od powierzchni przechodzisz na drugą stronę...

Spróbuj i zrób własnoręcznie wstęgę Möbiusa – zaskakującą, magiczną powierzchnię, niepowtarzalny kształt. Jak się za to zabrać? Prosta sprawa. Weź pasek papieru – zdecydowanie dłuższy niż szerszy i sklej (albo połącz zszywaczem) końce tak, że jeden z nich obrócisz o 180 stopni. Jak będziesz mieć kłopot ze zrozumieniem, poproś o pomoc dorosłych. Gotowe.

- A teraz weź coś do pisania i od dowolnego punktu rysuj linię wzdłuż krawędzi. I co? Czy ma koniec? Jak długo możesz bez odrywania ręki rysować linię?
- Gdy malujesz płaską kartkę farbami, jej druga strona pozostaje biała. A jak będzie z malowaniem wstęgi Möbiusa? Spróbuj.
- A gdy spróbujesz przeciąć wstęgę wzdłuż, co się okaże? Spróbuj w połowie, spróbuj w 1/3 szerokości (jakby co, proś dorosłych o pomoc). Pamiętaj, żeby zaczynać cięcie od środka paska, nie przecinając go.

Zrobienie jednej wstęgi zajmie ci chwilę, możesz śmiało robić kolejne i eksperymentować.

## □ Co najpierw?

Matematyka to poważne sprawy, ale czasem można się uśmiechnąć. Znasz dowcipne powiedzenie: Przez trzy dowolnie wybrane punkty można poprowadzić prostą, pod warunkiem, że jest odpowiednio gruba. Nie bierz tego na poważnie, to tylko żart. Ty już wiesz, że przez każde dwa punkty można przeprowadzić prostą.

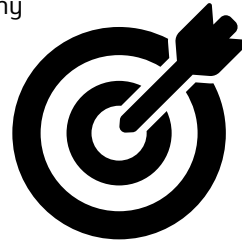
Narysuj dwa punkty. Poprowadź prostą. Potem możesz na niej zaznaczyć dowolną liczbą punktów i wszystkie będą leżeć na twojej prostej. W tę stronę to działa. Ile punktów dasz radę narysować na swojej prostej, zanim ci się znudzi? A gdybyś zaczęła/zaczął odwrotnie i najpierw narysowała/narysował więcej punktów? Czy dasz radę połączyć je prostą? To się może, ale nie musi udać. Możesz je połączyć i zobaczysz, jaką krzywą otrzymasz.

## □ Język

W języku wiele jest matematyki, matematyka korzysta z języka. Symbioza w czystej postaci. Trzeba pamiętać, że potoczne określenia i pojęcia matematyczne różni precyzja, nie są tożsame. Większość pojęć matematycznych ma zastosowanie w języku potocznym. Tak jest też z pojęciami matematycznymi „linia” i „prosta”. Sporo jest do nich odniesień w mowie potocznej – wprost i pośrednio.

Poznaj je, zrozum sens. Używaj, gdy będą pasować do kontekstu. Czy znasz określenia:

- Prosto jak strzelił
- Linia podziału
- Ktoś jest prostoliniwny
- Gruba kreska
- Prosto do celu
- Jak po sznurku
- Cienka linia
- Uprościć coś



Co jeszcze przychodzi ci na myśl?

## □ Mnogość węzłów

Rozciągnięta lina jest prosta, położona swobodnie (gdy nie jest zbyt gruba) wygnie się, zwinie. To nie koniec jej możliwości. Bo z liny, za pomocą liny można wyczarować cuda. Lina można się bawić, a taka zabawa na 100% doprowadzi do tworzenia węzłów. Węzeł w teorii matematycznej jest zagadnieniem na przyszłość, na razie możesz oswoić się (a może i zafascynować) węzłami na żywo, praktycznie.

Rozejrzyj się, popytaj, może gdzieś w domu jest lina – wystarczy metr, a jeszcze lepiej, gdy dostaniesz dwa kawałki lin do eksperymentów. Lina nie może być ani za gruba, ani za cienka, szybko w praktyce przekonasz się, czy masz idealną do tworzenia węzłów.

Zaczniij od takich węzłów, które zrobisz intuicyjnie – bez niczyjej pomocy, bez inspiracji. Masz pewnie najprostsze doświadczenia za sobą: z wiązaniem sznurowadeł, robieniem suptów, może z fantazyjnym wiązaniem kokardy, krawata. Ale możliwości są o wiele większe. Ile pomysłów przyszło ci do głowy? Czym się różnią te węzły? Szukaj różnic i podobieństw. Sfotografuj każdy. Może to znana forma, może ma swoją nazwę?

Gdy wyczerpiesz swoją inwencję, poszukaj przepisów na kolejne, profesjonalne węzły w internecie.

Sztuka robienia węzłów każdemu przyda się w życiu. Gdy coś trzeba zawiązać, coś przymocować – bez umiejętności wiązania węzłów trudniej sobie poradzić.

## □ Mapa myśli

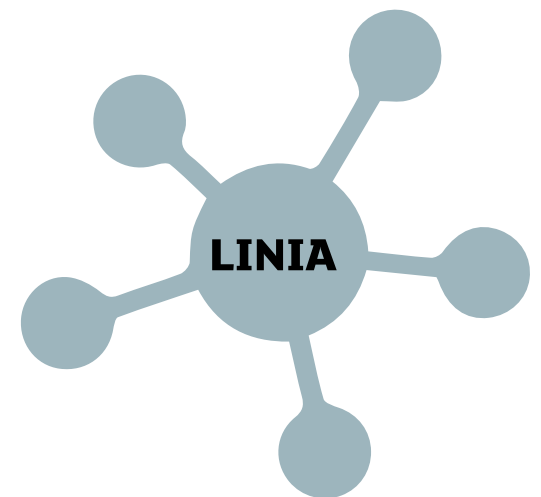
Gdy chcesz lub musisz zebrać myśli, skojarzenia, uporządkować, choćby najprostsze sprawy, zrobić notatki, przyda się prosta metoda, czyli mapa myśli. Nie wiesz, o czym mowa – zajrzyj do internetu i obejrzyj grafiki. Chwycisz w lot, o co chodzi.

Weź kartkę. Na środku narysuj kółko (albo inny dowolny kształt), w które wpisz słowo „LINIA”.

Od kółka wyprowadzaj linie (kreski, łapki, ramiona, gałęzie – dowolnie), na których wypisz jak najwięcej możliwości, jakie daje linia, z czym ci się kojarzy, co można z nią zrobić, do czego może się przydać. Propozycje mogą wydawać się głupie, absurdalne, ale nie zniechęcaj się, bo nie ma złych propozycji. Ile skojarzeń zapisałaś/zapisałłeś?

Przygotuj kartki innym i poproś, żeby zrobili to samo. Potem porównajcie wasze skojarzenia. Mogą być zaskakująco różne. Każdy z nas myśli inaczej. Po swojemu. Niekoniecznie liniowo.

Mapę myśli możesz wykorzystać do zebrania skojarzeń na dowolny temat, matematyczny i niematematyczny.

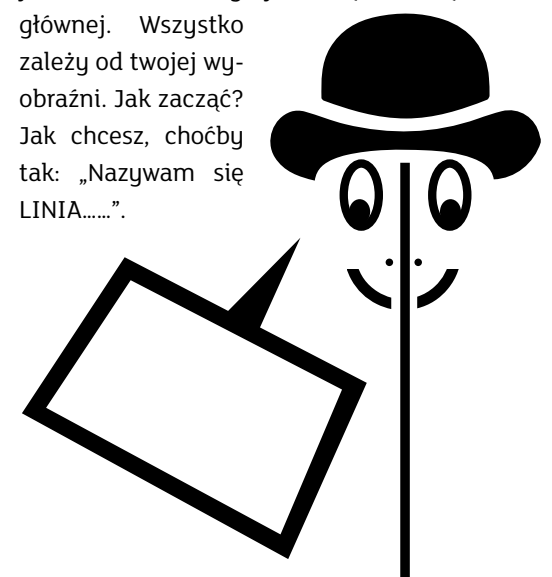


## □ Monodram

Z pojęciami warto się oswoić, może zaprzyjaźnić? Zostają z nami na całe życie.

Jak myślisz, czy LINIA może mieć ciekawe życie? Czy istota LINII jest prosta? Jak LINIA mogłaby się przedstawić? Co LINIA ma do powiedzenia? Co lubi? Z jakimi innymi formami geometrycznymi, przyrządami mierniczymi najlepiej współpracuje? Czy LINIA jest sympatyczna? Jakie ma wartości? Pomyśl o LINII jak o temacie nie tylko geometrycznym.

Przygotuj przedstawienie – bohaterem jest pan lub pani LINIA – zdecyduj, czy prosta, czy też krzywa, czy może łamana. Ustaw krzesła jak w teatrze. Odegraj scenkę z LINIĄ w roli głównej. Wszystko zależy od twojej wyobraźni. Jak zacząć? Jak chcesz, choćby tak: „Nazywam się LINIA.....”.





# Logika, bez niej ani rusz (choć niejedni próbują)

Logika jak pogoda jest zawsze. Jest kluczem do pojmowania świata, zrozumienia własnego języka, skutecznej komunikacji, wartościowej i konstruktywnej rozmowy. Tych sprawności nie osiągnie się bez wiedzy (i praktyki) o jasnym i ścisłym formułowaniu myśli, o regułach poprawnego rozumowania. Niewiele jednak LOGIKI w podstawie programowej polskiej szkoły. Logika i retoryka są w niej prawie nieobecne. Nie uczymy się logicznie rozumować, wnioskować, argumentować, wygłaszać stanowisk, dyskutować. W zasadzie – z punktu widzenia młodego człowieka – nie ma tematu, to znaczy temat jest, ale jakby go nie było. Można dorastać, słysząc czasami coś w stylu: „To jest nielogiczne”. Ale o co chodzi? I co z tego? Brak edukacji, oswajania z logiką i jej znaczeniem skutkuje tym, że w dorosłym życiu nie każdemu z nią po drodze, wielu ma własną logikę i nią się kieruje. A co? Tymczasem ona rządzi się bezwzględными zasadami, dobrze to widać w świecie przyrody: jest logiczny, bo prawami natury rządzi logika. Na gruncie logiki formalnej nie ma negocjacji, nie ma tak, że oba zdania: „Pada deszcz” i „Nie pada deszcz” są prawdziwe w tym samym momencie, w tej samej sytuacji. W życiu już nie jest tak prosto – wiemy, że w tym samym momencie może trochę padać i trochę nie padać. Trzeba nieco poćwiczyć i pomyśleć, żeby odróżnić logikę od życia. Czy logika jest trudna? Czy jest nudna? Czy jest fajna? Jak zwykle, to zależy – może być albo tak, albo tak. Logika ma słaby PR, może da się to zmienić przez zabawę?

## Sztuki wyzwolone

Zainteresowanie szkołą logiką nie zawsze było zerowe. Wręcz przeciwnie. W średniowieczu na uniwersytetach ówcześni studenci, czyli żacy, studiowali nauki, dziś powiedzielibyśmy – przedmioty (ale czy to logiczne określenie?), zwane sztukami wyzwolonymi (artes liberales). Podstawą wykształcenia była biegłość w gramatyce (czyli posługiwaniu się łaciną), LOGICE oraz retoryce (sztuce przemawiania), a na wyższym poziomie wtajemniczenia do zgłębienia była arytmetyka, czyli nauka o liczbach, geometria, czyli nauka o przestrzeni, muzyka i astronomia (nauka o gwiazdach).

Pomysł na logiczną rozgrzewkę: czy w dzisiejszych czasach, gdy wszystkie fakty i informacje można znaleźć w internecie, powrót w edukacji do bazowych nauk – w odniesieniu do życia i współczesnych realiów – nie byłby skuteczniejszy dla rozwoju, bardziej inspirujący i ciekawszy niż wkuwanie faktów w ramach przerabianego materiału? Czy zgłębienie istoty świata nie byłoby bardziej pasjonujące? Może to byłaby szkoła marzeń? Pofantazjować można.



## Dobry rozmówca

Ludzie różnią się pod wieloma względami, również stylem wypowiedzi. Ideałem jest ktoś, kto mówi prosto, logicznie i ciekawie. Kto będzie po drugiej stronie skali?

Zwracaj uwagę, jak ludzie mówią. Czy dobrze ci się rozmawia z kimś, kto wypowiada się prosto i logicznie, tak że nie masz kłopotu ze zrozumieniem? Z czasem dojdiesz do wprawy w ocenie atrakcyjności rozmówcy, kogoś, kogo słuchasz w radiu, w telewizji, na przyjęciu. I wielka prośba: sama/sam staraj się przekazywać myśli w interesujący sposób, jasno i logicznie, a zyskasz wdzięczność zachwyconych słuchaczy. A może wypiszesz więcej cech dobrego rozmówcy? Możesz użyć do tego techniki zwanej mapą myśli. Znajdź źródła i poczytaj, warto zaprzyjaźnić się z tą metodą.

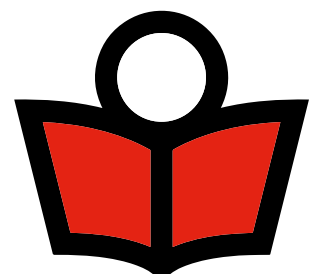
” **Logika jest niepokonana, gdyż aby z nią wygrać, trzeba postąpić się logiką**

**Pierre Boutroux**

## Przeczytaj koniecznie

„Co ty mówisz?! Magia słów, czyli retoryka dla dzieci” Michała Rusinka i Anety Załazińskiej, Wydawnictwo Literatura

Rozmowa to temat. Poczytaj o rozmowach, sporach, negocjacjach. Zdziwisz się, jak różna może być siła twoich słów – możesz zanudzić albo zainspirować, zdenerwować rozmówcę albo osiągnąć własne cele. Zorientujesz się, na czym polega zapowiedziana w tytule magia słów, na pewno nie raz w życiu przypomnisz sobie o bezcennych inspiracjach.





## □ Czego logika nie rusza?

Logika zajmuje się zdaniami oznajmującymi, prawdziwymi (1) i fałszywymi (0), ale musi być wiadomo, jaki jest status zdania – 0 czy 1: „Jestem głodna”, „Rok ma 400 dni”, „Każdy koń jest ssakiem”, „Austria leży w Afryce”, „Moje spodnie są czerwone”. Logika nie zajmuje się zdaniami bez sensu (bo jak ustalić, co fałsz, co prawda? Co tu rozstrzygać?): „Big Ben lubi ślimaki”, „Marchew jest mistrzem świata”, „ $2 + 2 =$  ciastko”. Domeną logiki nie są też pytania, wątpliwości: „Gdzie jest mój zegarek?”, „Kiedy dojedziemy?”, „Czy ja lubię lody?”. Nie zaprzęta sobie uwagi zdaniami rozkazującymi: „Sprzątnij pokój!”, „Zabrania się wchodzenia na trawnik!” ani westchnieniami: „Ale tu pięknie!”.

$$2 + 2 = \text{🍪}$$

Pobaw się i wymyślaj zdania, których logiką nie rozpracujesz. To wcale nie jest takie proste. Gdy do wspólnej zabawy zaprosisz większe grono (np. w podróży albo na imieninach), może być dużo śmiechu.

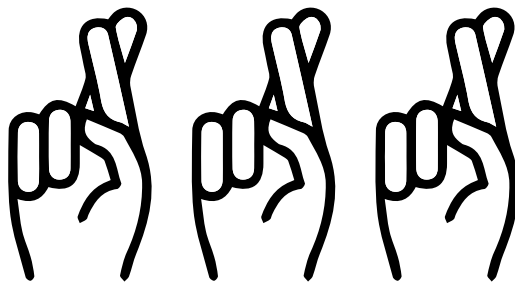
## □ Czym się różni fałsz od kłamstwa?

Logika operuje dwoma określeniami: prawda i fałsz. Fałsz to obiektywna nieprawda lub brak prawdy. Logika nie wnika w przyczyny, stwierdza stan faktyczny. Zdanie nie jest prawdziwe, zatem jest fałszywe. W języku sytuacja jest bardziej skomplikowana: fałszywe zdanie może wynikać ze złych danych, złych założeń, złej oceny sytuacji, ale nie jest intencjonalne. Twierdząc, że Ziemia jest płaska, wypowiadający te słowa być może wierzy, iż tak jest. Fałszuje rzeczywistość, ale nie kłamie. Kłamstwo to intencjonalne zachowanie kogoś, kto świadomie wprowadza w błąd, postępując się nieprawdziwymi informacjami. Logika nie zna pojęcia kłamstwa, poza paradoksem kłamcy.

**” Czysto logiczne rozumowanie nie da nam żadnej wiedzy o realnym świecie**

**Albert Einstein**

Zadanie w ogóle niematematyczne: jeżeli prawda to 1, fałsz to 0, jaką punktację przyznasz kłamstwu?



## □ Paradoks kłamcy

Paradoks to sytuacja, której analiza prowadzi do sprzecznych, wzajemnie się wykluczających wniosków. Wariantów opowieści i zagadek bazujących na paradoksie kłamcy jest mnóstwo. Już wielu starożytnym uczonym paradoks spędzał sen z powiek. Jeden z nich, Eubulides, grecki filozof, tak to sformułował: „Jeżeli kłamię, mówię, że kłamię, to kłamię czy mówię prawdę?”. Oto jest pytanie.

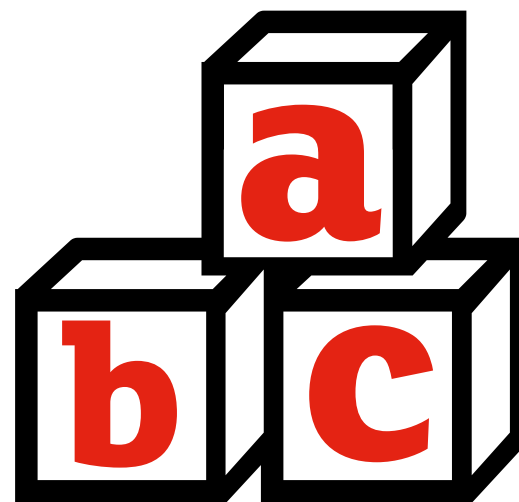
Spotykasz człowieka, który mówi: „Ja teraz kłamię”. Czy rzeczywiście jest kłamcą? A może mówi prawdę? Wczuj się w jego rolę. Jeśli kłamię i mówię, że kłamię, okazuje się, że mówię prawdę, czyli skłamał. Jeżeli mówi prawdę, ale powiedział, że kłamię, to właśnie skłamał. Czyli jak jest? Paradoksów z długim rodowodem jest więcej. Poszukaj różnych paradoksów. Może okaże się, że dociekanie ich istoty wciągnie cię bardziej niż jakaś aplikacja?

## □ Klocki logiczne

Nasz język, nasze wypowiedzi powinny być przejrzyste, spójne, logiczne. Posługujemy się zdaniami prostymi i złożonymi. Każde dziecko nim w szkole dowie się, czym są części mowy, może formułować myśli bezbłędnie, logicznie. Wiele łączy zdania budowane w języku potocznym i logikę, która też postępuje zdaniami.

Jest jednak różnica: w logice każde zdanie jest klockiem, z którego pomocą można budować logiczne konstrukcje, analizować relacje. Ważne są reguły, czyli jak się układa klocki, a nie czym są same klocki. Dlatego regułom logicznym tak samo podlegają zdania w języku komunikacji, jak i zdania wypowiedziane w języku matematyki.

Pomyśl o zdaniach złożonych jak o konstrukcji. Po pierwsze, po coś budujesz wypowiedź, czyli budowlę z klocków. Musi być podstawa, stabilny fundament wypowiedzi, klocki można układać w różnej kolejności, nie ułożysz ostatniego klocka, jeśli nie będzie miał na czym stać. Co więcej, nie położysz następnego klocka, jeśli pominiesz bieżący. Musi być logika (!) i konsekwencja kolejnych kroków. Niektóre klocki są tym, czym się wydają, inne nie – może trzeba je odwrócić? A co z fałszywymi klockami? Wiele pasuje do siebie, ale być może z części trzeba zrezygnować, bo nie pasują do koncepcji? Raz budowla będzie wyższa, innym razem wystarczy malutka. Zasadniczo – poznaj rodzaje zdań i gdy będzie okazja, pomyśl o jakiejś planowanej wypowiedzi w ten sposób. Może okaże się, że twoje zdolności negocjacyjne wzrosły?



## □ Fakt to fakt...

Podstawowy klocek w logice – zdanie. Albo jest prawdziwe (wtedy ma wartość logiczną 1), albo jest fałszywe (wtedy ma wartość logiczną 0). I koniec, oczywiście nie wnikając w meandry języka potocznego, kiedy na przykład mówimy, że coś nam się wydaje. To już nie jest obszar logiki.

Wstajesz rano i mówisz – głosem wewnętrznym do siebie, do innych. Jednego dnia weź kartkę oraz ołówek i zrób statystykę wypowiedzianych zdań. Jeśli jesteś gadułą, to może być ciężka próba. W sumie wystarczy notować przez godzinę, nie musi być cały dzień, żeby złapać, o co chodzi. Zwróć uwagę, ile (na sztuki albo w ułamku lub procentach) wypowiadasz zdań prostych oznajmujących. Większość będzie prawdziwych, choć nie zdradzając nikomu, możesz prowadzić tajny rejestr zdań fałszywych. Każdemu się zdarza. Jakże to zdania?





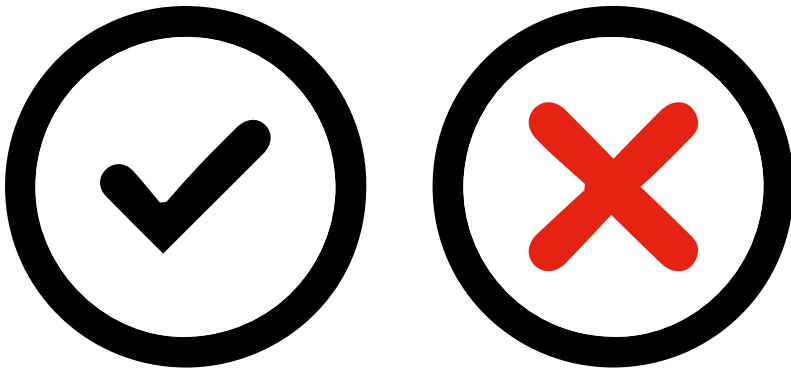


Na przykład:

- Dziś jest poniedziałek.
- Jestem głodna/głodny.
- Gdzie są moje skarpetki? (Ups... To nie jest zdanie logiczne)!
- Jest ładna pogoda.
- Uciekła mi winda.
- Spaliły się grzanki.
- I tak dalej...

## ...może nie?

Dla każdego zdania możemy utworzyć zaprzeczenie tego zdania. Zdanie prawdziwe stanie się zdaniem fałszywym, zdanie fałszywe stanie się zdaniem prawdziwym. Zaprzeczenie w języku logicznym zwie się negacją. W logice nic nie może być prawdziwe i nieprawdziwe jednocześnie. I coś w tym jest. Winda nie może uciec i nie uciec jednocześnie. Skoro jest poniedziałek, nie jest żaden inny dzień tygodnia. Słowkiem, które ma magiczną moc zmieniania prawdy w fałsz i odwrotnie jest NIE.



Spróbuj przerobić jakieś zdania opisujące twój dzień na ich zaprzeczenia. I co? Świat nagle wygląda zupełnie inaczej? Sprawdź, jak to jest w szerszym horyzoncie. Też działa, bo albo Ziemia krąży dookoła Słońca, albo nie krąży, albo świnie latają, albo nie latają, albo mleko jest białe, albo nie jest białe i tak dalej...

## Czas na logiczne komplikacje

Rzadko mówimy prostymi zdaniami. Zwykle jest więcej wątków do potączenia, powiązania.

Zobacz, jak to działa. (Uwaga: będzie trochę trudnych słów, które możesz zignorować albo nauczyć się i zaimponować komuś przy okazji).

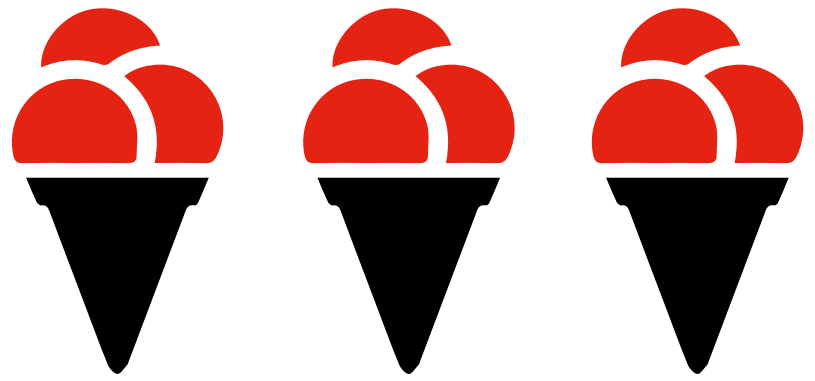
### 1. To i to, czyli koniunkcja

Dwa zdania są prawdziwe łącznie jedynie, gdy oba są prawdziwe. Np.: „Warszawa jest stolicą Polski i Warszawa leży nad Wisłą”. To zdanie jest prawdziwe, gdyż Warszawa jest stolicą Polski (a wiemy, że jest) i leży nad Wisłą (przecież leży). Nie byłoby prawdziwe, gdyby było inaczej. Chyba każdy się zgodzi, że zdania: „Warszawa jest stolicą Francji i leży nad Wisłą” czy „Warszawa jest stolicą Polski i leży nad Sekwaną” są fałszywe?

Zbuduj kolejne przykłady i sprawdź, czy działa.

### 2. To lub to, czyli alternatywa

W logice „lub” oznacza niewykluczające się możliwości. Trzeba się pilnować, bo w potocznej mowie, używając „lub” możemy (choćby niechcący) mieć na myśli wybór między wykluczającymi się możliwościami, np. „Najbliższy weekend spędzę w górach LUB nad morzem” – opcje raczej się wykluczają, więc powinniśmy prawidłowo powiedzieć: „Najbliższy weekend spędzę w górach ALBO nad morzem”. Co innego w zdaniu: „W wolnym czasie czytam lub rysuję” – jedno nie wyklucza drugiego. I tu „lub” jest użyte poprawnie. „Lub” nie wyklucza: „Zjem lody śmietankowe lub waniliowe” jest prawdziwe, gdy zjesz lody tylko w jednym z tych smaków lub zjesz lody w obu smakach. Jest fałszywe, jeśli w ogóle nie zjesz lodów albo zjesz czekoladowe, albo jakiegokolwiek inne.



Zbuduj kolejne przykłady i sprawdź, czy to działa.

### 3. Jeśli to, to coś, czyli implikacja

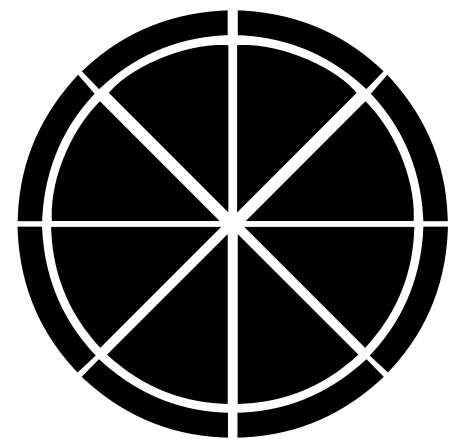
Tu różnica między praktyczną logiką języka a logiką logiki może być trudniejsza do zrozumienia. Myśląc o codziennych sytuacjach, uwzględniamy warunki, okoliczności, doświadczenia. Logika nie zajmuje się niuansami. Właśnie dlatego logicy wolą działać na klockach, nie na sensach, nie na konkretnych sytuacjach. A życie ma swoją logikę. Czy takie zdanie ma sens: „Jeżeli jestem głodna/głodny, zjem lody”? Ma sens, ale ilu tu okoliczności, które wpływają na analizę. Logika sobie z takim zdaniem może nie poradzić. Rozważmy bardziej jednoznaczny przykład z życia wzięty. Mama mówi do Jasia: „Jeśli będziesz grzeczny, to pójdziesz do kina”. Mama i Jaś mają cztery możliwe scenariusze. Załóżmy, że:

- Jaś jest grzeczny, to oczywiście pójdzie do kina. Zgodnie z obietnicą mamy. Gdy z prawdy wynika prawda, zdanie jest oczywiście prawdziwe.
- Jaś nie jest grzeczny, to nie pójdzie do kina. Jeżeli z fałszu wynika fałsz, to zdanie jest prawdziwe. Czyli to zdanie też jest prawdziwe. Taka prawda i konsekwencje będą zgodne z deklaracją mamy.
- Jaś nie jest grzeczny, to idzie do kina. Tu z fałszu wynika prawda, czyli zdanie też jest prawdziwe. Przecież mama nie mówiła, co zrobi, gdy Jaś będzie niegrzeczny, więc nie łamie danego słowa, pozwalając Jasiowi na kino, mimo że nie był grzeczny. Jaś korzysta.
- Jaś jest grzeczny, a mama nie pozwala iść do kina. To jedyna sytuacja, gdy zdanie jest fałszywe. Mama łamie słowo. Tak się nie robi! Gdy z prawdy wynika fałsz, implikacja jest fałszywa.

Zbuduj kolejne przykłady i sprawdź, czy to działa.

### 4. Wtedy i tylko wtedy, czyli równoważność

Tu powinno być intuicyjnie prosto, choć formalne matematyk powie, że równoważność to koniunkcja implikacji prostej i odwrotnej. Ale już wiesz, że wiele rzeczy trudniej wytłumaczyć, niż zrozumieć. Taki oczywisty przykład: jeżeli pizzę podzielono na 8 równych części, to każda z nich stanowi 1/8. I na odwrót. Jeżeli każda z części



pizzy to 1/8, to znaczy, że pizzę podzielono na 8 równych części. Opisując sytuację, powiemy: „Pizzę podzielono na osiem jednakowych części wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych części to 1/8”. To zdanie prawdziwe.

Zbuduj kolejne przykłady i sprawdź, czy to działa.

## Podwójne przeczenie

Wystarczy zaprzeczyć (magiczne słówko NIE), żeby zmienić status zdania – prawdziwe zamieniamy na fałszywe, fałszywe na prawdziwe. Jeżeli prawdą jest, że: „Lubię banany”, fałszem będzie, że: „Nie lubię bananów”. Jeżeli prawdą jest, że: „Nie lubię jabłek”, fałszem będzie, że: „Lubię jabłka”. A co





# ” *Logiką tylko udowadniamy, odkrywamy intuicją*

Henri Poincaré

w każdym oświadczeniu zmieni dodanie jeszcze jednego NIE? Warto sprawdzić, przy tym trzeba uważać na pułapkę. „Nie, że nie lubię bananów” może oznaczać, że: „Lubię banany”. Ale po polsku nikt tak nie mówi, chyba że w mowie potocznej usłyszysz, jak ktoś odpowiada na pytanie: „Lubisz banany?” – „Nie, nie lubię bananów”. I wtedy podwójne „NIE” nie działa jak „TAK”. Pozostaje „NIE”. Taki nasz język polski bywa „nielogiczny”.

## tak + nie = ? nie + nie = ?

Pobaw się podwójnym przeczeniem. Czy zawsze zmienia sens zdania? W języku potocznym są półcienie, niuanse, aspekty i zastrzeżenia. Możesz powiedzieć: „Nie, nie lubię wujka Heńka”, ale to wcale nie znaczy to samo co: „Lubię wujka Heńka”. Temat rzeka dla językoznawców, naukowców i amatorów.

### System zero-jedynkowy

W życiu jest wiele sytuacji, kiedy musimy coś określić skrótowo, zdecydować, gdy wybieramy: „Albo..., albo...”. Do opisu wyboru przydają się różne systemy. Jednym z kodów jest system zero-jedynkowy, takie też oznaczenia mają zdania logiczne. Zdanie prawdziwe ma wartość logiczną 1, zdanie fałszywe – 0. 1 albo 0. Prawda albo fałsz na gruncie logiki.

W życiu i języku są też inne, mniej kategoriowe sposoby wyrażania wyboru. Jakie przychodzą ci na myśl? Jakie sama/sam stosujesz?

Przykłady:

- Nie albo tak?
- Za albo przeciw?
- W prawo albo w lewo?
- Białe albo czarne? (W tej skali są zwolennicy wyborów skrajnych: albo białe, albo czarne, ale są też zwolennicy odcieni szarości, uważają, że nigdy nic nie jest tylko takie albo tylko takie).
- Rybka albo akwarium?
- Albo..., albo...

# 0-1

### Uwaga na fałszywe przesłanki

Już oswojasz się z myślą, że fałszywy wniosek wynikający z fałszywego założenia jest zdaniem prawdziwym? Na gruncie logiki, a ta reguła praktycznie przenosi się do życia, z fałszywych przesłanek, argumentów można wywnioskować wszystko. Jakie to pole do snucia fałszywych treści! Takie zdania to dowód, że można sobie wymyślać głupoty, opowiadać

nieprawdę i jednocześnie mieć czyste sumienie. Jak to? Przecież wygłaszam zdania prawdziwe!

Zabaw się w twórcze budowanie zdań prawdziwych, takich, w których fałszywy wniosek wyciągany jest z fałszywej przesłanki:

- Jeżeli jesteśmy za lasami, za górami (a wiadomo, że nie jesteśmy), to w zamku, zamknięta w wieży, mieszka piękna królewna.
- Jeżeli zjadłam buraczki (a wiadomo, że nie zjadłam), mogę zjeść deser.
- I dalej ocean fantazji...

### Quiz logiczny

Czy logiką można się bawić? Czy logika pomaga w myśleniu? Czy zainteresowaniem logiką można zarazić innych?

Spróbuj. Wiesz już dużo, trzeba poćwiczyć, bo nikt nie jest mistrzem, a intuicja czasami może zawodzić w odniesieniu do życiowych sytuacji. Na zachętę stwórz zestaw zdań i sprawdź, w jakim stopniu rodzina myśli logicznie. Uprzedź, że to zabawa i masz nadzieję, że nikt się nie obrazi. Poproś, żeby oceniali, czy zdanie jest prawdziwe (1), czy też fałszywe (0). Poproś także o wyrozumiałość i przymknięcie oka na ewentualne pułapki – nie zapomnij o zdaniach, którymi logika się nie zajmuje, ale rodzinę możesz nabrać i sprawdzić. Najfajniej będzie, jeśli porozmawiacie o każdym ze zdań, szukając „dziury w całym”.

Ku inspiracji (choć twoje zdania będą na pewno ciekawsze):

- Jeżeli  $2 + 2 = 5$ , to żyjemy w XVI wieku.
- Nie sprzątam wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma bałaganu.
- Jeżeli słoń jest rośliną, to brzoza jest owadem.
- Jeżeli 4 jest większe niż 12, to są to liczby nieparzyste.
- Dziadek jest głodny i nie jest głodny.
- Jeżeli nie jestem nieśmiała/nieśmiały, to jestem śmiała/śmiały.
- Gdy krowa jest wesoła, daje fioletowe mleko.
- Słońce jest największą gwiazdą wtedy i tylko wtedy, kiedy nie ma większej.
- Jeżeli przechodzę przez ulicę, najpierw patrzę w lewo.
- Jak jest noc, to jest ciemno.



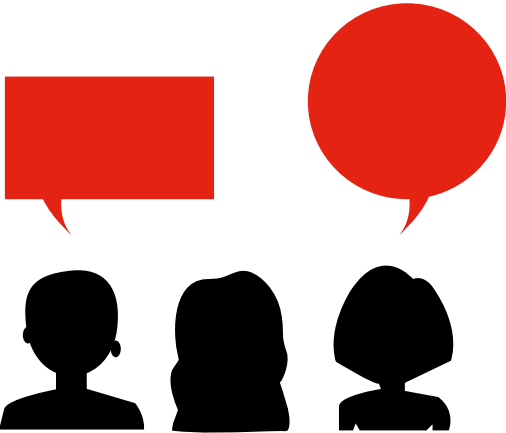
- Kalosze noszę wtedy i tylko wtedy, gdy nie pada.
- Na obiad zjem ryż lub makaron.





## □ Ministerstwo głupich zdań

Rozmawiamy i komunikujemy się za pomocą słów, zdań, sensów, z każdego wypowiedzianego zdania coś powinno wynikać. Samo życie, czasem prawda, czasem fałsz, ale co by było, gdybyśmy mówili bez sensu? Wypowiedź musi mieć sens, jednym z warunków jest, żeby początek i koniec zdania dotyczyły tego samego. Inaczej jest jak z porównywaniem gruszek i jabłek. Wyobraź sobie, że tak ze sobą rozmawiamy na co dzień. Czy można się dogadać? Czy coś z tego wynika? O co chodzi? Chodzi o logikę!



Na YouTube możesz obejrzeć filmowy skecz kultowej grupy Monty Pythona „Ministerstwo Głupich Kroków”. Zorganizuj „Ministerstwo głupich zdań”, czyli zdań oznajmujących, zbudowanych na zasadach zgodnych z logiką, ale pozbawionych sensu. Możesz polować na cudze zdania albo we własnym zakresie wymyślać okazy. To wbrew pozorom nie jest głupie zajęcie (oprócz tego, że może być całkiem śmiesznie) – im bardziej wiesz, co jest pozbawione sensu, tym lepiej będziesz sobie radzić z bełkotem, który w przyszłości być może usłyszysz.

Kilka przykładów (ale Ciebie stać na więcej :)):

- Zjem ciastko lub wyjadę na wakacje do babci.
- Wyjdę na spacer wtedy i tylko wtedy, jeśli mam 150 cm wzrostu.
- Jeżeli świeci słońce, jest piątek.
- Lubię psy, bo lubię żyrafy.
- Jutro będzie padać deszcz albo zjemy obiad.

- Jeśli  $4 + 3 = 8$ , to kupię sobie nowe buty.
- Lubię Janka lub lubię wszystkie dzieci w szkole.
- Ładnie rysuję wtedy i tylko wtedy, gdy mam sukcesy w pływaniu.

## □ Audyt języka

Warto wyostrzyć słuch, bo czasami można wyłapać niebywałe, twórcze, kreatywne sformułowania, tyle że bez sensu. Do mistrzów należą sprawozdawcy sportowi, ale można im wybaczyć, bo w ferworze emocji łatwo coś palnąć.

Znajdź w internecie i poczytaj perelki językowe w wykonaniu najznakomitszych sprawozdawców. Od razu zrobisz audyt logiczny. Nikt nie jest doskonały.

## □ Konkurs na słowo

Skąd się wzięło słowo „logika”? Co oznacza? Już starożytni Grecy docenili jej wagę – logika (gr. *logos*) znaczyła tyle, co rozum, myśl, słowo, wiedza. Dziś logika jest nauką o sposobach jasnego i ścisłego formułowania myśli (za Wikipedią). *Logos* w filozofii zapowiada wewnętrzne uporządkowanie, racjonalność. Wiele nazw nauk ma w sobie związek z „*logos*” – meteorologia, archeologia, grafologia, muzykologia...



Zrób rodzinny konkurs: kto na kartce, np. w 5 minut, wypisze najwięcej nazw nawiązujących do „logos”.

## □ Warunek konieczny i wystarczający

Co to takiego? Definicje matematyczne są trudniejsze niż sama materia. Robisz ciasto? Koniecznie musisz mieć mąkę, wystarczy, że ją zagnieciesz. Warunek konieczny musi zaistnieć (musi być mąka!), żeby pożądane zdarzenie mogło zajść. Daje szansę, ale nie gwarantuje, że cokolwiek się wydarzy (mąka może pozostać na półce). Warunek wystarczający gwarantuje realizację (zagniatasz ciasto).

Wyobraź sobie inne sytuacje, które doskonale znasz z życia, np.:

- Chcesz iść na koncert ulubionego zespołu. To twoje marzenie. Jaki jest warunek konieczny? Musisz kupić bilet. Posiadanie biletu jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym (możesz np. nie dostać zgody rodziców, albo nie mieć czym dojechać, albo będziesz mieć gorączkę...). Jeśli jesteś na koncercie, to jest to warunek wystarczający, by wnioskować, że masz bilet (bez biletu, by cię nie wpuszczono).



- Zbliża się sezon skoków narciarskich. Mamy nowego kandydata na mistrza na miarę Adama Małysza czy Kamila Stocha. Jaki jest warunek konieczny sukcesów w nadchodzącym sezonie? Potencjalny mistrz musi być świetnie przygotowany. Jaki jest warunek wystarczający? Kandydat musi świetnie skakać, lepiej niż inni. Jeśli zawodnik nie będzie doskonale przygotowany, nie ma co marzyć o zwycięstwach, nawet jak będzie się starał.



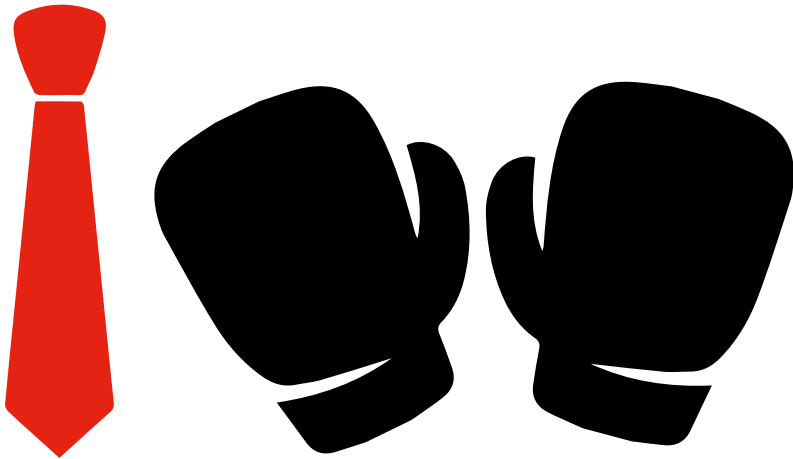
- I jeszcze przykład matematyczny: warunkiem koniecznym, by liczba była podzielna przez dziesięć, jest jej podzielność przez 5. Formalnie: jeśli liczba jest podzielna przez 10, to jest podzielna przez 5. Z drugiej strony podzielność przez 10 jest warunkiem wystarczającym dla podzielności przez 5, bo każda liczba podzielna przez 10 dzieli się też przez 5.



Nie raz, nie dwa spotkasz się z warunkami logicznymi. Przećwicz to, a zrozumiesz i zapamiętasz na zawsze.

## □ Zagadki logiczne

Takie zagadki cieszą się dużym powodzeniem na całym świecie – ludzie lubią gimnastykować szare komórki pod każdą długością i szerokością geograficzną. Najbardziej znana jest zagadka zebry (znajdziesz ją w internecie), przypisywana Albertowi Einsteinowi. Czy rzeczywiście geniusz jest jej autorem? Nie ma pewności, że tak, nie ma pewności, że nie. W naszych realiach najbardziej znani są państwo Abaccy, Babaccy, Cabaccy, Dabaccy i tak aż do państwa Żabackich. To bohaterowie zagadek tworzonych w latach 70. XX wieku przez popularyzatora gier, rozrywek umysłowych Lecha Pijanowskiego i czytelników „Życia Warszawy”, którzy do rubryki „Rozkosze łamania głowy” nadsyłali propozycje zagadek logicznych, łamigłówek. W zagadkach logicznych muszą występować różne osoby albo inne obiekty, elementy o różnych cechach, upodobaniach, powiązane ze sobą jednoznacznie. Rozwiązanie zagadki polega na logicznym dopasowaniu elementów na podstawie wrywkowych opisów. Może nim być np. konkluzja: „Mąż pani Babackiej ma na imię Tomasz i lubi czerwone krawaty oraz ogląda boks”.



Znajdź jakieś zagadki logiczne i spróbuj. Może nie zaczynaj od zagadki zebry, bo to podobno najtrudniejsza zagadka na świecie, tylko 2 procent ludzi potrafi ją rozwiązać. Dasz radę, ale poćwicz dla rozgrzewki na prostszych przykładach.

Kolejny krok – to ty możesz układać zagadki logiczne i podsuwać je bliższym do rozwiązania.

## □ Logiczne kryteria

Na różne rzeczy można różnie patrzeć, różnie je grupować, czyli inaczej mówiąc, tworzyć różne zbiory. Kryteria, cechy wspólne mogą być rozmaite, ale jeśli jakieś zestawienie ma mieć sens, musi być w tym logika i konsekwencja.

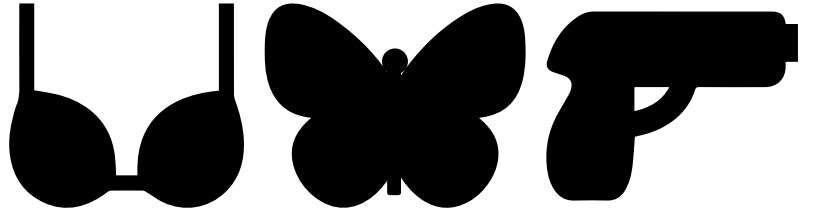
Jak uważasz, co łączy te słowa? Które nie pasuje? Ile wymyślisz logicznych kryteriów? (Za każdym razem może nie pasować inne słowo).

STOPIEŃ  
BIUSTONOSZ  
MOTYL  
PESTO  
PISTOLET

Podpowiedzi dla tego zestawu (im więcej wynajdziesz, tym więcej punktów dla siebie):

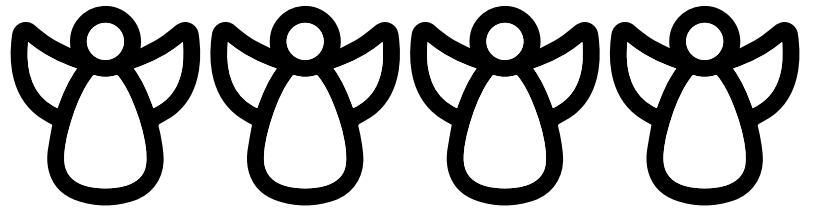
- W nazwie słowa jest słowo STO, wyjątkiem jest MOTYL.
- Słowa są rodzaju męskiego, tu nie pasuje PESTO.

- Drugą literą jest samogłoska, tym razem STOPIEŃ nie spełnia kryterium.
- Słowa określają rzeczy, wyjątkiem znowu jest MOTYL.
- Słowo kończy się na spółgłoskę, znowu PESTO.
- W słowach nie ma dwuznaków, wyjątkiem jest BIUSTONOSZ.
- Słowa pochodzą z języka polskiego, znów PESTO nie pasuje.
- W słowach nie ma spółgłosek miękkich, STOPIEŃ odstaje od reszty.



Twórz różne zestawy przedmiotów, pojęć, słów. Zadawaj zagadki, kryteria mogą być różne. Możesz też doszukiwać się wspólnych cech w przypadkowych słowach.

## □ Ile diabłów/aniołów mieści się na łebku szpilki?



Ten problem abstrakcyjny, filozoficzny, teologiczny i matematyczny, bo w grę wchodzi dylematy logiczne, zaprzęta głowy ludzkości od ponad 500 lat. Pewnie słyszysz to pytanie po raz pierwszy i bardzo dobrze. Chodzi o pierwsze skojarzenie, wyobrażenie.



Zamknij oczy, wyobraź sobie, pofilozofuj i ty. Możesz myśleć o diabłach lub o aniołach, jak wolisz. Dostrzegasz tu logikę?

## □ Mistrz dedukcji

Mastermind, czyli mówiąc po polsku mistrz umysłu, to gra logiczna, wymagająca abstrakcyjnego myślenia, analizy przesłanek, dedukcji, popularna w czasach młodości twoich dziadków (rodzice też mogli w nią grać). W grze biorą udział dwie osoby. Jedna układa kod, ustawiając cztery pionki w wybranym porządku. Druga ma za zadanie odgadnąć ustawienie w jak najmniejszej liczbie prób. Każda próba, czyli wybór określonego ustawienia, jest oceniany przez pierwszego gracza – który pionek jest w dobrym kolorze, który w dobrym miejscu. To brzmi skomplikowanie, ale raz zagraasz i zasady okażą się oczywiste.

Zapytaj, może gdzieś jeszcze jest, głęboko schowana. Jeżeli nie ma, może namówisz rodzinę na zakup oryginalnego albo nowego zestawu w internecie? Inwestycja na pewno się zwróci, a zabawy będzie co niemiara. Możesz też zagrać w grę domowej roboty – wystarczy kartka papieru i kredki.





# Mniejsze, większe, równe?

## Czy wszystko da się porównać?

„Mniej więcej” to inaczej „jako tako” albo „pi razy drzwi”, „pi razy oko”, „z grubsza”, „generalnie”, „szacunkowo”, „jakoś”. Tyle język potoczny, matematyka patrzy na pojęcia „mniej” i „więcej” bardziej konkretnie. Całe życie porównujemy, świadomie i nieświadomie. Coś jest tańsze, coś jest większe, coś jest ładniejsze, coś zdrowsze. Czy to jest matematyka? To zależy. Ocena artystyczna czy merytoryczna nie jest ani celem, ani zadaniem matematyki, bo piękno, uroda, poziom wiedzy, smak nie podlegają matematycznym tezom, choć do wyrażenia swojej opinii możemy wykorzystać liczby. Jurorzy w różnych konkursach, oceniając występy, mogą przyznawać punkty. Rozmawiając o smaku potraw, bywa że mówimy, iż np. sernik cioci jest najlepszy na świecie albo przyznajemy mu 10 punktów na 10 możliwych. Tu rządzą subiektywne oceny, choć kryteria też mają znaczenie. Prawdziwie matematyczne porównania dotyczą elementów tych samych zbiorów, a kryteria ich zestawiania muszą być obiektywne, dające się zmierzyć, oszacować za pomocą matematycznych technik i metod pomiaru. Czyli matematycznie możemy porównywać: wartości liczbowe (np. rozmiary, ceny), szybkość, odległość, liczbę czy ilość, ciężar, jasność, siłę, liczbę kalorii, wiek i wiele innych parametrów. Niektóre porównania zrobimy „na oko”, wiele oszacujemy na podstawie intuicji, doświadczenia, do innych wystarczą proste przyrządy (np. linijka), jeszcze inne wymagają specjalistycznej aparatury. Na co dzień sprawne porównywanie ułatwia życie, pomaga dokonywać oceny sytuacji, wybierać, podejmować decyzje, korzystać z okazji.

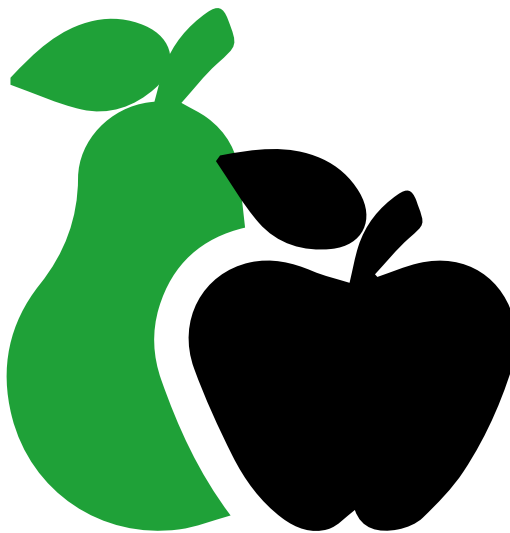
### Pierwsza zasada

Każdy uczeń słyszał albo usłyszy w szkole: „Nie można porównywać gruszek z jabłkami”. No bo co z takiego porównania wynika? Zestawiając gruszki z gruszkami, a jabłka ze sobą od razu wiesz, które jabłko najczerwieńsze, która gruszka największa. A co wynika z wiedzy, że jabłko jest czerwieńsze od gruszki, ale gruszka większa od jabłka? Gdy masz ochotę na coś bardzo czerwonego albo chcesz zjeść największy owoc, to ma sens. Można się tak bawić, porównywać, rozwiązywać problemy, ale trzeba wtedy myśleć szerzej, rozszerzając zbiór. Z jabłkami i gruszkami to proste i możliwe, bo jedno i drugie są owocami, należą do tego zbioru. W jego ramach możesz się zastanawiać nad kryteriami porównań: których owoców jest więcej? Które są cięższe, które mają więcej kalorii albo witaminy C, które są smaczniejsze (dla ciebie), które są bardziej czerwone? Gdy przyjdzie ci do głowy szalone porównanie np. wagi jabłka i pasty do zębów albo wysokości palmy i hotelu, też możesz. To przykłady dwóch zbiorów dwuelementowych, stworzonych przez ciebie w myśli tylko do celu takiego porównania. Podobnie jest z każdym porównaniem matematycznym – musisz wiedzieć co, z czym porównujesz i w jakim celu. To wystarczy.

Wymyśl od razu jak najwięcej tematów do porównania, bazując na tym, co masz przed oczami. Przykłady (pamiętaj, że gdy porównujesz dwa przedmioty, to żaden z nich nie jest naj..., jest po prostu cięższy, wyższy, cieńszy):

- który zeszyt jest cięższy (najcięższy),
- która książka na półce jest najwyższa,

- która roślina ma najwięcej liści,
- które pomieszczenie w mieszkaniu jest największe,
- w którym domu w sąsiedztwie pali się najwięcej światła,
- itp, itd.



W przyszłości, już za chwilę, możesz rozpocząć przygodę z porównywaniem przeróżnych obiektów, pod dowolnym kątem. Zawsze coś ciekawego nadaje się do porównania.

### Co wynika z porównania

Wynik porównania zawsze jest informacją. A informacja może, ale nie musi (a często nie powinna) wiązać się z oceną, która zawsze jest wartościująca. Większe jabłko wcale nie musi być smaczniejsze niż mniejsze, ale cięższa pomarańcza, z dwóch tej samej wielkości, prawdo-

podobnie będzie bardziej soczysta. Porównanie obrazuje sytuację, wnioski mogą być różne.

Znajdź przykłady, kiedy wynik porównania niesie inną, ważną informację od samego faktu, że coś jest większe, mniejsze, cięższe, lżejsze, dłuższe, krótsze...

### Benchmark, czyli punkt odniesienia

Trudne słowo, ale przydatne. Najprościej zapamiętać, że to taki wzorzec, coś, do czego można się odnieść w porównaniach. Co niby oznacza, że ktoś jest wysoki, a ktoś niski, ktoś chudy, a ktoś gruby? To raczej epitet niż rzeczywista konstatacja. Czy można powiedzieć, że wysoki to ten, kto ma 170 cm wzrostu, czy dopiero 180 cm? Wzorce zmieniały się przez wieki, np. dziś ludzie są wyżsi od przodków przeciętnie o 11 cm. Podobnie z określeniami „chudy”, „gruby” i ze wszystkimi innymi porównaniami. Dotyczy to nie tylko ludzi – oceniamy „na oko”, według własnej miary – który samochód jest szybki, który stół jest duży. Dlatego łatwiej określać kto, co jest bardziej, mniej od czegoś (benchmark).

Wypatruj i szacuj. Ustalaj, co jest naj-, w jakiej konkurencji. Dobrze wybieraj benchmark, czyli to „coś”, do czego porównujesz, obiekt odniesienia. Z czasem wejdzie ci to w krew (tak się mówi) i nawet nie będziesz zauważać, jak łatwo porównujesz obiekty, cechy w odniesieniu do „czegoś”.





## □ Domowe porównania

Analizować można wszystko – relacje, zależności. W domu, w podróży, w myślach możesz bawić się, analizując, porównując, dociekając. Wszystko można porównywać, tylko lepiej z sensem, po coś, choćby dla zaspokojenia ciekawości. To już dużo!

Badaj i porównuj dla wprawy. Co? Wszystko. Pamiętaj tylko o odpowiednim zbiorze/zbiorach i kryteriach.

Przykłady domowych porównań:

- Który pokój jest najmniejszy? (Uwaga: gdy pytanie będzie dotyczyło pomieszczeń, odpowiedź może być inna, bo być może najmniejsza jest kuchnia albo WC.)
- Czego domownicy piją więcej: herbaty czy kawy?



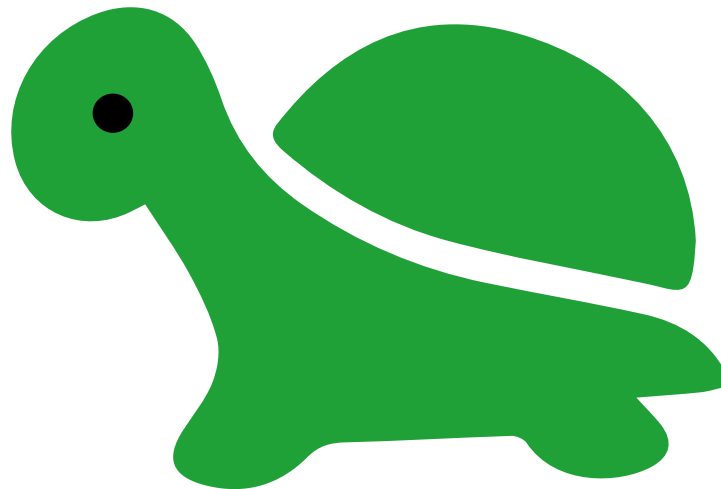
- Która woda mineralna ma najwięcej wapnia?
- Których owoców zjadacie najczęściej (które lubicie najbardziej)?
- Która droga do przystanku jest najkrótsza?
- W którym sklepie najczęściej robicie zakupy?
- Czy częściej na obiad jest ryż, czy makaron?
- Czy szybciej jest zejść na piechotę, czy zjechać windą?
- Czy dalej jest do sklepu, czy na plac zabaw?

## □ Praktyczna sztuka porównywania

W ludzkiej naturze leży ciekawość. Jak ją zaspokoić? Zadajemy sobie i innym pytania, szukamy odpowiedzi. Setki pytań, już od dziecka, bo dzieci bez żadnych instrukcji, intuicyjnie i bezlitośnie często stosują najlepszą taktykę – pytają bezustannie o wszystko. Niektórym to mija w wieku szkolnym, innym zostaje na całe życie.

Gdy chcesz się czegoś dowiedzieć, szukasz informacji. Gdy chcesz coś porównać, musisz znać lub znaleźć co najmniej dwie dane. Metody znajdowania i porównywania informacji mogą być bardzo różne, zależą od sytuacji. Niektóre rzeczy się po prostu wie (co ma dłuższą szyję – żyrafa czy koń?), inne możemy oszacować intuicyjnie lub na oko (co jest wyższe – krakowskie Sukiennice czy warszawski Pałac Kultury i Nauki), inne wymagają poszukiwania danych w źródłach, pomiarów, bywa, że bardzo zaawansowanych analiz, badań.

Gdy masz zamiar coś porównać – liczebność, wielkość, masę, szybkość, cenę – musisz znać dane (być może trzeba będzie dokonać jakichś pomiarów?), policzyć lub oszacować porównywane wielkości. Bez tego ani rusz.



Porównuj, licz, szacuj, to niezła wprawka i zabawa.

Przykłady:

- Czy szybciej porusza się żółw, czy antylopa?
- Czy cieplej będzie jutro w Gdańsku, czy w Rzeszowie?
- Jaka waluta ma większą wartość – złoty polski czy euro?
- Gdzie zmieści się więcej osób – w autobusie czy w tramwaju?
- Co jest tańsze – podróż czterech osób ze Szczecina do Zakopanego pociągiem czy samochodem?
- Co więcej waży – litr mleka w butelce czy w kartonie?
- Co ma więcej kalorii – porcja pizzy czy duże frytki?

I tak w nieskończoność, jak dziecko...

## □ Quiz rodzinny

Nie od dziś wiadomo, że przez rozrywkę można dojść do wiedzy.



Szukasz różnych danych, zdobywasz informacje, więc może na bazie swoich poszukiwań stworzysz quiz dla rodziny? Na przykład codziennie przygotujesz 1, 2, 5... pytań, które możesz zadać przy kolacji. Pamiętaj o czterech odpowiedziach do wyboru.

## □ Audyt rodziny

Kto u was jest naj-? Na tak postawione pytanie nie ma odpowiedzi, bo ogólnie każdy jest tak samo naj-. Co nie znaczy, że nie możemy ustalić, kto jest naj- w jakiejś, jakiegokolwiek dziedzinie, pamiętając, że to wyjątkowo matematyka, która nikogo i niczego nie ocenia.

Czyli możesz robić różne rankingi. Każda konkurencja ma dwa oblicza – ktoś ma najwięcej, ktoś inny ma najmniej – zależy, od której strony analizujesz temat. Możesz zadać pytanie „Kto jest najwyższy” albo „Kto jest najniższy”. Skorzystaj z propozycji rodzinnych konkurencji albo wymyśl swoje.

Kto w rodzinie:

- jest najwyższy,
- najwięcej waży (jeśli to nie jest pilnie strzeżona tajemnica),
- ma najdłuższe włosy,





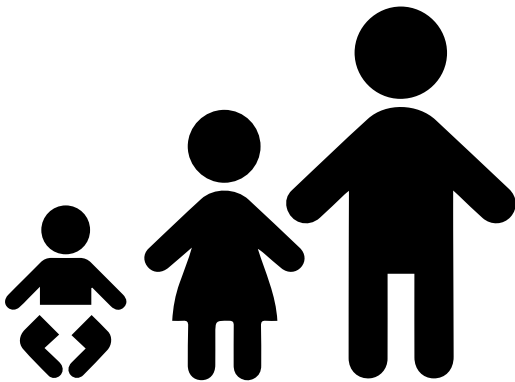
” **Nie wiem, jak wyglądam w oczach świata, lecz dla siebie jestem tylko chłopcem bawiącym się na morskim brzegu, pochylającym się i znajdującym piękniejszą muszelkę lub kamień gładszy niż inne, podczas gdy wielki ocean prawdy jest ciągle zakryty przede mną**

Isaac Newton

- ma najdłużej prawo jazdy,
- ma najwięcej siwych włosów,
- jest najmłodszy,
- ma największy zasięg rąk (czyli sąg),
- itd.

### □ Stopniowanie – minimum trzy

Masz dwa jabłka. Czy możesz powiedzieć, że jedno z nich jest największe? Nie. Jest większe, ponieważ je porównujesz jedynie z drugim. Ale gdy masz trzy jabłka albo więcej, możesz wybrać, które jest naj-. Czy można być jednym z dwojga rodzeństwa i powiedzieć, że jest się najstarszym bratem/siostrą? Nie. W takiej konfiguracji można być starszym bratem/siostrą.

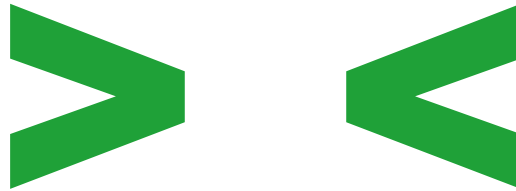


Rozejrzyj się, do porównania których rzeczy w zasięgu wzroku przyda się ta reguła?

### □ Mniejsze, większe

Nawet minimalna różnica w matematyce powoduje, że nie możemy użyć znaku równości. Do oznaczenia „prawie” służy osobny znak „≈”. Porównując nierówne, wyrażone matematycznie dwie wartości tworzymy między nimi relację większości bądź mniejszości, żeby to wyrazić matematycznie, używamy znaków mniejszości „<” lub większości „>”. Gdy masz 10 gruszek i 5 jabłek, najprościej powiesz, że masz więcej gruszek niż jabłek, możesz powiedzieć

też bardziej formalnie, że liczba gruszek jest większa niż liczba jabłek. Jeśli chcesz to zapisać precyzyjnie, możesz skorzystać z matematycznego znaku:  $10 > 5$ . Takim skrótem można zapisywać relację między dowolnymi liczbami.



Czy to jasne, że dziubek zawsze wskazuje mniejszą wartość? Spróbuj matematycznie zapisać, czego jest więcej, czego mniej? Co jest większe, a co mniejsze? Co jest lżejsze, a co cięższe? W zapisie możesz używać słów, nazw porównywanych obiektów (10 gruszek > 5 jabłek) lub samych liczb ( $10 > 5$ ).

### □ Naj-, naj-, naj-...

Kto nie lubi rekordów? Bywają emocjonujące, ożywiają wyobraźnię. Najbardziej znanym źródłem informacji na ich temat jest „Księga rekordów Guinnessa”, gdzie odnotowywane są udokumentowane rekordy świata. Rekordy mogą być naturalne (najdłuższa rzeka, najwyższa góra, najniższy człowiek), jak i osiągnięte przez ludzi np. największy obraz ułożony z materiałów wtórnych, czy najdłuższy „żywy” łańcuch obrazujący rozwinięcie liczby Pi (rekord Polski należy do mFundacji!).

Przyłącz się do rekordów. Masz kilka dróg:

- prosta – poznaj ciekawe rekordy, poczytaj, przejrzyj internet – zadziw się tym, co może być naj-... Czasami to się w głowie nie mieści.
- też prosta, ale mniej oczywista – porozglądaj się, poobserwuj świat dookoła – może coś wpadnie ci w oko i zapoczątkuje twój własny ranking – najwyższe drzewa, największe lody, najzimniejsza woda w morzu. Cokolwiek naj-... już jest tematem.
- ambitna – a nuż przyjdzie ci do głowy jakaś świeża idea, niekoniecznie łatwa, ale możliwa do zrealizowania w twoim otoczeniu.

Może zainicjujesz akcję? Kategorią może być wszystko, zainspiruj się rekordami z księgi Guinnessa albo twórz własne konkurencje. Czy w biciu rekordów ważny jest sens? Cel? Jak myślisz?

### □ Rodzinna księga rekordów

Macie domowy album? Domową filmotekę? Domową książkę kucharską? Może czas założyć domową księgę rekordów?

Wymyślajcie rodzinne kategorie, konkurencje i działajcie, zapisujcie wyniki rekordzistów. Uwaga – mogą padać nowe rekordy.

- Kto najdłużej śpi?
- Kto kiedykolwiek zjadł najwięcej lodów?
- Kto zbudował najwyższą wieżę z kubków po jogurcie?
- Kto najwięcej razy leciał samolotem?
- Kto najszybciej zbiegł ze schodów?
- Kto obejrzał najwięcej odcinków serialu za jednym razem?
- Kto przejechał najdłuższy odcinek na rowerze?
- Kto odwiedził najwięcej krajów?
- Kto najdalej skacze w dal?
- Kto wypija najwięcej wody?
- Kto zjada najwięcej jajek?
- Kto chodzi na najdłuższe spacery?
- Kto najwięcej czyta?
- Kto najczęściej wychodzi z psem na spacer?
- Kto najszybciej opróżni pełną zmywarkę?
- Kto najwyżej podskoczy?
- Kto ma najwięcej par butów?
- Kto zna najwięcej języków obcych?
- Kto najczęściej wygrywa w grze w kości (albo w dowolnej innej grze)?

### □ Wybory

Wybory w demokratycznych systemach wygrywa większość. Wyniki wyborów w skali państwa, gminy, miasta mają istotne znaczenie – obywatele w głosowaniu udzielają poparcia określonej wizji rządzenia krajem, miastem, gminą. W wyborach wybiera się prezydenta, posłów, burmistrzów. Ale głosowanie można urządzić w szkole, w domu, może dotyczyć dowolnego zagadnienia. Głos można oddać na konkretną osobę (np. na prezydenta), na partię albo na sprawę, ale każdy głos się liczy, co ważne.

Spróbuj w rodzinnym gronie tej techniki podejmowania





decyzji na gruncie argumentów (w przeciwieństwie do podejmowania decyzji losowo, np. na podstawie wyniku rzutu kością, monetą, losowania). Kto jest „za”, kto „przeciw”? Pamiętaj, że przed głosowaniem warto porozmawiać, przedstawić punkt widzenia. Jakie domowe wybory możesz zorganizować? Ważne pytanie – ile minimum osób musi brać udział w wyborach, żeby większość zdecydowała? Pamiętaj, gdy głosujących jest parzysta liczba, trzeba wymyślić, co zrobić, gdy będzie remis.

Jest mnóstwo tematów, poważnych i niepoważnych:

- Na który film idziemy do kina?
- Czy wyjeżdżamy do lasu na grzyby, czy idziemy do parku trampolin?
- Czy ważniejszy jest zakup roweru, czy odkurzacza?
- Czy na kolację mają być naleśniki, czy zapiekanka?
- Którego aktora/aktorkę lubimy najbardziej?
- Czy na wakacje jedziemy nad morze, czy w góry?
- Czy babci na urodziny kupujemy książkę, czy apaszkę?

## □ Zabawa w przymiarki

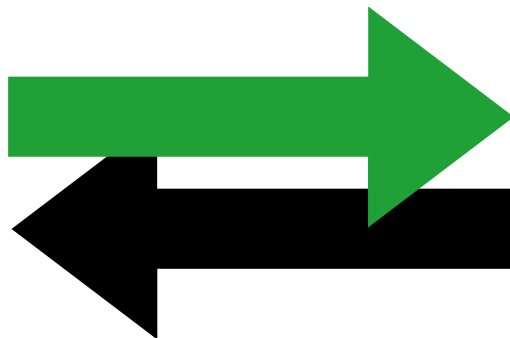
W życiu liczy się umiejętność oceniania „na oko”. Warto ćwiczyć, by nabrać wprawy, bo takich wyzwań na każdego czeka naprawdę dużo – wyrobić się można i warto w wielu konkurencjach – ocenie szybkości, odległości, pojemności, liczebności, wagi, powierzchni...

Przeprowadź domowe badania. Na początek niech to będzie np. ocena pojemności. Przyda się dużo naczyń, pojemników – o różnej wielkości, kształcie, przeznaczeniu. Czy już na oko możesz uszeregować je od największego do najmniejszego? Co możesz zrobić, gdy masz wątpliwość? Jak ustalić, co jest większe? Czy jest jedna uniwersalna metoda, czy też można sobie radzić w różny sposób? Pewnie dojdiesz do wniosku, że porównywanie nie jest takie oczywiste, nie wystarczy intuicja. No cóż, samo życie. Ale czy ciekawiej byłoby, gdybyś miała/miał 30 identycznych pojemników?

## □ Różne punkty widzenia

Czasami słyszymy, że wszystko jest względne, że punkt widzenia zależy od punktu siedzenia. Warto to mieć na oku i na myśli. Ktoś komuś tłumaczy drogę przez telefon – dla jednego „skręcić w prawo” to nie to samo, co dla drugiego (może stoi po drugiej stronie ulicy i dla niego „prawo” to „lewo”?). Ktoś patrzy na leżącą na stole „dziewiątkę” i widzi „dziewiątkę”, a dla kogoś po drugiej stronie stołu to nie „dziewiątkę”, a „szóstka”, coś jest wypukłe, coś jest wklęsłe, czegoś jest mniej, czegoś więcej – zależy, skąd

patrzemy. Nie zawsze to, co widzimy, jest jedynym obrazem sytuacji.



Wypróbuj to. Poproś np. o dużo, dużo guzików (w każdym domu jest ich wiele, dorośli zbierają je na wszelki wypadek). I ułóż je w szeregu na stole od najmniejszego do największego. Jaki szereg ujrzysz, gdy przejdziesz na drugą stronę stołu? Czy tak może być ze wszystkim? Co zobaczysz, gdy popatrzysz na szereg z dwóch pozostałych boków stołu (zakładając, że stół jest prostokątny)?

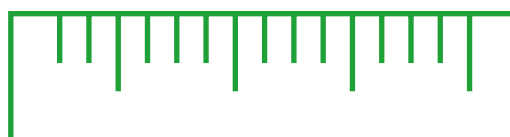
## □ Golono, strzyżono

Różnice mogą też dotyczyć abstrakcyjnych ocen i abstrakcyjnych punktów widzenia. Dla jednego coś jest „tanio”, dla innego „drogo”, ktoś uważa, że jest czegoś „mało”, inny – że „dużo”. Komuś coś wydaje się „śmieszne”, „mądre”, dla innego to samo jest „nieśmieszne”, „głupie”. Dla jednego może być tak, dla kogoś innego inaczej. Trzeba ustalić bazę, w innym przypadku trudno będzie uzgodnić stanowiska, a dyskusja zgodnie z tytułem i tematem wiersza Adama Mickiewicza „Golono, strzyżono” przemieni się w bezproduktywną licytację.

Wyostrz radar. Gdy zauważysz, że dyskusja idzie w złą stronę, bez ustalonych zasad, uzgodnionych punktów widzenia – uporządkuj ją.

## □ Uzaniowe porównywanie

To, co da się zmierzyć, można zmierzyć: długość, szerokość, wysokość, głębokość, pojemność, objętość, ciężar, gęstość, a nawet zawartość czegoś w czymś, skład. A co zrobić z porównaniem tego, co uznaniowe? Uroda, smak, zapach, urok osobisty? Też porównujemy, lecz to już nie jest matematyka. Tu matematyka nie pomoże, musimy zdać się na swój osąd, intuicję, wyczucie. Być może to jedyny obszar, gdzie matematyka nam nie jest w stanie pomóc.



Zastanów się i wyłapuj sytuacje, gdy coś porównujesz, a matematyka nie przychodzi z pomocą.

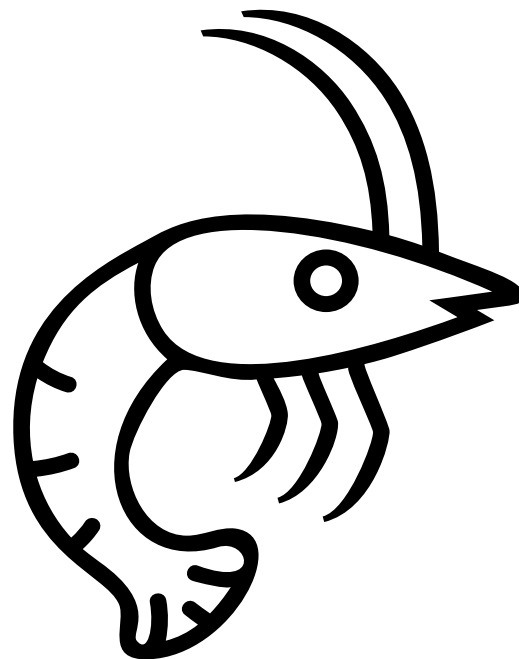
## □ Co to znaczy?

Mniej, więcej, mniejsze, większe – od dziecka wiemy, co oznaczają te pojęcia. Dziecko chce mniej kaszki, wyciąga rączki po większego misia. Ale kwestia mniejszości i większości oraz innych określeń związanych z porównaniami pojawia się w różnych związkach frazeologicznych, które opisują rzeczywistość.

Znasz takie określenia? Znasz te, to szukaj innych. Nie znasz, słyszysz po raz pierwszy – pomyśl, co mogą oznaczać. Porozmawiaj o tych sformułowaniach, poćwicz, jak można ich prawidłowo używać w potocznej mowie. Sprawdź, czy można zamienić każdy przymiotnik, np. „mniejsze” na „większe” i odwrotnie, albo mieszać, zamieniając np. „mniejsze” na „grubsze”? Czy sformułowania będą miały sens?

- Mniejsze zło.
- Wyższe wartości.
- Cieńszy od włosa.
- Głębsza myśl.
- Grubsza sprawa.
- Większy luzak.
- Niższa instancja.
- Cięższy kaliber.
- Jakie inne?...

## □ Mniejsze, większe a cena



Lubisz owoce morza? Kupujecie czasami mrożone krewetki? Różnią się pochodzeniem, wyglądem, smakiem i wielkością oraz ceną. Zwróć uwagę, że na opakowaniu podana jest informacja o liczbie krewetek na kilogram. Ogromnych może być 8, wielkich królewskich mięści się nie więcej niż 20 sztuk, dużych do 30 sztuk, średnich do 50. Najmniejsze już są w kategorii







„trudno policzalnych”, bo komu chciałoby się liczyć do 230? Oczywiście im większe krewetki, tym wyższa cena za kilogram.

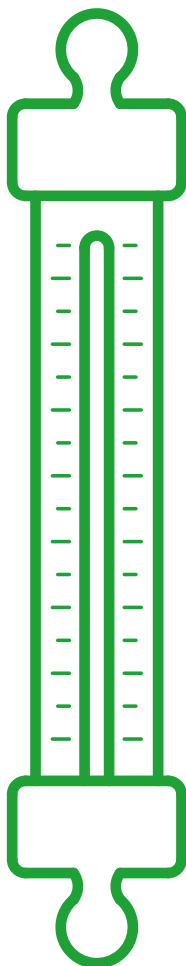
Czego innego cena zależy od wielkości? Krewetki im większe, tym droższe, a może przyjdzie ci na myśl odwrotna relacja – coś jest, tym droższe, im jednostkowo mniejsze? (np. pomidorki koktajlowe, małe marchewki, małe czekoladki...).

## □ Co to jest „skala”?

A to zależy, co kto ma na myśli. Pojęcie skali ma wiele znaczeń – matematyka ściśle łączy się tu z językiem potocznym. Skala zawsze daje możliwość określenia, co większe, co mniejsze, jakie są jeszcze możliwości. Z własnego doświadczenia znasz już kilka znaczeń. Na pewno.

Co spontanicznie przychodzi ci na myśl? Wypisz, a jak nie masz pomysłu, to zaznacz, które znaczenia znasz, rozumiesz, używasz:

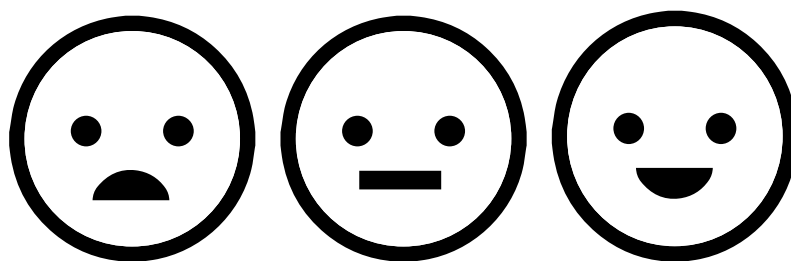
- skala wielkości – samoloty na niebie są malutkie, na pasie startowym wielkie,
- skala na termometrze – ile jest stopni, czyli wskazuje, jak jest ciepło, jak jest zimno,
- skala na mapie lub planie – daje nam informację, ile razy pomniejszone są rzeczywiste odległości (w jakiej skali są pokazane odległości na mapie, czy planie),
- skala działania – gdy coś robi się z rozmachem, w dużym zakresie,
- skala głosu – mówi się, że śpiewak ma szeroką skalę głosu (normalny człowiek ma 1,5 oktawy, wirtuoz głosu może mieć nawet 3 oktawy),
- skala głośności – możesz regulować głośność dźwięku płynącego z radia, telewizora,
- skala, czyli podziałka np. na centymetrze krawieckim.



## □ Skala do użytku domowego

Są też rzeczy, które określa się w skali nazywanej przeważnie od nazwiska naukowca, badacza, uczonego, który zbadał sprawę, podał kryteria i je określił. Wiele skali zostało ustalonych wieki temu i do dziś obowiązują. W skali można opisać prawie wszystko (albo wszystko?). Te bardziej znane, popularne to np. skala temperatury w stopniach Celsjusza, skala, na której określa się siłę wstrząsów podczas trzęsień Ziemi w stopniach Richtera, skala wiatru na morzu w stopniach Beauforta. Ktoś podaje wielkość i już wszystko wiadomo – czy jest ciepło, czy zimno, jak silne było trzęsienie ziemi, jak silny jest wiatr.

Ale skala może służyć też do użytku domowego. Skala jest dobra, żeby porównać stanowiska, preferencje, zadowolenie kilku osób. Ktoś lubi coś na 1, ktoś na 3, ktoś na 10. Zamiast opisywać coś, porównywać, wystarczy zapytać i wiadomo. Zanim zapytasz, ustal i zakomunikuj dwie niezbędne kwestie: jaką rozpiętość ma skala i co oznaczają jej stopnie (np. 1 – najmniej lubisz, 10 – najbardziej lubisz, albo 5 – bardzo ci czegoś brakuje, -5 – w ogóle ci tego nie brak). Skala nie musi być intuicyjnie rozumiana przez wszystkich. Upewnij się, czy każdy rozumie jej stopniowanie. Na przykład tak:



- Jak bardzo lubisz budyń czekoladowy albo brokuły? Określ w skali od 0 (w ogóle nie lubisz) do 10 (lubisz najbardziej na świecie),
- Czy i jak bardzo byłoby ci smutno, gdyby na świecie nie było ptaków albo komarów? Podaj wynik w skali od minus 5 (prawie nie smutno) do plus 5 (bardzo, bardzo smutno), gdzie 0 (nie mam zdania, ani smutno, ani nie smutno),
- Jak bardzo smakował ci schabowy na obiad? Skala od 1 (dało się zjeść, bez przyjemności) do 6 (był naprawdę doskonały),
- Jak oceniasz obejrzany film? W skali od 1 gwiazdka (szkoda czasu) do 5 gwiazdek (wybitne dzieło),

I tak dalej można pytać o wszystko, wszędzie, np. przy posiłkach, w podróży, w drodze do kina, na zakupach, na przyjęciu.

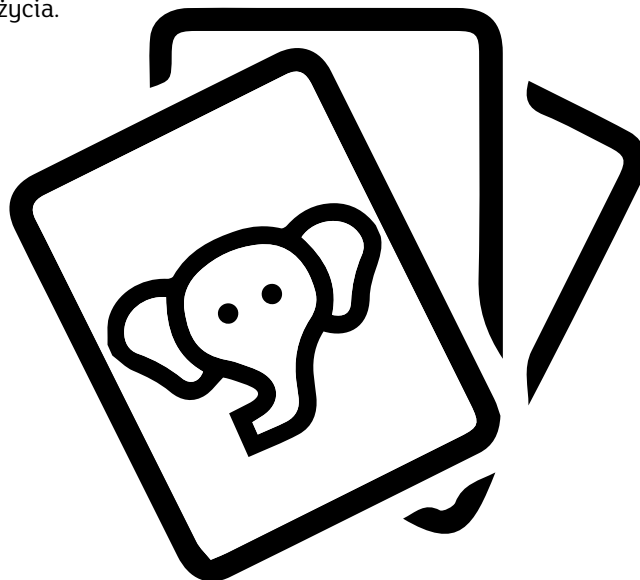
## □ Warto zrobić

Każdy zna grę karcianą w wojnę – dwie osoby wykładają po kolei karty ze swoich stosików. Kto ma kartę o większej wartości, zabiera obie karty. Gdy spotkają się karty tej samej wielkości, zaczyna się wojna. Każdy z graczy na swoją walczącą kartę kładzie jedną zakrytą, a następnie, na trzy cztery, obaj gracze odkrywają kolejne karty. Kto wygra, zabiera wszystkie 6 kart. Kto szybciej zbierze wszystkie karty przeciwnika, wygrywa. To może trochę potrwać, ale do biegłości opanujesz wyższość jednych kart nad innymi kartami: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W, D, K, A!

A gdyby tak zrobić własnoręcznie zestaw kart do gry w umowną wojnę zwierząt? Świat zwierząt jest doskonałym materiałem do ćwiczeń tego, co mniejsze, co większe. Zrób taki zestaw kart – dużo pracy, ale przy okazji sama/sam się rozwiniesz, poznasz gatunki zwierząt, do tego zaimponujesz zaproszonym do gry, błysniesz wiedzą w towarzystwie. Dobór zwierzęcych bohaterów należy do ciebie. Ilustracje narysujesz własnoręcznie, informacje znajdziesz w internecie albo w albumach. Gracz, który bierze kartę ze stosiku, ogląda ją i wybiera kategorię, w której według niego są duże szanse, że jego zwierzę wygra z pozostałymi. Np. żółw nie wygra z krową na ciężar, ale na długość życia na pewno.

Jakie informacje mogą być na kartach? Np.:

- wielkość,
- ciężar,
- liczba dzieci (składanych jaj),
- długość życia.





# Moda, czyli sztuka, geometria i harmonia

Ubrania przeważnie kupujemy w sklepach – są gotowe, możemy przebierać w nich do woli. Kiedy w sklepach nie było ich aż tyle, wiele osób, głównie pań, szyło ubrania w domu. Kupowało się pisma z wykrojami albo kopiowało wzory. Krawcowe amatorki dawały radę, więc i dziś każdy ma możliwość spróbować, choć mało komu się chce. Może, teraz gdy sporo ludzi ubiera się podobnie, wybierając głównie z kolekcji w sieciówkach, pora na powrót do fantazji w stroju? Jest szansa, tylko trzeba wziąć sprawę w swoje ręce i samodzielnie coś oryginalnego zaprojektować. Przy czym warto mieć świadomość, że wyłącznie najlepsi osiągają najwyższy podziw, sławę i dochodzą do fortuny. Można pójść tą ścieżką albo szyć dla siebie, dla rodziny, dla lalek i misiów. W drodze do sukcesu liczy się pomysł i jakość wykonania. Pomysł to kwestia fantazji, wyobraźni, kreatywności, jakość wykonania zależy od doskonałości wykroju, precyzji uszycia, staranności o szczegóły. To wszystko są naprawdę twórcze zajęcia... matematyczne.

## Młoda projektantka, młody projektant

Możesz zostać młodą projektantką, młodym projektantem garderoby – dla zabawek, dla siebie, dla rodziny. Istnieją telewizyjne show dla młodych kucharzy, będą dla najmłodszych kreatorów mody. Przygotuj się.

Czy tak samo ważne jest projektowanie ubrań dla misia i dla królowej? A dlaczego nie? Spróbuj. Zaczynaj od lalki, misia czy innego pluszaka. Na początek zaprojektuj cokolwiek. Niech to będzie najprostsza forma. Ciekawe, czy w pierwszym projekcie dostrzeżesz jakieś kształty geometryczne. A może punktem wyjścia będzie forma geometryczna?



Co nadaje się do wykorzystania:

- kawałki materiału, tasiemki, ścinki z resztek, z przeróbek, z nieużywanych ubrań, ze ścierek, koców, dywanów;
- papiery – strony z gazety, kartki z magazynów, różne kartki, serwetki, papier toaletowy, celofan;
- artykuły używane w kuchni – folia aluminiowa, pergamin, torebki foliowe, worki na śmieci, słomki do picia;
- materiały z recyklingu.

## Zajęcie dla wszystkich

Czy wiesz, że wielu mężczyzn zajmuje się projektowaniem mody? Wielu jest wręcz jej kreaturami. Więc to wcale nie jest tak, że ciuchy, szycie to babska sprawa. W projektowaniu mody, podobnie jak w gotowaniu, role się wyrównały.

Zrób próbę na najbliższej rodzinie – kogo najszybciej zainteresuje wspólne szycie? Czy to kobieta, czy też mężczyzna? Bez znaczenia.

## Lekcja na ulicy

Mówimy, że ładnemu we wszystkim ładnie. Prawda czy fałsz? Każdy z nas – pan czy pani, nastolatek czy dorosły – ma nie tylko swój styl, ale figurę. Czasami styl pasuje idealnie do figury (wtedy mówimy o harmonii), ale bywa, że nie. Z różnych powodów – ktoś nie przywiązuje wagi do mody, nie ma świadomości współgrania naturalnych warunków i fasonu odzieży, ślepo podąża za modą, nie zwracając uwagi na figurę. Interesujące są obserwacje, choćby mijanych na ulicy osób. Kto się prezentuje świetnie, a kto nie najzgrabniej? Czasami wystarczy zmiana długości spódnicy, inny fason marynarki, inny krój spodni i już wyglądamy jak wprost z wybiegu mody. Ktoś, kto zajmuje się doborem odzieży to stylistka, stylistka. A co stoi za zmianą wizerunku – przede wszystkim GEOMETRIA.

Przyglądaj się ludziom na ulicy. I w żadnym razie nie chodzi o obgadywanie, komentowanie – każdy ubiera się, jak chce, jak lubi. Nic nikomu do tego. Choć strój innych ludzi to też temat – gdy zaczniesz zwracać uwagę na ubiór, szybko potąpiesz się, na czym polega dobra kompozycja. Obserwuj nowe trendy, poznaj historię mody – to świetna lekcja proporcji, harmonii.

## Magiczna 11

Ile rzeczy można na siebie założyć? To zależy. W upalne lato wystarczy kostium kąpielowy i klapki. To dwie, trzy rzeczy. Gdy zimą ubieramy się na cebulkę, tych elementów może być bardzo wiele (może kiedyś policzysz?). Ale w „magicznej 11” nie chodzi o warstwy, tylko o widoczne elementy garderoby. Nie powinno ich być więcej niż 11, bo będziesz wyglądać „jak choinka”. Liczą się wszystkie części garderoby oraz dodatki, ozdoby – buty, skarpetki (bo widać je spod spodni), torebka albo plecak, pierścionki, zegarek, paski, czapka, korale, kolczyki... Oczywiście te parzyste – rękawiczki czy buty – liczymy jako jeden element, ale coś bardzo wzorzystego, coś w kratę można policzyć za dwa.



Policz, ile masz na sobie widocznych elementów garderoby. Podsumuj ubiór tych, których masz w polu widzenia.

## Kształty w modzie czy moda w kształtach?

W modzie kształt to podstawa. Nic nie jest bez kształtu (nawet worek ma kształt). Moda ma to do siebie, że się zmienia, żeby nie było nudno. Raz modne są spódnice bananowe, raz trapezowe, raz spodnie rurki, a raz dzwony.

Gdzie w modzie widzisz kształty? Jakie figury geometryczne zauważasz? Popatrz pod tym kątem na garderobę.

- Trapez – spódnica

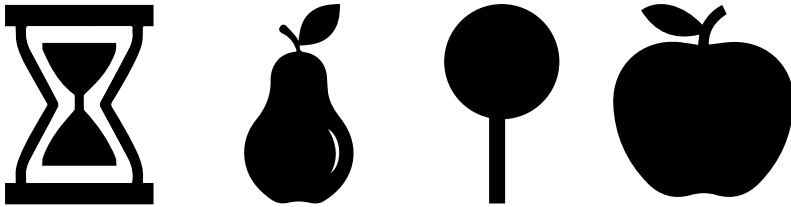




- Koło – spódnica, dekolt
  - Trójkąt – spodnie dzwony
  - Prostokąt – spodnie rurki
  - Esy-floresy – spódnica bananowa
  - Linie równoległe – spodnie
  - Linie prostopadłe – T-shirt
- Coś jeszcze?

## Rodzaje sylwetek

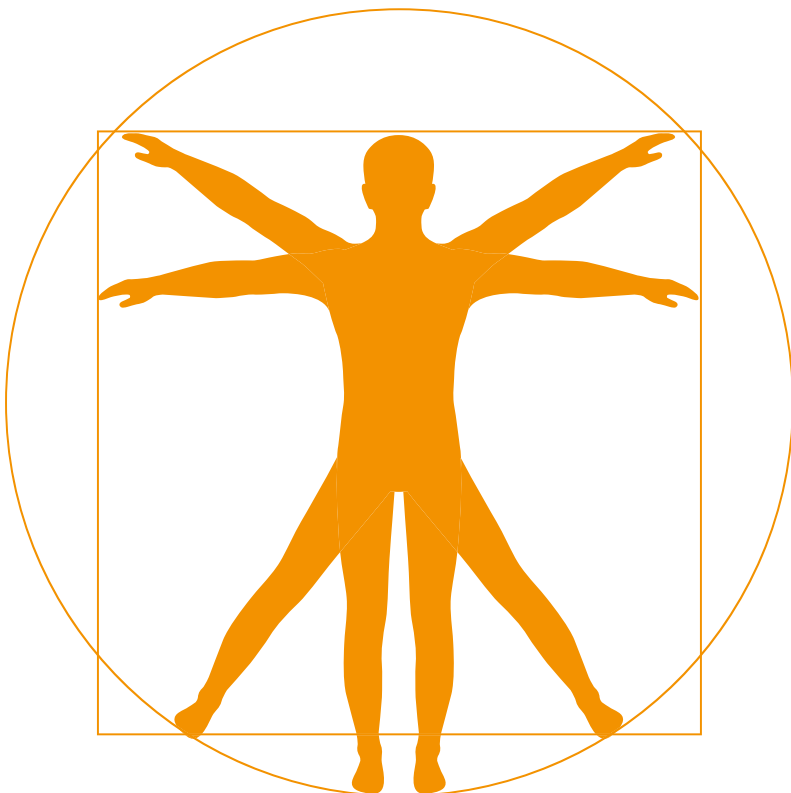
Każdy człowiek jest inny i każdy jest piękny. Różnimy się nie tylko wzrostem, ale i typem sylwetek (nasza budowa to czysta geometria), kształtem palców, paznokci, owalem twarzy, kształtem ust, brwi...



Przyglądaj się. Narysuj w uproszczeniu rodzaje sylwetek, wykorzystując figury geometryczne. Jakie figury odpowiadają kształtem sylwetkom? Kształty sylwetek: kielich, wazon, dzwon, klepsydra, rożek, wiolonczela, cegła, jabłko, gruszka, lizak, kolumna, kręgiel.

## Modelki i modele

Do każdej sylwetki można dobrać odpowiedni strój – tak, by podkreślał zalety, mocne strony, tuszował niedoskonałości. Specjaliści w magazynach, programach telewizyjnych podpowiadają, doradzają, edukują kobiety i mężczyzn, jak się ubierać i jak się nie ubierać. To wcale nie jest takie proste. A kto nie chce wyglądać super? Gdy kupujemy ubrania, bywa, że kierujemy się impulsem, zachwyceni strojem prezentowanym na manekinach albo na idealnie, lub prawie idealnie, zbudowanych modelkach, modelach. To jest marketing. A czy jest i czym jest ideał sylwetki? Prace nad proporcjami człowieka w XV wieku rozpoczął Leonardo da Vinci, genialny włoski wizjoner, malarz, matematyk, wzór renesansowego człowieka wielu talentów i zainteresowań. To mistrz Leonardo stworzył człowieka witruwiańskiego – ideał proporcjonalnej budowy ludzkiego ciała.



Zobacz koniecznie rysunek przedstawiający studium proporcji sylwetki mężczyzny wpisanego w koło i kwadrat. Jak się okazuje (może odkryjesz to samodzielnie?) idealna sylwetka ma wiele związków z tak zwanym złotym podziałem, czyli złotą proporcją (przede wszystkim pępek dzieli ludzkie ciało na dwie części zgodnie z tą proporcją: 1 do 1,618). Więcej na ten temat przeczytasz w rozdziale o proporcji. W związku z modą zapamiętaj, że choć projektanci, kreatorzy mody tak dobierają modeli i modelki, by ubrania prezentowały się idealnie, to w życiu nie ma ideałów. Albo są wyjątkami.

## Splot pod lupą

Ubrania szyte są z tkanin, te są wyrabiane z przędz, przędze z materiałów, a materiały z surowców – naturalnych lub sztucznych. Kiedyś wszystko, co ludzie nosili i w ogóle wszystko, z czego korzystali, było naturalne, to znaczy pochodziło z występujących w przyrodzie surowców. Tkaniny tkano z bawełny, wełny, lnu, jedwabiu. Dziś bez tworzyw sztucznych trudno sobie wyobrazić cokolwiek, ale obserwuje się powrót do natury. Coraz więcej osób znów ją docenia. W cenie są naturalne materiały i rękodzieło, czyli produkty wyrabiane ręcznie.



Weź pod lupę kilka materiałów. Spójrz przez szkło powiększające na sploty różnych tkanin. Zobaczysz, jak krzyżują się nitki. Sploty to też temat matematyczny – zawsze muszą być nitki poziome (to wątek) i pionowe (osnowa). Kiedyś wszystkie tkaniny były tkane ręcznie. Dziś też jest możliwe. Wystarczy mieć mini warsztat tkacki – na początek ramę i gwoździکی (poszukaj w internecie) oraz włóczkę i sznurek. Zobaczysz, jak z każdym ruchem przybywa tkaniny.

## Przede wszystkim pomysł...

Projektując ubrania (bo każde ubranie musi być zaprojektowane), trzeba mieć pomysł – na fason. Kreatywność ludzka nie ma granic – możemy wybierać wśród ogromnej, niedającej się policzyć ludzkiej siły (czyli nie da się powiedzieć, że na świecie jest np. 1056 modeli jeansów) ilości fasonów i wzorów wszystkich możliwych części garderoby.

Jak naszkicujesz ubraną postać (w dowolnej technice), to będzie wizja artystyczna, ale jak zaprojektujesz ubranie – to już będzie geometria, logika, arytmetyka i rysunek wykreślony. Spróbujesz? Co będzie pierwsze?

## ...Potem projekt, czyli wykrój

Wykrój – papierowy model części ubrania – jest podstawą do wykrojenia elementów z materiału i jednocześnie instrukcją łączenia poszczególnych części. Tak jak teoretycznie oczywisty jest wykrój na spódnicę trapezową albo rozkloszowaną, wyciętą z koła (wyobraź to sobie), to już kształt rękawa czy nogawki spodni naprawdę może być geometrycznym odkryciem : ). Wykroje ubrań nie muszą być oczywiste.

Masz koncepcję? Chcesz zrobić coś na poważnie? Poszukaj wzorów albo wymyśl coś samodzielnie. Metoda prób i błędów przyda się jak zawsze.





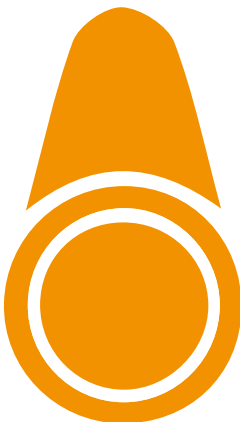
## □ Twórcza destrukcja

Czasami, żeby sobie coś wyobrazić, trzeba coś zepsuć.

Masz stare, zniszczone spodnie albo inną część garderoby? Rozpruj, a jak nie masz cierpliwości, potnij nożyczkami ubranie wzdłuż szwów, by wszystkie części dały się ułożyć na płasko. Ułóż je tak, by zajęły jak najmniejszą powierzchnię. Pamiętaj o odstępach na podwinięcia, szwy. Ile powierzchni zajmą? Możesz położyć je na arkuszu papieru i odrysować. To będzie twój pierwszy wykroj – z grubsza. Wyobrazisz sobie, ile materiału potrzeba, by uszyć jedno ubranie.

## □ Wykroj próbny

Przystawie mówi: „Tak krawiec kraje, jak materii staje”. I trudno się nie zgodzić. Masz skrawek materiału – możesz uszyć coś dla lalki albo misia. Masz więcej? To już pole do popisu, ale nie wiadomo, czy starczy na wszystkie elementy garderoby. Trzeba przewidzieć, ile materiału dać na przód, na tył, na rękawy, na nogawki, cokolwiek to będzie, uwzględnić zapasy na szwy. Musisz kupić nowy materiał? Ale ile? Nie warto kupować za wiele, bo po co? A za mało to w ogóle bez sensu. Projektowanie mody to sztuka i... matematyka, oczywiście.



Materiały produkowane są w długich odcinkach, zwijanych w bele, o określonej szerokości. By kupić odpowiednią ilość materiału, trzeba wiedzieć, jaką ma on szerokość, i wymierzyć jego niezbędną długość. Jak policzyć, ile potrzeba materiału na spodnie dla ciebie, spódnice dla lalki, T-shirt dla pluszaka? Przemyśl, co i jak, narysuj projekt na papierze, na próbę. Wytnij formę z papieru. Pasuje? Super, można kupować materiał (albo wykorzystać dostępny) i przenieść wykroj na tkaninę. Nie pasuje – trzeba wprowadzić zmiany. I powtórzyć przymiarę.

## □ Filozoficzne pytanie

Czy w modzie można zrobić coś z niczego? A w innych dziedzinach życia?

Jak myślisz?

## □ Materiał symetryczny czy nie?

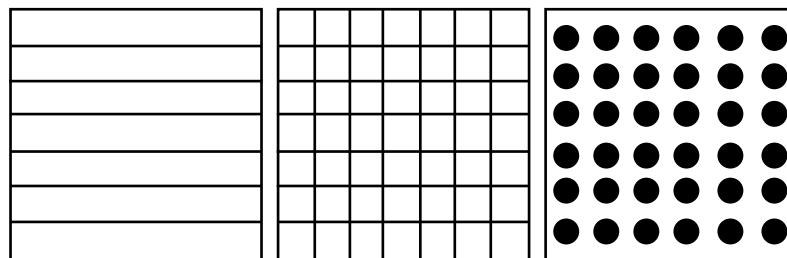
Materiałów jest mnóstwo. Różnią się między sobą: rodzajem włókna, grubością, fakturą, splotem. Niektóre rzeczy szyje się z bawełny, inne z wełny, sztruksu, jedwabiu, polaru.

Przy projektowaniu weź pod uwagę, czy materiał jest „symetryczny” – to znaczy, czy niezależnie od tego, w którą stronę na niego patrzymy, wygląda tak samo czy nie. Przykładem „niesymetrycznego” materiału jest welwet – materiał, który inaczej wygląda „z włosiem”, inaczej „pod włos”. A to oznacza, że wszystkie elementy trzeba tak ze sobą zestawić, by były identyczne, inaczej byłaby zauważalna różnica w wyglądzie (fakturze, kolorze), np. prawej i lewej nogawki.

## □ Paski, groszki, kratka, pepitka...

Moda się ciągle zmienia – nowe fasony, kolory, wzory, style. To dobrze, bo się nie nudzi. Moda to materiał, a materiał niezależnie od tego, z czego jest utkany, może mieć dowolny wzór. Bywają modne wzory geometryczne, wtedy królują romby, kwadraty, koła, czyli groszki, w kolejnym

sezonie nastają pasy, kratka (czy wiesz, że Szkoci chodzą w spódnicach w kratę według wzoru zgodnego z tradycją ich klanów?), a po nich przebojem stają się esy-floresy.



Poszukaj w swoim otoczeniu różnych tkanin. Ciekawe, jakie matematyczne wątki zauważysz. Rozglądaj się, wypatruj geometrycznych motywów – miejska ulica jest doskonałym terenem obserwacji.

## □ Wzór otwarty czy zamknięty?

Jedni lubią ubrania we wzory, inni wolą gładkie. Jak zwykle: co kto lubi. W sklepach z materiałami na półkach piętrzą się bele tkanin z różnych włókien, o różnym przeznaczeniu, na różne okazje – gładkie i wzorzyste. Wzory są albo tkane (maszyny tkackie dobierają kolory przędzy zgodnie z zadanym algorytmem) albo nadrukowywane na gładką tkaninę. Właściwie wszystkie wzorzyste materiały sprzedawane z bel mają wzorki powtarzalne – czy to pasy, groszki, łączka, pepitka, czy dowolne drobne motywy – to wzory otwarte. Taki materiał można odciąć w dowolnym miejscu, uszyć z niego cokolwiek, zawsze będzie ta sama kompozycja elementów, ten sam wzór. Inaczej rzecz się ma, gdy wzór jest pojedynczy np. napis z przodu T-shirtu, jakiś obrazek na plecach bluzy dresowej, aplikacja na czapce. To kompozycje zamknięte, które różnymi technikami nanosi się na gotowe sztuki odzieży.

Widzisz różnicę? Spójrz na swoją garderobę. Jakich ubrań masz najwięcej: gładkich, we wzory otwarte czy zamknięte? Jakiej najbardziej lubisz? A może zaprojektujesz jakąś tkaninę, jakiś wzór? Co to będzie?

## □ Paleta barw

Moda to nie tylko fason, materiał, ale i kolor. A to jest temat.

Wracając do mody i ubrań, zastanów się dobrze, czy umiesz odpowiedzieć na takie pytania?

- Ubrania w jakich kolorach lubisz najbardziej? W jakich kolorach w ogóle się nie widzisz?
- Jakie połączenia kolorów lubisz? Jakich nie lubisz?
- Czy wiesz, które kolory do ciebie pasują, w których najlepiej wyglądasz? Każdy człowiek ma swój typ urody. Do każdego pasuje paleta barw. Przy okazji zaproś kogoś zainteresowanego tematem do zabawy i ustalcie, jakim typem jesteś: wiosną, latem, jesienią czy zimą? Dowiedz się, co z tego wynika.
- W otoczeniu których barw czujesz się najlepiej?



Do prób i przymiarek przydadzą się kolorowe papiery, tkaniny, ubrania. Tego nie da się wymyślić teoretycznie, trzeba przymierzyć. I najważniejsze pytanie – czy w kolorach jest matematyka?

## □ Liczenie oczek

Jeszcze jeden, trochę zapomniany i niedoceniany, pomysł na własnoręczne tworzenie garderoby – dzierganie na drutach. Znasz tę technikę?





Dobrze mieć kogoś (może babcia?), kto wprowadzi cię w tajniki robienia oczek – prawych, lewych, może z czasem też bardziej skomplikowanych. Gdzie tu matematyka – każde oczko to węzeł. Przyjrzyj się, jak powstają, jak się łączą. Nawet jeśli zaczniesz od prostego szalika, musisz przewidzieć, ile oczek szerokości ma mieć twoje dzieło, przy następnych dojdą inne aspekty matematyczne.

Do rozpoczęcia wystarczy trochę (zależy, co masz w planie wydziergać) włóczki (na początek lepsza będzie grubsza) i dwa druty. Zaczynaj od prostych oczek – może być tak zwany ściągacz, czyli naprzemiennie oczka prawe i lewe, albo ścieg dżersejowy, czyli jeden rząd prawych, kolejny same lewe. I zobaczysz, jak twój pierwszy szalik powstaje „w oczach”. Bonus (czyli korzyść dodatkowa) – wyćwiczysz palce i zadziwisz się swoją sprawnością.

## Ułamki w garderobie

Ułamki przydają się również w modzie. Nie są przedmiotem działań, ale pozwalają potocznie oddać efekt.

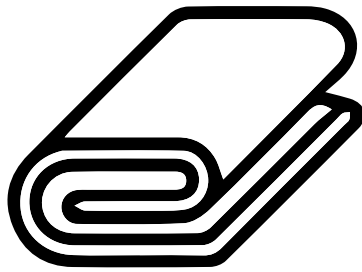
Czy wiesz, co oznaczają informacje:

- bluzka z rękawami  $3/4$ ,
- spodnie długości  $7/8$ ,
- spódnica  $5/6$ ?

Pokaż na sobie (możesz też na innych osobach), jakie to długości.

## Möbius w modzie

Masz za sobą przymiarki z papierową wstęgą (zobacz w rozdziale o linii)? Było ciekawie? Czy zgadzasz się, że wstęga Möbiusa jest fantastyczna? Może czas na zabawę z materiałem?



Zrób szal. Weź długi kawałek materiału – przymierz, czy starczy na jedno, a może na więcej owinąć szyi? Pamiętaj, że wstęgę trzeba będzie wkładać przez głowę. Skręć i zszyj końce. To będzie szal idealny. W zależności od rodzaju materiału – przyda się na lato albo na zimę. Może to pomysł na prezent dla kogoś?

## Paski ludowe

Wiele wzorów ludowych to pasy. Najstynniejsze są pasiaki łowickie. Dywany, kilimy, tkaniny ubraniowe tkane tradycyjnym sposobem z kolorowej przędzy. Kiedyś tkano ręcznie, powiedzielibyśmy, że algorytmy były analogowe (tkacz decydował, kiedy jakiej barwy przędzę użyć), dziś to już kwestia techniki i algorytmów cyfrowych.



# ” *Moda żyje zmianą*

**Karl Lagerfeld**

Poszukaj w internecie, jak wyglądają łowickie pasiaki, chyba że masz taką tkaninę, kilim, bieżnik w domu. Czy wiesz, na czym polega tkanie? Dowiedz się, to ciekawe zagadnienie – bazuje na ustalonych algorytmach. Pytanie na wyobraźnię: jak myślisz, dlaczego łatwo było tkąć pasy? Przyjrzyj się nie tylko pod kątem oceny artystycznej, ale i matematycznie:

- czy są symetrycznie rozmieszczone (czy mają oś symetrii)?
- czy wszystkie pasy mają taką samą szerokość?
- czy zauważasz powtarzalny układ?

Może zaprojektujesz własny wzór?

## Wizyta u fryzjera



Czy fryzjer to zawód związany z matematyką? Wydawałoby się, że nie. A jednak tak i to jak! Strzyżenie włosów to także geometria. Pewnie niewielu jest fryzjerów z dyplomem studiów matematycznych, ale z pewnością wiele matematyczek i matematyków doskonale radzi sobie amatorsko (lub mogłoby sobie radzić, gdyby mieli taki pomysł) ze sztuką strzyżenia, kształtowania fryzur (i tu zadziałałaby zasada: matematyk robi to lepiej : ). Są fryzjerzy, którzy strzygą intuicyjnie, nieświadomie stosując zasady geometrii, jest wielu, którzy kształcą się i doksztalcają z geometrii strzyżenia. Przede wszystkim muszą ostrzyć włosy równo albo pod kątem, przewidzieć jak ułożą się kolejne warstwy, które pasma muszą być krótsze, które dłuższe, by efekt był perfekcyjny. Do tego najlepsi styliści potrafią doradzić fason fryzury najodpowiedniejszy do kształtu głowy, twarzy, sylwetki. Upięcie koku, plectenie warkoczy, wiązanie końskiego ogona, kręcenie loków – wszystko bazuje na geometrii. Bez wyobraźni przestrzennej nie ma co marzyć o karierze fryzjerki/fryzjera.

Spójrz na fryzury jak na formy geometryczne. Będziesz w salonie fryzjerskim, zadaj pytanie o geometrię. Ciekawe co usłyszysz.





# Muzyka, czyli piękne brzmienie matematyki w czasie

Ile procent ludzi ma talent? Takie pytanie zadane publicznie zawsze rodzi namysł i padają różne odpowiedzi. Mówi się, że 2%. To daleko idący brak wiary w ludzkie moce. Prawdźowa odpowiedź: 100%, inaczej mówiąc, nie ma człowieka, który nie miałby jakiegoś talentu. Czyli każdy z nas go ma, ale nie u każdego został on odkryty, rozwinięty. To czysta strata dla ludzkości, ale taka jest praktyka. Na przykład Einstein nie miał łatwo w życiu, podobno źle się uczył, za wolno myślał. Na szczęście dla ludzkości trafił na mądrych nauczycieli i wychowawców, którzy nie zaprzepaścili jego potencjału. Nie każdemu tak się poszczęści. Talent muzyczny jest na uprzywilejowanej pozycji, bo trudno go nie zauważyć. Utalentowane muzycznie dziecko rytmicznie podryguje, śpiewa pięknie na urodzinach i akademiach, jak widzi instrument, bierze go do ręki lub siada i gra. Trudno też nie zauważyć, gdy ktoś nie ma talentu do muzyki, mówimy wtedy, że słoń jej/mu na ucho nadepnął. Antytalent może zostać koneserem muzyki, miłośnikiem baletu, pasjonatem opery, choć nut może nie zrozumieć, piosenki czysto nie zaśpiewa, dźwięku nie dopasuje do klawisza pianina. Za to ma talent do czegoś innego. Skąd ten wstęp? To rozdział dla każdego, bez względu na talent muzyczny, bez zagłębiania się w sedno zapisu nutowego, i innych wątków dla zaawansowanych. Bo jedni słyszą muzykę, widzą zapisy na papierze w pięć linii i czytają ten język jak z nut, dla innych to czarna magia, enigma.

## Ankieta personalna

Zdarza się, że talent do muzyki dziedziczy się z pokolenia na pokolenie. Bywają też rodziny, dla których zaśpiewanie kolęd w Wigilię jest za trudne. O kimś utalentowanym mówi się, że ma słuch (i nie chodzi o to, kto najlepiej słyszy bzyczenie komara czy szept w pociągu). Niektórzy mają nawet słuch absolutny. Jak jest w waszej rodzinie?

Możesz każdemu przyznać punkty, np. od 1 (głucha/głuchy na muzykę jak pień) do 10 (słuch absolutny). Ciekawe, jaka będzie średnia? Dowiesz się, gdy dodasz wszystkie punkty i podzielisz przez liczbę ankietowanych. Kto ma najwięcej punktów? Kto najmniej? Gdy już będzie pewne, kto ma najlepszy słuch, jasne stanie się, kto będzie twoim doradcą, ekspertem w krainie muzyki. Na pewno się zgodzi.



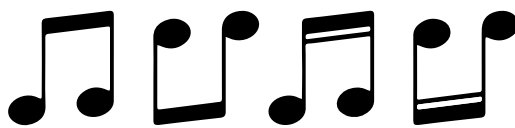
## 100 możliwości

Czym jest muzyka? Dla każdego czymś innym. Mówimy „muzyka” i każdy myśli o czymś innym. O ulubionym gatunku: „Muzyka to jazz”, „Jeżeli muzyka, to tylko symfoniczna”, o ulubionych kompozytorach: „Chopin, oczywiście”, „Muzyka to Bach”, o wykonawcach, o instrumentach, o sposobach słuchania muzyki, tematów bez końca. Dla ścisłych umysłów muzyka jest matematyką w czasie, dla humanistów może być poezją, dla wielu sensem życia, naj-

lepszym relaksem, odpowiedzi będzie tyle, ilu pytanym. Czym muzyka jest dla ciebie?

Zrób badanie. Może trwać dłużej. Zadawaj napotykanym osobom pytanie: „Czym jest dla pani/pana muzyka?”. Rozmówcy będą udzielać dowolnych odpowiedzi, więc czeka cię potem uszeregowanie ich w logiczne bloki. Jeszcze lepszą metodą jest zrobienie badania ankietowego. Przedtem musisz przygotować ankietę (od razu pogrupujesz odpowiedzi), gorzej, że musisz ją zawsze mieć przy sobie (albo wymyślisz patent z użyciem smartfonu). Gdy zestawisz dane, okaże się, czym dla twoich bliskich jest muzyka. Pomoże ci w tym wykres kołowy albo inne zestawienie danych. Jak się domyślasz, taką metodę badania opinii społecznej możesz wykorzystać w dowolnej sprawie.

## Muzyka a dźwięk



Kiedy pojawiły się pierwsze dźwięki świata? Podobnie jak z matematyką, już były, mimo że ludzie jeszcze na świecie nie było. Dźwięki w naturze muszą być odwieczne – wystarczy wiatr i szumią łąki, puszcze, jesienią szeleszczą liście, szumią lub huczą morskie fale, cichutko daje o sobie znać przenoszony przez bryzę piasek wydm, trzeszczy ziemia, łomoczą spadające kamienie. Odkąd istnieje Ziemia, zawsze musiał być dźwięk, nigdy nie mogło być cicho. Gdy na Ziemi pojawili się pierwsi ludzie, zaczęli naśladować odgłosy przyrody, przydawało się

wszystko, co naturalne: trawy, wydrążone gałęzie, muszle, kości, rogi, tykwy...

Dwa zadania na dłużej (może na życie):

- I muzyka, i dźwięki natury to fale. Fale to matematyka. Gdy słuchasz czegokolwiek, pomyśl przez chwilę – to matematyka!
- Gdy masz coś pod ręką, popatrz na to, jak na potencjalny instrument. Może uda ci się wydobyć z tego czegoś dźwięk? Niski, wysoki? Głośny, cichy? A w jakiej skali? To możesz określić samodzielnie. Pamiętaj – nawet kompozycja domowych odgłosów – uderzanie drewnianymi łyżkami, szeleszczenie gazetą, gra na kieliszkach – może być muzyką. A może coś skomponujesz?

## Na pomoc wyobraźni

Czy można pojąć matematykę (nie chodzi o nauczenie się, wykucie na pamięć) bez użycia wyobraźni? Pewnie nie ma badań naukowych na ten temat, ale to mało prawdopodobne. Czy można pojąć muzykę (jako czwarty wymiar) bez uruchomienia wyobraźni? Pewnie też nie.

A jak z twoją wyobraźnią, gdy rozmyślasz o matematyce (albo o czymś)? Posłuchaj muzyki, poeksperymentuj, przekonasz się, czy jest jakiś gatunek, brzmienie instrumentu, kompozytor, którego muzyka dobrze na ciebie wpływa, ożywia twoją wyobraźnię? Podczas słuchania ulubionej muzyki mózg wytwarza dopaminę, hormon odpowiadający za szczęście. Może warto spróbować? Podobno nawet kwiaty lepiej rosną przy muzyce.





## □ Ilu jest muzyków?

Do uwolnienia dźwięków wystarczy jeden instrument, jeden wykonawca – to solista, ale wiele utworów pisanych jest z myślą o wykonywaniu przez orkiestry symfoniczne. Kompozytor określa jakie i ile instrumentów będzie w składzie wykonawców. W wielkiej orkiestrze symfonicznej zasiada od 50 do 120 muzyków. Czasem kompozytor może przewidzieć jeszcze szerszy skład, takie wymagania miał np. Ryszard Wagner, niemiecki kompozytor romantyczny. Wielkość dzieła, wielkość wykonania nie zależy wprost proporcjonalnie od wielkości orkiestry. Muzyka odtwarzana w mniejszym składzie też pięknie rozbrzmiewa i zachwyca słuchaczy na całym świecie. Najmniejszy możliwy skład to? Oczywiście jedna artystka lub jeden artysta. Mówimy wtedy, że muzyk albo śpiewak (piosenkarz) występuje solo. Gdy tylko jeden artysta z zespołu gra przez chwilę popisowy numer, a reszta instrumentów milczy, mówimy, że to solówka. Solówka może być na fortepian, na skrzypce, na perkusję, saksofon...

A czy wiesz, z ilu muzyków składają się niewielkie zespoły: duet, tercet, kwartet, kwintet, sekstet, septet, oktet... Chyba łatwo się domyślić?

## □ Zbiory

Każda orkiestra – duża, mała, także zespół to zbiór złożony z mniejszych zbiorów. Jak to? W skład orkiestry wchodzi muzyki grający na różnych instrumentach. Każdy utwór pisany jest przez kompozytora z myślą o konkretnym składzie orkiestry, dlatego składy są różne. W czasie każdego koncertu na scenie gra suma różnych zbiorów.

Czy wiesz, jakie instrumenty grają w orkiestrze? Może nie znasz wszystkich, ale z większością pewnie nie będziesz mieć problemu. Jak będziesz na koncercie, słuchając muzyki, przyjrzyj się muzykom i ich instrumentom, pomyśl o zbiorach. Jakie zbiory można zorganizować?

Jest kilka kryteriów, każde dobre, byle było jednoznaczne i logiczne, np.:

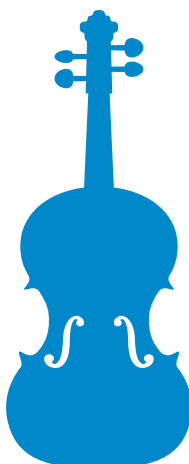
- rodzaje instrumentów (dęte, smyczkowe, blaszane, perkusyjne, klawiszowe i inne),
- liczba instrumentów (zbiór instrumentów, których jest 1, których jest 2, których jest więcej niż 3, ...),
- ze względu na umiejscowienie (z prawej strony dyrygenta, z lewej, z tyłu),
- ze względu na wielkość instrumentów (musisz doprecyzować kryterium wielkości),
- ze względu na brzmienie (lubisz, nie lubisz),
- ze względu na płeć muzyka (pani czy pan),
- ze względu na to, czy znasz te instrumenty, czy też widzisz po raz pierwszy,

Jaki zbiór na pewno jest jednoelementowy (jednoosobowy)? /dyrygentka albo dyrygent!//

## □ Grać pierwsze skrzypce

Sekcje smyczkowe przeważnie mają do odegrania ważną rolę. Najważniejsze partie, oznaczone przez kompozytora, grają tak zwane pierwsze skrzypce (choć wcale nie muszą być jedne, może ich być nawet kilkanaście), drugie skrzypce (to też sekcja złożona z większej liczby skrzypków) je uzupełniają. Reszta zespołu smyczkowego stanowi tło.

Znasz określenie „grać pierwsze skrzypce”? Jak myślisz, co oznacza? Może przy okazji znajdziesz inne powiedzenia, przysłowia z wykorzystaniem liczebników? Co to może być? Np.:



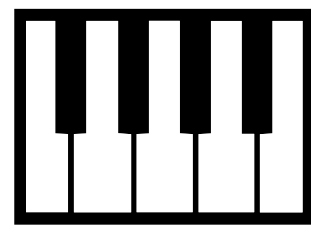
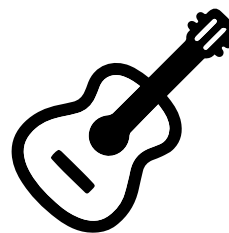
# ” **Matematyka rozwija pamięć, a także pomaga w rozgryzaniu architektury wielu utworów muzycznych, zwłaszcza współczesnych**

## Barbara Hendricks

- Dziesiąta woda po kisielu.
- Dzielić włos na czworo.
- Gdzie kucharek sześć, tam nie ma co jeść.
- Co dwie głowy, to nie jedna.
- Piąte przez dziesiąte.
- Każdy kij ma dwa końce.
- Trzy po trzy.
- Wygląda jak siedem nieszczęść.
- Kto szybko daje, dwa razy daje.

## □ Symetria w instrumentach

Jest wiele różnych instrumentów, różnią się zasadą wydawania dźwięku (strunowe, perkusyjne, dęte), budową, materiałem, z którego są wykonane, w efekcie wyglądem. Są instrumenty proste w budowie, np. trójkąt, są takie, które wymagają mistrzowskiej precyzji, maestrii wykonania – do takiej arystokracji należą skrzypce, fortepian.



Możesz sprawdzić, ile instrumentów znasz. Po prostu wypisz, co przyjdzie ci na myśl. Co widziałeś/widziałaś, słyszałaś/słyszałeś, na czym sama/sam grasz albo gra ktoś z rodziny. Popatrz, jak są zbudowane (pełną listę i ilustracje wszystkich znajdziesz oczywiście w internecie). Które są symetryczne? Czy więcej jest symetrycznych, czy niesymetrycznych?

## □ Kształty realnie

Każdy instrument ma kształt. To jest jasne. Ale jaki?

Czy potrafisz przyporządkować instrumenty do klasycznych kształtów – figur i/albo brył? Niektóre pary są banalne, np.: trójkąt – trójkąt, talerz – koło. Ale są trudniejsze dopasowania. Jaki kształt ma, twoim zdaniem, akordeon, a saksofon, fortepian? Gdy nie znajdziesz inspiracji w podstawowym zestawie figur, wymyśl nowy kształt i już. To tylko zabawa, więc na pytanie, jaki kształt ma fortepian, możesz odpowiedzieć śmiesznie –

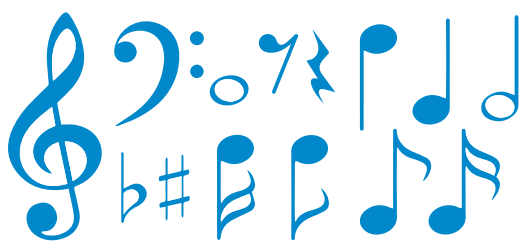




kształt fortepianu. I wcale nie jest to odpowiedź głupia, bo być może coś innego, co kiedyś zobaczysz, będzie miało właśnie kształt... fortepianu (na przykład obłok).

## ☐ Matematyczne pojęcie

Czy to jest sprawiedliwe, że jedni widzą nuty i grają, a inni nawet nie mogą sobie tego wyobrazić, nic im nie gra w duszy na widok pięciolinii? Tak jest i nikt, nic na to nie poradzi. Nuty to litery muzyki. Partytura jest nutowym zapisem utworu rozpisany na instrumenty, na ręce. Czy możliwe, że można grać, śpiewać, zachwycać się muzyką nie znając nut? Możliwe. Ktoś, kto nie umie pisać ani czytać, może mówić, słucha opowieści, zachwyca się nagraniem powieści. Ze znajomością nut i znajomością liter jest podobnie, ale jednak inaczej. W dzisiejszych czasach każdy umie pisać, czytać, choćby w minimalnym zakresie, a do słuchania muzyki nuty w ogóle nie są niezbędne. Większość ludzi nigdy w życiu nie pozna zapisu nutowego, lecz do komponowania, grania z nut trzeba je znać, rozumieć, umieć zapisywać, odczytywać.



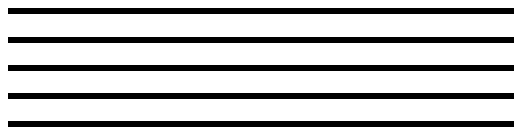
Nic nie rozumiesz z zapisu nutowego? Nie przejmuj się, można z tym żyć. Masz wolne.

Czytasz z nut? Na pewno wiesz, że nuty to ułamki (1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{64}$ ). Oczywiście jest dla ciebie, że gdy grasz w rytmie np.  $\frac{3}{4}$ , to w jednym takcie wartości liczbowe nut muszą się sumować nie inaczej, a do trzech czwartych. A więc w takim takcie zagrasz dźwięki np. jedna półnuta, jedna ósemka i dwie szesnastki. Zastanów się, czy „gra” na ułamkach jest dla ciebie trudna, czy prosta, jak butka z masłem?

## ☐ Skojarzenia matematyczno-muzyczne

Muzyka to matematyka! Muzyka to ułamki. Czy oprócz ułamków są jeszcze inne skojarzenia łączące matematykę z muzyką? Jest ich wiele.

Zadanie dla każdego. Grasz z nut? Ćwicząc gamy, wychwytyj matematyczne tropy. Nie grasz z nut? Nie szkodzi, większość skojarzeń nie wymaga tej umiejętności.



Z jakimi matematycznymi pojęciami kojarzą ci się np.:

- równoległe tonacje
- oktawy
- wysokość dźwięku
- czwarty wymiar
- szeregi dźwięków
- tercja, kwarta, kwinta, seksta
- wielodźwięki
- kropka po nucie
- równości, np. 1 cała nuta to 4 ćwierćnuty
- pięciolinia
- odległości między dźwiękami
- metrum
- skale (całotonowa, modalne)
- raz-dwa-trzy...
- grupowanie
- interwał
- numery taktów
- półtony, całe tony

## ☐ Muzyka i obyczaje

„Muzyka łągodzi obyczaje”. Tę myśl wywodzącą się od Arystotelesa, greckiego filozofa żyjącego w IV w. p.n.e., przypomniał pod koniec lat 60. XX wieku Jerzy Waldorff. Warto odświeżyć ją i dziś, bo działa. Z kolei Pitagoras, grecki matematyk żyjący w VI w. p.n.e., miał inne skojarzenie: „Muzyka budzi w sercu pragnienie dobrych czynów”. Może to myśl do wypromo-

wania? Wszyscy bylibyśmy lepsi. Jak widać, już w starożytności Grecy fascynowali się muzyką, widzieli w niej wiele związków z matematyką i, jak widać, mieli na temat muzyki, aktualne do dziś, przemyślenia.

Zgadzasz się? Muzyka to matematyka, jak myślisz, czy analogiczne hipotezy z matematyką w roli głównej miałyby sens? Co by to mogło oznaczać?

- „Matematyka łągodzi obyczaje”
- „Matematyka budzi w sercu pragnienie dobrych czynów”

## ☐ Muzyka i matematyka

Pitagoras uważał, że wszystko jest liczbą. Logiczne, że szukał więc związków dźwięków z matematyką, czyli pioniersko odkrywał matematyczną naturę muzyki. Pitagoras rozpoznał, że dźwięki młota uderzającego w kowadło zależą od wielkości kowadła. Im kowadło większe, tym niższe wydaje dźwięki. Badał też zależność wysokości dźwięku od długości i napięcia struny, doszedł do wniosku, że odległości między dźwiękami wykazują matematyczne prawidłowości. To był początek poszukiwań związków między dźwiękiem a matematyką.

Od tamtego czasu sporo wody upłynęło, badania nad dźwiękiem poszły do przodu. Nikt nie podważa odkryć Pitagorasa, ale ty możesz je empirycznie potwierdzić. Najprościej na gitarze albo spróbować odwzorować instrument z jedną struną, podobny do tego, na którym eksperymentował Pitagoras – monochord (z greckiego monos oznacza jeden, chordé – struna) – ilustrację znajdziesz w internecie. Na pewno potrzebna będzie struna, z resztą sobie poradzisz domowymi sposobami.

## ☐ Gra na kieliszkach

W szkole dowiesz się wszystkiego o rozchodzeniu się dźwięku, o falach dźwiękowych. Będzie czas na teorię, eksperymenty, wzory, a nuż zainteresuje cię temat. Na razie nie musisz wierzyć na słowo, możesz to zjawisko zobaczyć i usłyszeć na własne oczy i uszy.



” **Muzyka to przyjemność, jakiej dusza ludzka doświadcza przez liczenie, nie zdając sobie sprawy z tego, że właśnie rachuje**

Gottfried Leibniz



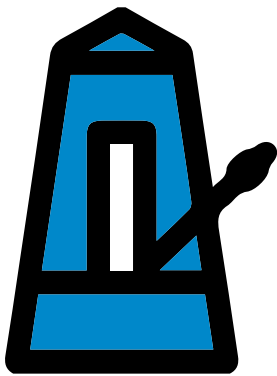




Zrób domową orkiestrę. Może być wielka albo mała. W najmniejszej skali wystarczy jeden kieliszek do wina, ale lepiej dwa. Do obu nalej wodę, do każdego inną ilość. Umoczn wskazujące palce w wodzie i mokrymi opuszkami wykonuj spokojne, koliste ruchy po brzegu obu kieliszków. Gdy znajdziesz chętnego do muzykowania, wyjmij więcej szkieł. Do każdego wleć wodę, nadal obowiązuje zasada – w każdym naczyniu (bo mogą być też szklanki) inna ilość wody. Teraz pora na koncert. Efekt piorunujący – mało, że będzie piękna muzyka, to jeszcze zobaczysz, jak fale dźwiękowe wprawiają wodę w wibracje. Spodobało się? Poszukaj kolejnych sposobów na uruchomienie fal dźwiękowych domowym sposobem. Gdy osiągniesz mistrzostwo, może trafisz do jakiegoś programu dla utalentowanych?

## □ Metronom

To taki zegar do muzyki. Tyk, tyk, tyk – w różnym tempie, 60 razy na minutę, 100 razy na minutę. To puls muzyki, jest jak bicie serca. Każda muzyka, szybka czy wolna, ma puls, grana jest w takcie czasem na 2, czasem na 3, czasem na 4. Samo urządzenie do odmierzania taktu kiedyś było mechaniczne, dziś podzielił los zegarów i jest wypierane przez elektroniczne wersje. Metronom przydaje się przy próbach, ćwiczeniach, kompozytorzy korzystają z urządzenia przy komponowaniu. W orkiestrze dyrygent jest metronomem całego zespołu.



Znajdź w internecie elektroniczny metronom, posłuchaj różnych pulsów, szybkich i wolnych. Możesz podłożyć takty pod odmierzany puls – mów głośno w rytm metronomu. Akcent kładź na „raz”. Takt

na dwa: raz-dwa, raz-dwa, raz-dwa, a teraz takt na trzy: raz-dwa-trzy, raz-dwa-trzy, raz-dwa-trzy. A teraz takt na cztery: raz-dwa-trzy-cztery, raz-dwa-trzy-cztery, raz-dwa-trzy-cztery. Zadanie dodatkowe: ciekawe, czy wiesz, w jakim rytmie bije twoje serce?

## □ Kroki w tańcu

Tańczyć można różnie. Każdy może tańczyć, jak chce (nawet podrygiwać) albo nie tańczyć. Każdy może nauczyć się tańczyć, lepiej lub gorzej. Mistrzowie tańczą perfekcyjnie, budzą podziw, wzbudzają aplauz. Taniec to magia, ale i trochę matematyka.

Zatańcz cokolwiek, do jakiegokolwiek melodii. Poszukaj matematyki w swoim tańcu. Możesz liczyć kroki, policzyć tempo, takty, wyobrazić sobie fi-

gury, które umownie kreślisz na parkiecie. Możesz znaleźć w internecie ilustracje pokazujące kroki różnych tańców (uwaga – gry tańczą dwie osoby zwykle, gdy jedna robi krok prawą nogą, druga lewą). Jeśli spodoba ci się taniec spontaniczny, może pomyślisz o tańcu na poważnie?

## □ Klaskanie

Dłonie to naturalny instrument, który mamy zawsze przy sobie. Kiedy klaszczemy? Gdy chcemy podkreślić rytm (np. na koncercie Piotra Rubika), wzbogacić taniec (flamenco), nagrodzić artystę aplauzem, gdy jesteśmy dumni z czyichś osiągnięć (dodatkowo można krzyknąć: BRAWO!). Klaskania w rytm trzeba się nauczyć, ale przyda się nie raz, nie dwa, bo klaszcząc, też można fałszować. Dłońmi można wyklaskać cały utwór muzyczny. Są specjaliści. Przy okazji dobrze jest poćwiczyć technikę, żeby było głośno, dla efektu.



Spróbuj różnych systemów klaskania – wolno, szybko, w rytm melodii. Poćwicz bez podkładu muzycznego i z podkładem. A może uda ci się przenieść klaskanie na papier? Jak przedstawiś klaskanie matematycznie?

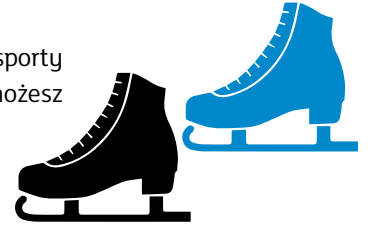
## □ Czy w muzyce może być geometria?

Może. Łatwiej to zrozumieć (a właściwie usłyszeć) wybrańcom z talentem muzycznym. Pozostali muszą uwierzyć. Kompozytor może eksperymentować, zapisuje na pięciolinii, co mu w duszy gra. W zapisie nutowym dopuszczalne są takie formuły geometryczne jak symetria, odbicie lustrzane, inwersja, można też mnożyć (czyli wydłużać lub skracać wartości rytmiczne), ale to już arytmetyka.

Zadanie muzyczne: posłuchaj bardzo znanego utworu „Bolero” Maurice’a Ravela, francuskiego kompozytora. Możesz wysłuchać go kilka razy, raczej głośno niż cichutko. Kto raz usłyszał tę muzykę, na pewno jej nie zapomni.

A zadanie: słuchaj z zamkniętymi oczami lub nie, ale w skupieniu. Z czym kojarzy ci się utwór? Jak byś go narysowała/narysował? Jaką ma formę? Czy jest kształtem? Zanim posłuchasz, weź kartkę, coś do mazania i oddaj się ekspresji.

Jeśli lubisz sporty zimowe, możesz zobaczyć na YouTube, jak ten utwór zinterpretowali brytyjscy łyżwiarze figurowi Jayne Torvill i Christopher Dean. Odańczyli go ponad 30 lat temu, ciekawe, czy ci się spodoba. Za ten program dostali same 6.0, czyli najwyższe oceny. Starsze pokolenie na pewno chętnie obejrzy z tobą ten pokaz jeszcze raz.



## □ Kombinatoryka i dodekafonia

To pierwsze jest działem matematyki zajmującym się wszystkimi możliwymi ustawieniami, kombinacjami liczb, ale nie tylko. Drugie – to dość abstrakcyjna technika kompozytorska, w której dźwięki, w nowatorskiej w stosunku do muzyki klasycznej, 12-stopniowej skali, można zestawiać na różne sposoby w takich sekwencjach, żeby były niepowtarzalne. Liczba możliwych serii to blisko 500 000 000 (dokładnie 12! – ten wykrzyknik to nie jest znak interpunkcyjny, a symbol matematyczny mówiący, że wynik jest iloczynem kolejnych liczb, od 1 do 12, czyli:  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$ , czyli 479 001 600). Żaden kompozytor w ciągu najdłuższego, twórczego życia nie zdołałby zapisać wszystkich w ten sposób utworzonych dźwięków. Zresztą po co miałby to robić?

Czy to jeszcze muzyka, czy już tylko czysta matematyka? Możesz mieć własne zdanie, ale by je mieć, musisz posłuchać.

## □ Zabawa muzyką

Dodekafonia otwiera drogę do matematycznej zabawy muzyką. To już wyższy poziom muzyczny, wyższa matematyka i wyższa abstrakcja, dla amatorów. Jak widać, matematyka nie jest wyłącznie powiązana z muzyką, ale wspólnie tworzą abstrakcyjne byty.

Jak myślisz, czy podobnie rzecz ma się z logiką, która wpływa na język, komunikację, ale ma też wewnętrzne, podlegające naukowym analizom życie, bez powiązania ze sztuką retoryki?

Logika i muzyka być może dzielą podobny los – jedno życie to sztuka, drugie życie to nauka. Masz pomysł na zabawę muzyką, ale inaczej niż zawsze? Może to będzie gra w kolory?





# Natura, pierwotny dowód na istnienie matematyki

Czy natura naśladowuje cywilizację, czy też jest odwrotnie? Dowodów, że to człowiek inspirowany przyrodą jest naprawdę wiele, a przykłady można mnożyć – samolot jak ptak (taką wizję miał już Leonardo da Vinci), rzepy jak czepliwe owoce, przysawki jak stopy gekona, szybki pociąg aerodynamiczny jak zimorodek w locie, samochód wyścigowy jak superryba. Inspiracją wynalazków były też liście lotosu, pędy bambusa, nasionko klonu, system wentylacyjny termitów, budowa skóry rekina, konstrukcja plastra miodu czy struktura pajęczej sieci... Jak historia podglądania natury ma się do matematyki? Pomyśl na sukces to uważna obserwacja przyrody, potem mnóstwo obliczeń, wiele prób i... nowy wynalazek gotowy. Ale matematykę i naturę łączy także inna, pierwotna relacja. Nie było ludzi na świecie, a matematyka już działała i to niezawodnie. Źródła, powiązań mogą dociekać nie tylko matematycy, ale i filozofowie. Co się okazuje? Natura jest zaprogramowana optymalnie i logicznie, według powtarzalnych, uniwersalnych reguł, które naukowcy potrafili zbadać (a pewnie masa takich odkryć jeszcze czeka w kolejce), zrozumieć, jednoznacznie opisać matematycznymi zależnościami, wzorami. Jednym z fenomenów jest zachwycająca symetria w naturze (np. projekt: śnieżynki), innym ciąg Fibonacciego. Bo jak to możliwe, że mięczak albo kalafior mają budowę zgodną z żelazną regułą? Dlaczego to samo dotyczy szyszek, słoneczników czy ananasów? Logikę, powszechne zastosowanie ciągu Fibonacciego warto zgłębić z dziećmi, bo przykładów zgodności natury z tym niezwykłym kodem jest zastanawiająco wiele, a każde kolejne zadziwienie, wynikające z obserwacji, daje do myślenia.

*Uwaga: Zanim zaczniesz czytać dalej, zajrzyj do rozdziału o proporcji, znajdziesz tam podstawy i inspiracje związane z ciągiem Fibonacciego, złotą proporcją, złotym kątem...*

## ☐ Przyroda pod lupą

Przyroda jest wyjątkowo wdzięcznym, różnorodnym obiektem obserwacji i badań. Bez obserwacji nie ma postępu. Bez matematyki nie da się niczego zbadać. Kto woli rośliny, może badać świat flory, kogo interesują zwierzęta, wybierze obserwacje zwierząt. Jednego wciągnie kosmos, innego mikrokosmos, ktoś zainteresuje się zjawiskami przyrodniczymi, a ktoś inny będzie badał strukturę materii. Wszyscy znajdują coś ciekawego do odkrycia.



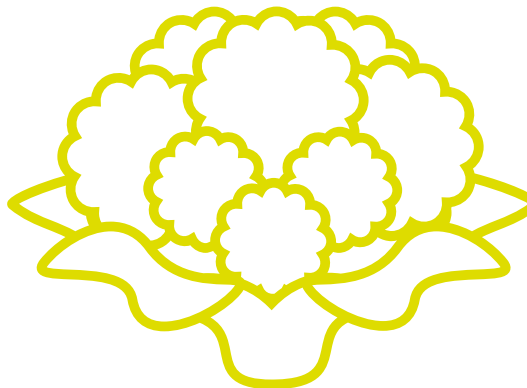
Każda podróż zaczyna się od pierwszego kroku. Twoje badania nie muszą być na miarę Nagrody Nobla. Przynajmniej nie od razu, chociaż kto wie? Możesz zgłębiać odkryte już fakty, dla naukowców oczywiście, dla ciebie nowe. Zawsze na początku chodzi o zainteresowanie światem. Pasja przyjdzie z czasem. Pamiętaj – nie ma głupich pytań i nie ma głupich badań (i pamiętaj o matematyce!).

- Pomiar czasu: ile dni wschodzi rzeżucha (od wysiania ziarenek do pierwszych listków, do wysokości 5 cm)?
- Obserwacja gatunków: ile nóg mają pająki, ile motyle, ile ssaki?
- Porównywanie parametrów: co jest twardsze – drewno czy kamień? Co szybciej lata – komar czy mucha?
- Badanie średniej: ile płatków mają rumianki? Ile liści mają gałązki akacji?

- Badanie prawdopodobieństwa: na ile obejranych koniczyn trafi się jedna czterolistna?
- Potwierdzanie teorii: czy słonecznik naprawdę ma ziarna ułożone zgodnie z ciągiem Fibonacciego?
- Wyszukiwanie odstępstw: czy istnieje śnieżynka, która ma inną liczbę ramion niż 6?

## ☐ Co ma kalafior do matematyki?

Natura daje wiele dowodów, że z matematyką idzie pod rękę. Wiele kształtów, struktur do złudzenia przypomina spirale Fibonacciego, wiele układów prawo- i lewoskrętnych okazuje się odwzorowywać model z powtórzeniem liczb z ciągu Fibonacciego. Czy to potwierdza, że w drodze ewolucji natura wybrała najbardziej ekonomiczne, optymalne układy?



Pomyśl, przypomnij sobie, jakieś skojarzenia? Jeśli nie, skorzystaj z podpowiedzi. To, co możesz, sprawdź na własne oczy. Przecież nikt nie każe ci wierzyć w ciemno.

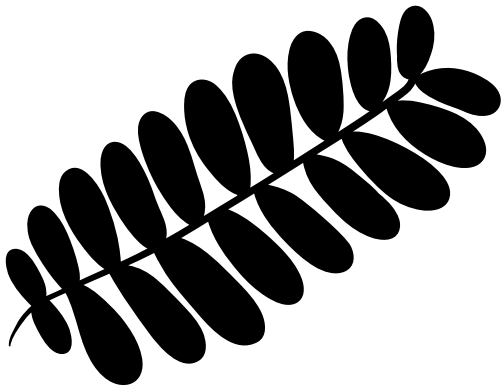
Czyż nie przypominają spirali Fibonacciego:

- kalafior rzymski (zielona odmiana klasycznego białego kalafiora) – jego różyczki są ułożone w różnych kierunkach – 34 w jedną stronę, 55 w drugą (a to liczby z ciągu!)
- tarcza słonecznika (policz, jak układają się pestki – rzecz ma się podobnie, w wielu kwiatach będzie to spirala prawo- lub lewoskrętna 34 na 55)
- łuski ananasa, szyszki, pędy niektórych roślin – policz, sprawdź!
- liczba płatków kwiatów
- kształt muszli niektórych mięczaków
- kształt wirów huraganów
- co jeszcze?

## ☐ Kocha, lubi, szanuje...

Któż nie zrywa kwiatów i nie liczy płatków? Robimy to wszyscy i odliczamy: kocha, lubi, szanuje... A można spojrzeć na płatki inaczej – matematycznie. Ciąg Fibonacciego sprawdza się też w liczbie płatków. Na przykład: irysy mają po 3 płatki, kwiaty jabłoni – 5, ostróżki – 8, złocień polny – 13, cykoria – 21, stokrotki – 34, astry – 55 lub 89 płatków. Czyż to nie są liczby z ciągu Fibonacciego?





Weź pod obserwację jakiś kwiatek. Przelicz, ile ma płatków? 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, a może 89 – to dla cierpliwych i dokładnych? Jak to w życiu, zawsze są odstępstwa od reguły, czyli teraz już kojarzysz, dlaczego tak trudno znaleźć czterolistną koniczynę? Czterolistna koniczyna to wyjątek, wybryk. Wciągnęło cię? Poobserwuj też ułożenie liści na gałązce, nowych pędów czy gałęzi wyrastających z pnia. Może i tutaj wpadniesz na trop. (Podpowiedź: zwróć uwagę na liście, gałęzie wyrastające dokładnie jedna nad drugą).

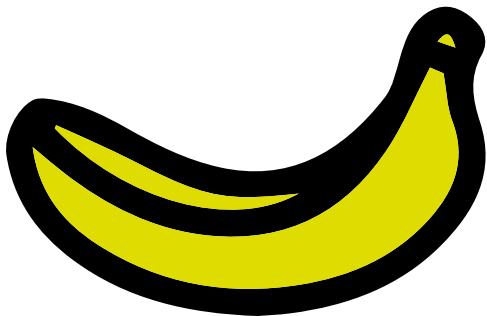
### □ Czy to przypadek?

Ludzki mózg nieustannie wątpi, stawia pytania, szuka odpowiedzi, potwierdzenia. Czasami rodzi się wątpliwość: prawda czy fałsz? Przypadek czy reguła? A jak jest ze zgodnością ciągu Fibonacciego ze światem roślin? Gdy ciężko uwierzyć, że zbieżność jest tak powszechna, trzeba wziąć zagadnienie pod lupę. Naukowiec Roger V. Jean zbadał sześćset pięćdziesiąt rodzajów oraz dwanaście i pół tysiąca gatunków roślin. Jaki wynik uzyskał? Okazało się, że około 92% roślin o skrętnym układzie odpowiada regułom zgodnym z ciągiem Fibonacciego.

Czy to przypadek? Jak myślisz?

### □ Sałatka owocowa Fibonacciego

Magia liczb ciągu Fibonacciego daje o sobie znać w nieoczekiwanych sytuacjach – choćby w sałatce owocowej.



Sprawdź. Wybierz jakiś owoc i przekrój go w poprzek, tak by widać było wszystkie gniazda nasienne. Przyjrzyj się dokładnie, policz, z ilu sekcji się składa. Czyż nie okaże się, że grapefruit ma ich 13, jabłko – 5, a banan – 3? Mówi ci to coś? Zgadza się? Weź inne owoce, może nie po-

rzeczki, ale te większe. Na przykład w ananasi Fibonacciego działa w liczbie prawo- i lewoskrętnych łusek. Może czas na sałatkę owocową według przepisu Fibonacciego?

### □ Anatomia wzrostu

Ciąg Fibonacciego oraz wynikające z niego relacje i zależności dają niepodważalne dowody na zgodność w naturze. Czy wiesz, jaki jest związek między słońcem a wzrostem roślin? Czy to logiczne, że kolejne liście szukają najlepszego miejsca, czyli jak najpełniejszego dostępu do światła słonecznego, jednocześnie nie zasłaniając poprzednich? Jakie sztuczki stosują rośliny? Wypuszczają liście spiralnie tak, że żaden kolejny nie zasłania światła poprzedniemu. I teraz zagadka: co jakieś liście mają wspólnego z jakimś ciągiem liczb?

Rozejrzyj się za pędem czy kwiatem. Najlepiej w lecie, gdy słońce w pełni, a rośliny szybko rosną. Obserwacje zacznij od dolnego liścia. Prześledź logikę pojawiania się kolejnych młodszych liści. Dojdiesz do wniosku, że wyrastają tak, jakby wykonywały obrót o jakiś kąt (może to nie przypadkiem złoty kąt – 137,5 stopni?). Policz, ile obrotów zrobiły liście, zanim nad tym pierwszym obserwowanym pojawił się kolejny, tak samo usytuowany. Już się domyślasz, jaki jest klucz?

Nie bardzo rozumiesz, o co chodzi? Wyobraź sobie, że masz tasiemkę i rurkę po ręczniku papierowym. Albo poszukaj ich w domu i sprawdź w realu. Na rurce narysuj pionową kreskę. Na dole, na kresce przypnij pineską tasiemkę. I okręcaj ją spiralnie w górę. Za każdym razem, kiedy tasiemka przejdzie przez linię, oznacza to jeden obrót.

### □ Fantazja natury

W matematyce pojęcia są ściśle: okrąg to okrąg, a nie coś, co go przypomina. Prosta w matematyce to prosta bezkompromisowa. A w naturze? Różnie bywa. Stożek w matematyce to stożek idealny, a czym jest wulkan? Czy ktoś widział drzewo o przekroju idealnego koła? Kula to kula, a czym jest gwiazda, która jest zaledwie kulista? Albo na ile kulista jest pomarańcza? Świat nie jest idealny. Ale matematyka nie może być nieidealna! Nie może nie być idealna. Konflikt?

Wiesz, że są różne kształty geometryczne, płaskie i przestrzenne: koło, trapez, pięciokąt, sześciąt, kula, walec, ostrosłup... Klasyki. Co w naturze przypomina ci te kształty płaskie, bryły? Dopasowuj, co ci wpadnie w oko. Nie przejmuj się ideałem. Ważne, że coś, co widzisz, kojarzy ci się z jakimś kształtem. Wystarczy, że jest podobne, jest w kształcie. To też warto odnotować.

### □ Wynalazek z natury

Czy wiesz, czym się różni odkrycie od wynalazku? Czy w matematyce łatwiej o odkrycia, czy o wynalazki?

Pomyśl, to się da wydedukować, a jeżeli będziesz mieć wątpliwości, spytaj dorostych. Czy ciąg Fibonacciego jest odkryciem, czy wynalazkiem? A pomyśl na żarówkę? Maria Skłodowska-Curie wynalazła rad i polon, czy je odkryła? Jak można określić zaistnienie nowej bryły nazwanej K-dron, której ojcem jest Janusz Kapusta?

Może ty coś wynajdziesz albo odkryjesz? Potencjał jest niewyczerpany, a matematyka poleca się do usług.

” **Temu, kto nie zna matematyki, trudno spostrzec głębokie piękno przyrody**

**Richard Feynman**





## □ Symetria w przyrodzie

Przykładem cudu „made in nature” są śnieżynki. Po pierwsze, nie ma dwóch identycznych, a każdy wie, ile w zimowy dzień widać przez okno śnieżnych płatków. A ile jest takich dni, okien na świecie! Po drugie, człowiek nie byłby w stanie wymyślić tylu fasonów. Po trzecie, są idealnie symetryczne. Przyroda tworzy dzieła symetryczne i niesymetryczne. Przykładów można podać bez liku: drzewo raczej nie będzie symetryczne, motyl na pewno. Jak zakwalifikujesz psa z zakrzywionym ogonem?



Klasyfikuj wszystko, co widzisz albo co znasz, co jest dziełem natury – rośliny i zwierzęta. Symetryczne czy nie? Jeśli tak, to ile ma osi, płaszczyzn symetrii? Wypatruj zaburzeń (np. psi ogon zakrzywiony w jedną stronę). Możesz podejść do sprawy rygorystycznie lub z dystansem.

## □ Czy zwierzęta liczą?

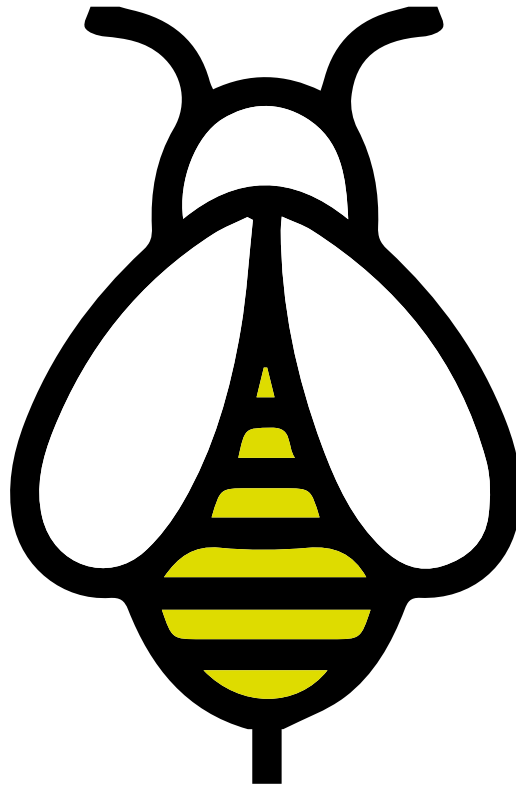
To pewnie za dużo powiedziane, ale tak nam się może wydawać. Dowody: pies zawsze dostaje trzy przysmaki. Raz dostał dwa. I co? Nie ma wątpliwości – czeka na trzeci. Kot zwykle dostaje posiłek podzielony na dwie części. Raz dostał wszystko od razu. I co? Czeką na dokładkę. Kto ma zwierzęta, wie, że z dużym prawdopodobieństwem pupil wybierze przysmak z tej ręki, w której będzie większy kawałek. Zatem wygląda na to, że zwierzęta rozpoznają zbiory, trafnie szacują wielkość, może nawet po swojemu „rachują” np. do trzech. Naukowcy badają zdolności matematyczne różnych gatunków. Wiadomo, że szympansy rozpoznają cyfry i rozumieją liczebniki, niektóre potrafią nawet dodawać, ptaki są w stanie porachować jaja w gnieździe, są też naukowe dowody na umiejętności arytmetyczne słoni, lwów, ryb, owadów. To jedynie przykłady na zdolność liczenia, a geometria? Jak w locie idealnie równo ułożyć ramiona kąta? Taki tworzą ptaki, lecąc w kluczu. A urzekające fraktale, tworzone przez chmury ptaków, owadów? No i chyba żadne zwierzę nie zbuduje domu dla potomstwa – czy to gniazdo, gawra czy nora – bez wyobraźni przestrzennej, instynktownej znajomości geometrii.

Masz zwierzę? Wymyśl jakiś eksperyment, plan badawczy. Sprawdź, może twój podopieczny, twoja podopieczna ma talent matematyczny?

## □ Geometria w miodzie

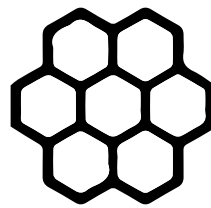
Czy pszczoły są genialne? Na to wychodzi. Nie studiują matematyki, a wiedzą, jak przy naj-

mniejszym zużyciu wosku układać komórki (cele), w których zmieści się jak najwięcej miodu, do tego szczelnie, bez luzów, pokrywając całą dostępną powierzchnię ula. Pszczela metoda jest optymalna – nie da się tego układu komórek (cel) ulepszyć. Żaden komputer nie znajdzie lepszego sposobu. Ludzie wiedzą, że istnieją tylko trzy wielokąty foremne, którymi można całkowicie pokryć powierzchnię, za każdym razem wykorzystując tylko jeden rodzaj wielokąta – to trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Tę regułę odkrył w starożytności Pitagoras, ale przecież pszczoły nie mają o tym pojęcia. Mądrość natury robi wrażenie.



Pszczoły w ogóle są fascynującymi zwierzętami. Poznaj je lepiej. Poszukaj informacji.

- Znajdź zdjęcia, ilustracje plastrów miodu. Zobacz, z jakich figur się składają. Czy wszystkie zdjęcia pokazują to samo?
- Spróbuj narysować kompozycje zestawione z pozostałych wielokątów foremnymi.
- Czy jest coś, co przypomina ci plaster miodu (tektura, wafle)?
- Gdy będzie okazja, może kiedyś obejrzysz plaster miodu z bliska?
- Przeczytaj piękną ilustrowaną książkę Piotra Sochy „Pszczoły”, wyd. Dwie Siostry.



## □ Kształty w naturze

Wszystko ma kształt. Można to dostrzec w przyrodzie. Najbardziej znane, klasyczne to kropla wody i śnieżynki. Dzieci zaprzyjaźniają się z nimi, słuchając dobranocek „O kropelce”, „O śnieżynce”. Przyroda to nieprzebrane bogactwo form. Wystarczy się rozejrzeć, warto poszukać i odkry-

wać, poznawać świat, zaglądać tam, gdzie gołe oko nie sięga. Na ciekawskich czeka nagroda – zaskoczeniom i zachwytom nie będzie końca.

Spójrz na otaczający świat przyrody pod kątem kształtów. Jakie formy widzisz z miejsca, gdzie się znajdujesz? Pomyśl o znanych ci obiektach przyrodniczych – ożywionych i nieożywionych – występujących i żyjących w różnych miejscach na kuli ziemskiej. Przydadzą się albumy, strony z ciekawymi obiektami dostępne w internecie. Zabawa może nie mieć końca, bo możesz podejść do tematu z różnych stron:

- Pytać o konkretny kształt: co jest takiego kształtu? (np. koło: wzór na skrzydłach motyla, tęcza na niebie, fale w wodzie po wrzuceniu kamienia...)
- Wybierać ciekawe rzeczy, obiekty i dopasowywać do nich kształty: jakiego kształtu jest np. góra lodowa? Słoń? Szarotka?
- Dobierać różne elementy w parę (możesz zrobić karty do rodzinnej gry w Piotrusia albo memo).
- Dla dociekliwych – przyjrzyj się kropli wody. Jaki ma kształt? Odkrycie może zmienić twoje widzenie świata. Może nie jest tym, czym się wydaje?

## □ Pięciokąty foremne

Jaka figura najczęściej występuje w świecie roślin? Pięciokąt foremny.

Gdy będziesz w lesie, na łące, w ogrodzie, szukaj roślin o pięciu płatkach. Jest ich więcej niż roślin o innej liczbie płatków. Może na tyle zafrapują cię te poszukiwania i obserwacje, że zaczniesz je dokumentować? Album ze zdjęciami takich kwiatków może być całkiem interesujący. Możesz go zrobić w komputerze lub na papierze. Możesz sprawdzić, czy odległość między co drugim a sąsiednimi płatkami jest taka, jak wynika ze złotego podziału? Ciekawe.

## □ Co się dzieje pod mikroskopem

Żyjemy w otoczeniu, które obserwujemy i widzimy gołym okiem. Ale nie wszystko da się zauważyć bez specjalistycznego sprzętu. W poszukiwaniu kształtów natury warto podejrzeć mikroświat, mikrokosmos.

Dotrzyj do zdjęć spod mikroskopu i pooglądaj formy wirusów, bakterii, strukturę wewnętrzną komórek ciała, pyłków kurzu, listków, ciał owadów. Prawie pewne, że zachwyci cię geometria w mikroświecie. Jeśli ci się spodoba, może przy najbliższej okazji poprosisz o mikroskop? W pakiecie dostaniesz gotowe preparaty, ale najciekawsze mogą okazać się twoje odkrycia, obiekty, które wybierzesz i zechcesz zobaczyć z bliska.





# ” Wszystkie zjawiska natury są tylko matematycznymi konsekwencjami niewielkiej liczby niewzruszonych praw

Pierre Simon de Laplace

## □ Domy zwierząt

Jednymi z ciekawszych aspektów przyrody są domy zwierząt. Wiadomo – gdzieś trzeba mieszkać, bezpiecznie odchowić potomstwo. Zwierzęta nie zamawiają domów u architektów, nie kończą studiów inżynierskich, budują domy zgodnie z instynktem. Inaczej nie potrafią, a robią to z pokolenia na pokolenie fantastycznie i powtarzalnie. Jedno to kształty domów – bogactwo jest tu zdumiewające, drugie – konstrukcja, czyli wytrzymałość budowli. Jedno i drugie robi wrażenie. Znowu matematyka rozdaje karty.

Wiesz, jak wyglądają domy zwierząt? Niektóre to cuda techniki. Może jakieś widziałeś/ widziałaś na własne oczy albo w książeczkach, albumach, na filmach przyrodniczych? Poszukaj innych przykładów, każdy kolejny dostarczy dowodów na niestychaną mądrość natury.

Rekomendacje:

- gniazda ptaków – warto zwrócić uwagę na polskie i egzotyczne gatunki, jest wiele technik budowy, wielkości gniazd
- gniazda pszczoł, mrówek i innych owadów (gdy zobaczysz gniazdo os lub szerszeni, nie zbliżaj się, nie eksperymentuj!)
- nory ssaków i podziemne korytarze (niedźwiedzia, lisa, kreta, ryjówki)
- kopce termitów
- żeremia bobrów (i tamy przez nie budowane na rzekach)
- pajęczyny

## □ Fale w naturze

Fale to temat, który zgłębia się na fizyce. Ale nie trzeba znać teorii, żeby zobaczyć je w różnych okolicznościach i wiedzieć, że są wszędzie. Bez ich odkrycia nie byłoby telefonów komórkowych, radia, muzyki, bezpiecznych lotów samolotem (bo nie byłoby radarów). Pierwszą falą, z jaką spotyka się dziecko, jest taka własnej produkcji, w wanience – „Nie chlap tak, bo robisz fale”. Fale, które możemy wychwycić zmysłami, rozchodzą się w wodzie, są drganiami powietrza... W języku potocznym też używamy określeń nawiązujących do istoty falowania – coś dzieje się

albo układa cyklicznie, coś faluje, regularnie wznosi się lub opada.

Lubisz słuchać muzyki? Może grasz na jakimś instrumencie? Lubisz kapać się w morzu? Chodzić po plaży? Cieszysz się, że możesz porozmawiać przez telefon z kimś bliskim, gdy jest daleko? Słyszysz szum lasu lub traw, gdy wieje wiatr? Lubisz puszczać kaczki nad wodą? Włączasz światło, podłączasz coś do prądu? Fale są wszędzie – te naturalne i te wytwarzane dzięki technice. Doceniaj fale, kiedyś może zgłębisz ich matematyczną naturę, bo dają się opisać bardzo precyzyjnie. Tymczasem narysuj falę tak, jak podpowiada ci intuicja. I zapamiętaj.

## □ Obserwacja z gór

Wakacje w górach? To okazja do nowych przygód z matematyką. Na wakacjach też można rozwinąć się naukowo.



Co robić w górach:

- Zapamiętaj numer ratunkowy – 601100300.
- Skontroluj, czy ilość zapasów wystarczy dla całej ekipy, na całą wyprawę.
- Sprawdź prognozę pogody i wyciągnij logiczne wnioski (to też matematyka).
- Obserwuj kształty gór – jakiś szczyt przypomina trójkąt (to najprościej), może trapez (wiesz, że góry to bryły, nie figury płaskie, ale kształty możesz do nich porównać)?
- Dodawaj i odejmuj. Idziesz na wycieczkę. Startujesz z poziomu np. 987 m n.p.m. Wspinasz się na szczyt o wysokości np. 1395 m n.p.m. O ile wyżej jesteś?
- Zobacz, jak daleko widać z góry (gdy jest ładna pogoda)? Czy da się policzyć odległość?
- Porachuj gatunki drzew i traw na szlaku.
- Zaobserwuj, od jakiej wysokości pojawia się kosodrzewina. Warto wiedzieć. W górach są „piętra”, na każdym rosną inne ga-

tunki drzew, krzewów, porostów.

- Zoptymalizuj trasę – obserwuj, jak biegną szlaki, czasami wydaje się, że idziesz bez sensu (np. kawałek w dół, by potem podejść znów w górę).
- Kontroluj czas przejścia – w górach odległości podawane są... w czasie. Np. do schroniska A – 1,5 h, na szczyt B – 3 3/4 h. Idziesz jakimś szlakiem, sprawdź, czy zapowiadany czas przejścia zgadza się z czasem, w jakim twoja grupa pokona ten dystans.
- Zorganizuj konkurs – kto znajdzie największą szyszkę?
- Poszukaj, może zobaczysz gdzieś piękną roślinę liczydło górskie, której owoce wyglądają jak koraliki na liczydło, stąd nazwa. Nie zrywaj, bo jest pod ścisłą ochroną, ale zdjęcie możesz zrobić.
- Gdy jesteś zimą na nartach, sprawdź: jak biegną trasy zjazdowe dla narciarzy? Jaki mają spadek? Jaką długość? Jak długo jedziesz wyciągiem? Jaką wysokość pokonuje kolejka górską? Ile jest zakrętów? Ile osób mieści się w wagoniku kolejki? Ile osób może wjechać na górę wyciągiem? Ile skrętów zrobisz, jadąc bez przerwy z góry na dół? Ile kosztuje dzień na nartach dla całej rodziny?

## □ Obserwacja z plaży

Wakacje nad morzem to kolejna, ciekawa okazja do matematycznych obserwacji.

Co robić na plaży:

- Spójrz na horyzont. Nigdzie nie prezentuje się tak, jak nad morzem – rozciąga się, jak na dłoni. Jest linią prostą czy się zaokrągla?
- A jak wygląda sprawa fal na morzu? Żeglarze wiedzą, że niektóre fale są większe. Czy potwierdzisz, że co dziewiąta jest większa?
- Przeprowadź poranną obserwację plaży i wydm (najlepiej, gdy w nocy silnie wiało). Sprawdź, czy piasek jest ułożony gładko, równo jak stół, czy jest pofalowany?
- Wpatrz się w morze – czy czoła morskich fal są przesunięte równolegle względem siebie? O czym to może świadczyć?
- Układaj szeregi z muszli, kamyków – kryteria dowolne.
- Możesz liczyć ziarenka piasku. Na całej plaży nie da rady, ale gdy weźmiesz odrobinę na dłoń, da się policzyć (nie bierz na plażę lupy albo chowaj ją przed słońcem, bo lupa + słońce = pożar).
- Jeśli już weźmiesz lupę albo szkło powiększające (z zachowaniem środków ostrożności), możesz poszukać identycznych ziarenek piasku. I co?
- Zbieraj muszle, kamienie, bursztyny, układaj je w zbiory według różnych kryteriów – najpiękniejsze okazy weźmiesz pewnie





ze sobą do domu, ale tymczasem masz nieskończone bogactwo małych form natury – różne kształty, różne kolory, różne struktury...



- Buduj z piasku. Nie ma lepszej szkoły konstrukcji – w praktyce wykorzystasz, czyli uformujesz z piachu wszystkie możliwe bryły (wieże, gmachy, przęsła), przejdiesz przyspieszony kurs wytrzymałości konstrukcji (małe szkody), zrozumiesz wagę uwarunkowania terenu (musisz zdecydować, jak blisko linii morza budować, żeby był dostęp do mokrego piachu, ale żeby nie załało budowli), generalnie: rozwiniesz wyobraźnię.
- Możesz przez cały plażowy dzień obserwować cień. Jak się zmienia? Może zbudujesz zegar słoneczny? Wystarczy parasol albo prosty kijek (pamiętaj, podstawa to wiedza, gdzie jest północ, inaczej możesz spóźnić się na obiad).
- Obserwuj kształty (raczej parasoli, parawanów, koszy plażowych, dmuchanych zabawek pływających, kół ratunkowych, budek ratowniczych, żagli, rowerów wodnych niż kształty sąsiednich plażowiczów, ale to też temat).
- A to jeszcze nie wszystko... Rób własne matematyczne odkrycia.

## □ Rekordy

Rekordy to kopalnia wiedzy na każdy temat. A w przyrodzie rekordów jest co niemiara.

Poznawaj świat przez rekordy – które zwierzę jest najszybsze? Które jest najcięższe? Które

najdalej skacze? Najdalej pluje? Buduje największy dom? Która góra jest najwyższa, a gdzie jest najgłębiej? Analizuj temat, zadawaj innym zadania, przyznawaj punkty. Sama matma.

## □ Skąd woda wie, że ma zamarznąć?

Nie wie. Po prostu zamarza w temperaturze 0 stopni. Skąd wie, że ma wrzeć w temperaturze 100 stopni? Też nie wie, bo nie ma termometru. To naukowcy ustalili skalę temperatury, nawiązując do mądrości natury, czyli dwóch temperatur krytycznych z punktu widzenia zmiany stanu skupienia wody. W temperaturze 0°C woda zamarza i zamienia się w lód. W temperaturze 100°C woda wrze i zamienia się w parę wodną. To temperatury nie do negocjacji, chyba że próbę przeprowadza się na dużej wysokości nad poziomem morza (np. na Giewoncie). To będzie na fizyce, wtedy poznasz jeszcze wiele faktów na temat temperatury.

Tym razem masz wolne, nie masz co eksperymentować. Wody nie przechytrzysz, woda nie skłamie.

## □ Laboratorium meteorologiczne

Podobno Polacy niesamowicie ekscytują się pogodą. Ponoć bardziej niż inne narody, nawet bardziej niż Anglicy. Jaka będzie pogoda? Ale dziś niskie ciśnienie albo wysokie. Jest za gorąco! Zimno! Dlaczego tyle pada? Dlaczego nie pada? Klimat się ociepla czy ochładza? Ale sucho, ale wilgoć, tak czy siak, nie ma czym oddychać. Wieje, burza, grad, czasem tęcza. Ciągłe coś. Czy to wyłącznie nasze odczucia, czy pogoda rzeczywiście stawia nam trudne warunki?

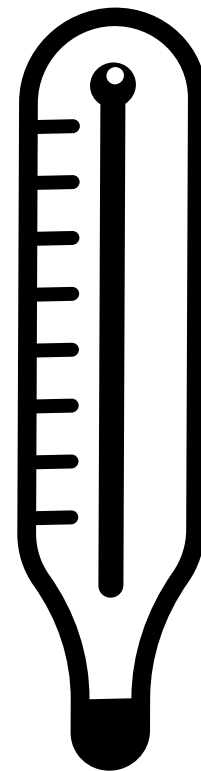
Czy wiesz, jaką pogodę lubisz najbardziej? Czy jest temperatura, w której czujesz się najlepiej? Czy może być dobra lub zła pogoda?

A może pogoda jest zawsze?

Masz termometr? Będzie niezbędny. Możesz też zapisywać ciśnienie (to temat, który będziesz przerabiać za kilka lat na fizyce, ale już wiesz, że dorośli ciągle narzekają na ciśnienie). Weź kartkę papieru i przez kilka dni, tydzień albo miesiąc notuj, jaka jest pogoda o wybranej godzinie, np. o 16, po obiedzie. Dla pomiarów ważna jest regularność – sens ma porównywanie temperatury o tej samej godzinie. Niech kartka wygląda tak: na osi poziomej dni, na osi pionowej temperatura. Zimą uwzględnij temperaturę poniżej zera. Do tego rysuj ikonki obrazujące to, co na niebie – pełne słońce, słońce przez chmury, tylko chmury, deszcz, śnieg, grad, burza, wichura. Gdy się kartka skończy, zobaczysz, jak było. Podsumujesz – połącz punkty odpowiadające temperaturze. Powstanie wykres. Prawdopodobnie to będzie twój pierwszy wykres w życiu! Gratulacje!!! Teraz możesz zliczyć:

- ile było dni słonecznych, ile zachmurzonych? (jaki procent stanowiły jedno, jaki drugie?)
- jaka była średnia temperatura o wybranej godzinie?
- jaka była najniższa, jaka najwyższa temperatura?
- jaka jest różnica między najniższą a najwyższą temperaturą?
- ile dni (jaki procent dni) padało?/nie padało?

Jeśli chcesz, przyznawaj „bużki” – dokumentuj, czy członkowie rodziny lubią, czy też nie lubią takiej pogody. Potem wspólnie podsumujecie rejestrowany czas. Ciekawe, jakie będą wspomnienia, czy będą się zgadzały z ocenami każdego dnia?



**” Filozofia przyrody jest napisana w wielkiej księdze stale otwartej przed naszymi oczami – mówię o wszechświecie – ale pojąć ją może tylko ten, kto najpierw opanuje język i znaki, którymi jest ona napisana. A napisana jest ta księga w języku matematyki, a jej znaki to trójkąty, okręgi i inne figury geometryczne, bez których nie można wyrazić po ludzku jej słów – bez nich pozostaje beznadziejne krążenie po ciemnym labiryncie**





# Numery, czyli cyfry na co dzień

Żyjemy w świecie cyfr i wśród cyfr. Niektóre ciągi cyfr mają znaczenie matematyczne – to liczby, inne nie są liczbami, ale identyfikatorami różnych przedmiotów, spraw czy ludzi – to numery. Numer to ciąg cyfr (minimum jedna), czasami w powiązaniu z literami, umieszczony na czymś, nadany rzeczy lub osobie w jakimś celu. Numer jest informacją. Współczesna cywilizacja bez numerów nie istnieje. Podmioty i przedmioty mają unikatowe identyfikacje – każdy z nas ma numer PESEL, numer dowodu osobistego, numer buta, każda firma NIP, REGON, KRS, samochód – tablicę rejestracyjną, numer nadwozia, podwozia, silnika. Dzwonimy pod numer (nawet gdy nie znamy go na pamięć). Zakupy? Każdy produkt ma kod kreskowy (zaszyfrowany numer identyfikacyjny zakodowany w postaci układu pasków o różnych szerokościach), banknot ma numer serii, dostajesz paragon o konkretnym numerze. Kto płaci przelewem – musi znać numer swojego konta i konta odbiorcy. Kto płaci kartą – musi znać PIN. Kto kibicuje, pamięta numer na koszulce ulubionego sportowca/sportsmenki (chyba że nie ma numeru :). Numery towarzyszą nam na każdym kroku, nawet na kartach tej książki oznaczając kolejne strony. Bez numeru ani rusz.

## ” W matematyce nie chodzi o liczby, lecz o życie

Keith Devlin

### □ Poprawność językowa

Dość popularny temat, nawet problem, z którym wielu dorosłych sobie nie radzi. Słowo numer można skrócić – wystarczy nr. Napiszemy: nr telefonu, nr buta, nr legitymacji. Pamiętaj: zgodnie z zasadami pisowni, gdy skrót kończy się ostatnią literą słowa, nie stawiamy na końcu kropki, ale gdy dotyczy odmienianego słowa: numeru, numerze, numerem, kropka jest niezbędna. Czyli prawidłowo zapiszemy: „Jaki jest twój nr PESEL?”, ale „Dlaczego nie pamiętasz swojego nr. PESEL?”

Poćwicz z innymi sformułowaniami. Zapamiętaj! Przyda się nie raz.

### □ Twoje numery

Numery nas otaczają.

Ciekawe, czy je zauważasz? Czy poświęcasz im uwagę? Wypisz swoje i/lub rodzinne (nietajne) numery, określające wszystko, co przychodzi ci na myśl. Na przykład:

- Twój ulubiony numer
- Numer buta
- Numer domu
- Numer mieszkania
- Numer piętra
- Numer kodu pocztowego
- Numer telefonu

- Numer klasy (np. II b)
- Numer autobusu/tramwaju, którym najczęściej jeździsz
- Numer rejestracyjny samochodu
- Numer ulubionego kanału w TV
- Numer na koszulce ulubionego sportowca
- Numer drogi, szosy, autostrady, którą ostatnio jechaliście
- Numer kasy w supermarkecie, do której ostatnio staliście
- Numer makaronu (wiele ma takie oznakowanie)
- Numery totolotka (ulubione albo wymyślone)
- Numer strony, którą masz teraz przed sobą



- Numer ISBN na książce, którą właśnie czytasz (unikatowy numer przyznawany każdej książce, w ogólnosięciowym systemie, dzięki czemu łatwiej je katalogować i odnajdywać w bibliotece, w internecie)

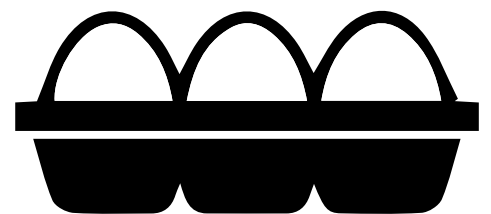
- Numer identyfikacyjny produktu np. EAN-13, czyli kodu kreskowego na dowolnym produkcie (unikatowy kod nadawany danemu produktowi. Wczytanie kodu w kasie pozwala automatycznie podać cenę, jest też informacją o kraju pochodzenia towaru, daje automatycznie sygnał do magazynu o sprzedaży produktu. Gdy numer zaczyna się od liczby 590, oznacza to, że został wyprodukowany w Polsce).

Wypisz jak najwięcej, na pewno przyjdą ci do głowy pomysły na kolejne numery. Każdy numer ma cel, rolę do odegrania. Gdy je wypiszesz, zorientujesz się, że numery mogą wyglądać różnie, bo różnią się w zależności od celu, mają inne przeznaczenie. Czasami wystarczy jedna cyfra lub dwie, często są wielocyfrowe, bywa, że powiązane z literami. Numery stanowią swoiste kody – warto się zorientować.

### □ Numery w kuchni 1

Czy wiesz, że jajko jajku nie jest równe? I nie tylko o wielkość chodzi. Przeważnie kupujemy jajka w sklepie, w pojemnikach. Są oznaczane specjalnym kodem, numerami zgodnie z ich pochodzeniem. Zwróć na to uwagę. Ustalcie rodzinnie, jakie jajka kupujecie (to ważne):

- 0, czyli zerówki z produkcji ekologicznej,
- 1, czyli jedynki z wolnego wybiegu,
- 2, czyli dwójki z chowu ściółkowego,
- czy też 3, czyli trójki od kur żyjących w klatkach.



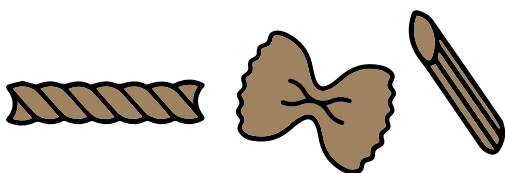
Przyjrzyj się przy okazji, jaka jest zależność ceny jednego jajka od kodu pochodzenia. Jaki wniosek?





## □ Numery w kuchni 2

Makarony, po włosku zwane pastą, to specjalność Włochów. Kiedyś każda włoska gospodyni (polska zresztą też) wyrabiała makaron w domu. Obecnie raczej kupujemy makaron w sklepie. Mamy ulubione marki, formy, a jest ich co niemiara. Żeby łatwiej się potapać i zawsze bezbłędnie trafić na swój, niektóre firmy nadają makaronom numery – farfalle nr 17, spaghetti nr 104. I można bezpiecznie wystać Marsjanina po zakupy.



Zajrzyj do szafki z makaronem. Sprawdź, czy na waszych rodzinnych zapasach są numery. Jeśli nie ma, nic to nie zmienia, ale sprawdzić nie zaszkodzi.

Przy okazji (bo to temat kształtów, nie numerów, chociaż kształty odpowiadają numerom, a numery kształtom) przyjrzyj się formom makaronu – zawsze da się je nazwać nawiązując do geometrii, do popularnych kształtów. Producenci przeważnie nazywają makarony zgodnie z włoską tradycją: spaghetti, farfalle, linguine, penne, fusilli, tagliatelle, lasagne, conchiglioni, cannelloni..., ale wszystkie mają swoje polskie nazwy, albo mogą mieć. Jak je nazwiesz po swoimu?

## □ Zajęcia praktyczne

Numery pojawiają się w twoim życiu co chwila. Gdy wybierasz kanał w telewizji – musisz wiedzieć, jaki ma numer. Musisz wystukać odpowiedni numer, żeby kupić baton w automacie. Jadąc windą, wybierasz numer piętra. Wybierasz kasę numer... Na przystanku musisz uważać, żeby nie pomylić numeru autobusu.

Wyostrz uwagę i jednego dnia rejestruj, zapisuj wszystkie kontakty z numerami. Ile ich będzie? Oszacuj wcześniej – jak myślisz, ile razy w ciągu dnia zetkniesz się z jakimś numerem? Ciekawe, czy doświadczenie życiowe okaże się bliskie twojego przewidywania, a może je przekroczy?

## □ Tajemnica i metoda

Żyjemy w świecie cyfrowym, klucz do kłódki, kasa pancerna ani skrytka w ogrodzie nie wystarczą. Naszą prywatność i majątek chronią hasła. Każdy, kto ma kartę płatniczą, kto ustanawia swoje loginy i hasła do ważnych stron, aplikacji internetowych, powinien pamiętać o zachowaniu ich w tajemnicy. Dla bezpieczeństwa lepiej nikomu nie ujawniać swoich „numerów”. Ale trzeba je wymyślić, zapamiętać i lepiej nie zapisywać. Masz na to jakieś metody, patenty?

Wymyśl własny patent na hasła – będziesz ich

potrzebować wiele, na różne okazje, nie powinny się powtarzać, nie mogą być za proste ani oczywiste, czyli data urodzenia raczej odpada. Przyda się metoda. Na razie poćwicz, jak zaczniesz korzystać, musisz pamiętać: **ważne numery to twoja tajemnica.**

## □ Numerologia

W niektórych kulturach (np. w Chinach) cyfry/numery mają ogromne znaczenie. Jedne przynoszą szczęście i inne uważane są za pechowe.

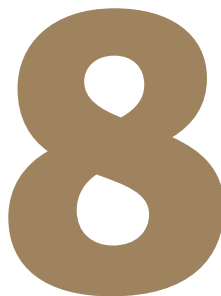
Dla zabawy sprawdź, jaki jest twój numer. Jak to zrobić?

Zapisz swoją datę urodzenia: \_ \_ . \_ \_ - \_ \_ \_ \_ (np. 08.06.2010 albo 8.6.2010).

Dodaj wszystkie cyfry do siebie, sprowadzając je do jednocyfrowego wyniku (jeśli otrzymana suma jest liczbą wielocyfrową, to znów dodawaj jej cyfry, aż otrzymany wynik będzie liczbą jednocyfrową), czyli w naszym przykładzie:  $8 + 6 + 2 + 1 = 17$ , czyli  $1 + 7 = 8$ .

Już wiesz, jak liczyć?

Jakim jesteś numerem? Teraz wiesz. Możesz sprawdzić, co to oznacza w numerologii, albo nie sprawdzać. Jak chcesz. Jeśli ci się spodobało, powtórz obliczenia dla bliskich.



## □ Galeria wzorów

Skoro, chcąc nie chcąc, żyjemy w świecie numerów, spójrzmy na ich oprawę graficzną. Nawet najprostszy „numer” powinien być zaprojektowany, a nie byle jaki. Projektowaniem elementów w przestrzeni publicznej, opakowań zajmują się graficy, projektanci, specjaliści od wzornictwa przemysłowego. Te dziedziny, podobnie jak architektura, inżynieria, mają ogromny związek z matematyką – tu też trzeba wszystko przemyśleć, logicznie zaplanować, policzyć, wyobrazić sobie je w przestrzeni.

Nastaw się na wypatrywanie numerów wszędzie i rób im zdjęcia tak, by powstała galeria od numeru 1 do ..., ile zdołasz. Co może być na zdjęciach? Oczywiście to, co chcesz, ale spójrz na przykłady:

- Stempel na jajku informujący o rodzaju hodowli kur: 0
- Nr farby do włosów używanej przez mamę: 7
- Miejsce parkingowe: nr 8
- Numer na koszulce Roberta Lewandowskiego: 9
- Numer piętra na wyświetlaczu windy: 13
- Tabliczka z numerem tramwaju: linia nr 14
- Nr filtra UV w kremie: 15
- Kasa, do której stoisz: nr 16

- Tabliczka z adresem: dom nr 18



- Numer przystanku: Rakowiecka 02
- Numer z szatni w teatrze: nr 3
- Kanał telewizyjny: nr 4
- Tabliczka na drzwiach mieszkania: nr 5
- Makaron muszelki ulubionej firmy: nr 6
- Numer buta taty: 10
- Numery foteli w kinie: 11 i 12

I tak dalej. Gdy znajdziesz najpierw numery wyższe, dokumentuj je od razu, z czasem trafisz na niższe. Z numerami jest jak np. ze spinaczami – gdy ktoś nastawi się na wypatrywanie spinaczy, wszędzie je widzi. Też tak masz? Numery są wokół nas. Niektóre mają piękną oprawę graficzną.

A może sama/sam zaprojektujesz numery w różnych stylach, formach, w różnych rolach, zastosowaniach? Może to będzie początek twojej pięknej przygody z grafiką?

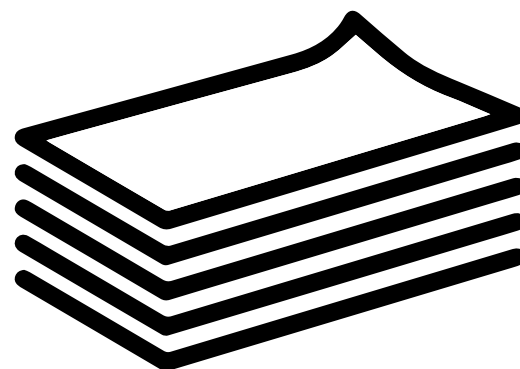
## □ Numeracja

Czasami, a nawet często przydaje się uszeregowanie elementów zbioru. No to wyobraź sobie różne sytuacje.

- Sto luźnych nieponumerowanych kartek. Jak je ułożyć po kolei, żeby przeczytać?
- Tłum ludzi z ważną sprawą do załatwienia na poczcie. Kto pierwszy?
- Domy przy długiej ulicy bez numerów – jak dostarczyć przesyłkę właściwej osobie?
- Stos faktur dla abonentów telefonów – czy bez numerów dokumentów można odnaleźć potrzebną?

Numery są niezastąpione do uporządkowania elementów w zbiorach. Wszędzie gdzie ważna jest kolejność, posługujemy się numeracją porządkową. Wydrukowane kartki lepiej ponumerować, na poczcie klienci pobierają numerki, domy mają kolejne numery, a faktury każda firma numeruje według własnego systemu.

Wymyśl, co jeszcze trudno (albo nie można) sobie wyobrazić bez numeracji porządkowej?







# Optyka i iluzja, czyli jak patrzymy na świat i jak go widzimy

Co ma matematyka do optyki i iluzji? Całkiem sporo. Są głosy, że soczewki optyczne i lustro powiększające należą do najważniejszych odkryć ludzkości i przełomów w technologii. To, co się da zobaczyć gołym okiem, oglądamy na co dzień. Ale od wieków człowiekiem powodowała ciekawość – jak zobaczyć to, co jest zbyt małe, by to dojrzeć? Jak poznać coś, co jest za daleko, by przyjrzeć się dokładnie? Dziś nie mamy problemu – wystarczy skorzystać odpowiednio z teleskopu, lunety, lupy, szkła powiększającego, mikroskopu – możemy obserwować obszary, obiekty wcześniej niedostępne dla ludzkiego oka. Czemu zawdzięczamy takie możliwości? Optyce, a optyka to geometria – kąt padania, kąt odbicia, załamania światła, skupianie. Dzięki optyce przeglądamy się w lustrze, nosimy okulary, widzimy lepiej. A że mózg daje się zwieść, gdy oko rejestruje obraz, do którego nie jest przyzwyczajony, widzimy, że rusza się coś, co jest nieruchome, że proste równoległe wyglądają jak nierównoległe, widzimy punkty w miejscach, gdzie ich nie ma. Psikusą płata też perspektywa – patrzymy na „figury niemożliwe” i trudno oczom uwierzyć, co jest czym. A malarstwo iluzjonistyczne? To oszustwo czystej wody – dziura, w którą nie można wpaść, bo jej nie ma, anioł wodzący za nami wzrokiem – sprytne sztuczki z geometrią w roli głównej.

” **Bez matematyki jesteśmy ślepi**

**Alain Badiou**

## □ Tajemnice lustra

Człowiek po raz pierwszy przejrzał się w lustrze (czy to przypadkowa zbieżność?) wody – w kałuży, stawie, jeziorze. Patrzy i co widzi? Siebie. W czasach, gdy ludzie żyli w jaskiniach, nie znali koła, nie mieli pojęcia o istnieniu lustra! Trudno przesądzać, ale niewykluczone, iż to ludzka próżność sprawiła, że zaczęto myśleć – jak zrobić lustro? Historia lustra sama w sobie jest ciekawa.

Kilka interesujących (czyż nie?) tematów do zgłębienia z lustrem w roli głównej:

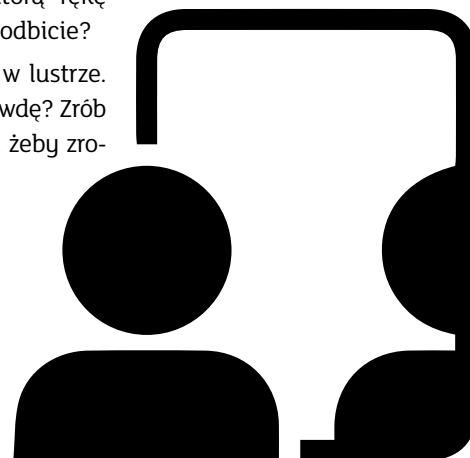
- Lustro do nieskończoności – ustaw dwa lustra dokładnie naprzeciwko siebie, czyli równoległe. Ty między nimi. Ile odbić widzisz? Czy to nie jest nieskończoność? Czy odbicia są takie same?
- Cała sylwetka – lustro służy do przeglądania się. Wiadomo, że nie zobaczysz całej sylwetki w podręcznym lusterku. Jeszcze nie czas na wzory, geometryczne wnioskowanie, naukowe dociekania, na razie zbadaj na przykładach i oszacuj, jakiej wysokości musi być lustro, żebyś się zobaczyła/zobaczył w całości od stóp do głów. Większe niż ty? A może wystarczy mniejsze?
- Jak wyglądam od tyłu? – czasami trzeba sprawdzić, czy nie ma się np. plamy na plecach albo jak wyszedł warkocz. W jednym lustrze może nie być łatwo, ale dwa wystarczą. Zbadaj, jak trzeba je ustawić, żeby zobaczyć się z tyłu, z boku? Najłatwiej będzie znaleźć dwa ruchome lustra w przymierzalni jakiejś sieciówki. Po to są!
- Ty odwrotnie? Czyli do góry nogami! Czy jest możliwe, by zobaczyć swoją twarz do góry nogami? Tak, potrzeba do tego lusterka wypukłego (powiększającego). Sprawdź wszystkie dostępne w domu, a już któreś będzie wypukłe? Popróbuj z odległością – przysuwaj je i odsuwaj od twarzy. Czy coś zauważasz?

## □ Co może lustro?

Lustro jest jednym z powszechniejszych przedmiotów użytku codziennego. Znajdują się w każdej łazience, w każdym samochodzie, w każdej przymierzalni. Jeśli dodać do tego, że prawie ze stuprocentową pewnością jest też w każdej damskiej torebce, to na świecie są miliardy lusterek. Tajemnicą lusterek jest padanie promieni i ich odbicie, między innymi od kształtu powierzchni lustra zależy, co widzimy. Czy obraz rzeczywisty, czy pomniejszenie, powiększenie, a może zniekształcenie jak w gabinecie luster wesołym miasteczku lub w muzeum nauki?

Na teorię przyjdzie czas, teraz pora na eksperymenty:

- Czy ten ktoś w lustrze to ty, czy nie ty?
- Podnieś prawą rękę. Którą rękę podnosi twoje lustrzane odbicie?
- Spójrz na swoje odbicie w lustrze. Czy tak wyglądasz naprawdę? Zrób selfie albo poproś kogoś, żeby zrobił ci zdjęcie. Porównaj te dwie wersje siebie. Czy zauważasz różnice?
- Przyjrzyj się komuś z bliskich, potem poproś, żeby stanęła/stanął przed lustrem. Czy zauważasz różnice? Czy to ta sama osoba?



## □ Eksperymenty

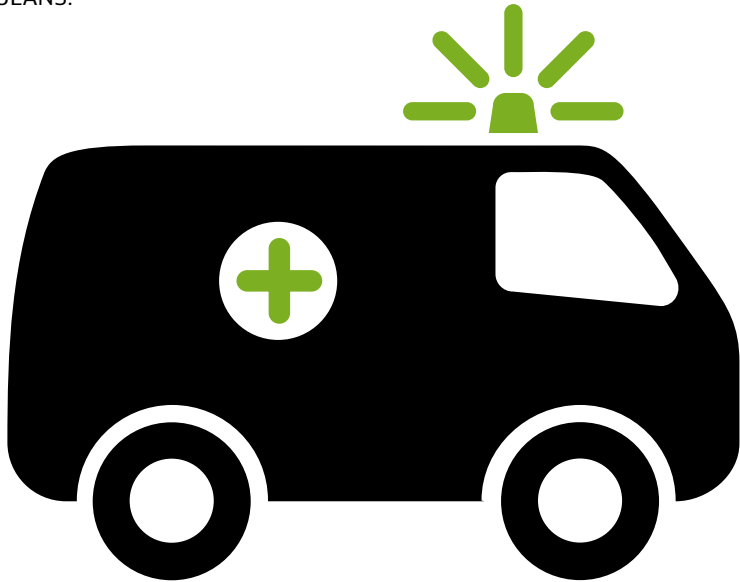
Lustro odwraca obraz. To też matematyka, w swoim czasie poznasz teorię, dowiesz się, co to ogniskowa i wiele innych faktów, zależności. Tak jak z muzyką na wiarę można przyjąć, że muzyka to fale (można to sprawdzić doświadczalnie, ale nie każdy musi), tak z optyką przyjmij, że to kwestia promieni światła, a światło to fale! Na razie wystarczy, że zauważasz, jak działa lustro, co się dzieje z odbiciem w różnych sytuacjach.

Patrzysz w lustro. Załóżmy, że masz pieprzyk na prawym policzku (nie masz? Zrób sobie kropkę ołówkiem do celów badawczych). Czy twoje lustrzane odbicie ma pieprzyk na tej samej połowie twarzy? Ciekawe, co to oznacza.





Zwróć uwagę, jak karetki przewożące chorych mają napisane słowo AMBULANS.



Weź kartki i napisz na nich różne liczby, słowa. Przyłóż kartkę do lustra poziomo i pionowo – co widzisz? Co odbija się w lustrze? Na czym polega różnica między obrazem rzeczywistym i odbitym? Jak trzeba zapisać cokolwiek, żeby w lustrze zobaczyć zrozumiały, rzeczywisty obraz? Zbadaj, czym jest odbicie w lustrze.

## □ Pismo lustrzane

To pomysł Leonarda da Vinci na zaszyfrowanie notatek. Pisał od tyłu, od prawej do lewej strony. Do odczytu pisma lustrzanego, rozszyfrowania zapisków potrzebne jest... lustro.

Zaszyfruj jakiś tekst. To doskonałe ćwiczenie na wyrobienie zmysłu myślenia o symetrii.

Zapisz swoje imię – niektórzy będą mieli łatwiej, inni trudniej :). Ćwiczenie zaczynasz od prawej strony kartki i piszesz pełne słowo litera po literze w lewo. Sprawdź w lustrze, jak coś nie tak, koryguj. Poćwicz, z każdym kolejnym zapisanym słowem, zdaniem będziesz nabywać biegłości. Może dojdiesz do perfekcji jak Leonardo?

Zwróć uwagę, jaką naturę mają litery, z którymi nie masz problemu, a które sprawiają kłopot (chyba że ci nie sprawiają).

Może wymyślisz słowo, które będzie tak samo wyglądało na kartce i w lustrze?

## □ Obserwacje

Oczy ludzkie nieustająco wystawione są na złudzenia, które są efektem praw geometrii optycznej (czy optyki geometrycznej).

Możesz to zignorować albo spróbować zrozumieć. Możesz poeksperymentować. Może być ciekawie, ale wybór należy do ciebie.

- Zbierz kilka różnych szklanek, dzbanków, dowolnych naczyń szklanych. Najlepiej, żeby każde miało inne dno – grubsze, cieńsze, ścianki proste, owalne, różnie wyprofilowane. Popatrz przez dno szklanki na świat. Jak wygląda?
- Przejrzyj się w łyżce. Co widzisz? Poszukaj łyżek, misek o różnych kształtach, byle były metalowe, nie plastikowe ;) i przeglądaj się w nich, kontrolując efekt. I co?
- Włóż łyżkę do szklanki z wodą. Jak wygląda łyżka, czy zmieniła kształt? Może się złamała?
- Wrzuć coś do wanny, miski z wodą. Czy wygląda tak, jak wyglądało, czy zaszła zmiana? Obiekt się zmniejszył, a może zwiększył?

To wszystko geometria. I optyka.

## □ Jak narysować perspektywę?

W naturze perspektywa jest oczywista – patrzymy i widzimy. Coś jest bliżej, coś jest dalej. Im bliżej, tym wydaje się większe, im dalej, mniejsze. Samolot na niebie jest taki całkiem malutki, a na ziemi wielki. Czytamy odległość instynktownie. Czym jest perspektywa na papierze? To złudzenie optyczne. Pierwszy rozpracował ją Leonardo da Vinci.

Idź w ślady Leonarda, spróbuj i ty. Zaczynaj od narysowania drogi, ścieżki, tak żeby wyglądała, jak na żywo.

Pierwsza praktyczna wskazówka: na górze kartki narysuj horyzont – linię poziomą, potem biegnące do niej dwie lekko nachylone ku sobie proste – bardziej oddalone na dole kartki, bliższe sobie na górze albo zbiegające się w punkt. I już masz drogę, która ginie za horyzontem.

Teraz postaraj się po obu jej stronach „posadzić” drzewa. Nie zapominaj o perspektywie – im bliżej dołu kartki, większe, im dalej, mniejsze.

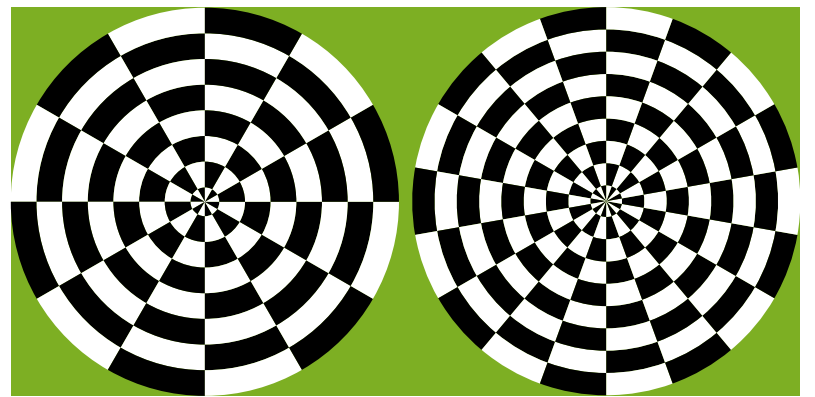
A może droga nie musi być prosta, lecz kręta? Zobacz, jak to wyjdzie.

Nie ma rady, trzeba poćwiczyć. Gdy opanujesz rysowanie drogi ginącej za horyzontem, możesz zmienić obiekty. Na początku wybieraj takie o kształtach geometrycznych. I ćwicz.

## □ Malarstwo iluzjonistyczne

Ludzi od wieków kusi odwzorowywanie świata i jego głębi. Trzeba mieć niebywałą zdolność do widzenia geometrycznego, by na płaskiej, dwuwymiarowej powierzchni stworzyć iluzję trójwymiarowej rzeczywistości. Mistrzowie musieli i muszą, bo ta sztuka nadal jest rozwijana, mieć doskonałe wyczucie perspektywy, być baczniymi obserwatorami świata, mistrzowsko operować skrótami, światłocieniami. Ale i im matematyka musi pomóc. Bez żmudnych wyliczeń matematycznych efekt mógłby nie być doskonały. Rezultat bywa fantastyczny – stoisz w świątyni, patrzysz w górę, a tam niebo i cherubinki jak żywe, stoisz przed płaską ścianą pałacu, ale wydaje ci się (prawie masz pewność), że przed tobą rozciąga się ogród, idziesz chodnikiem, a przed tobą wyrasta globus z trawy albo rozpościera się przerażająca czeluść. A to tylko, a może aż, złudzenia.

Jednym z przykładów jest dzieło Leonarda da Vinci „Ostatnia wieczerza” – zobacz, jak realistyczna jest perspektywa.



„**Złudzenia optyczne – oszukasz mózg, ale nie matematykę**

**mądrość z internetu**

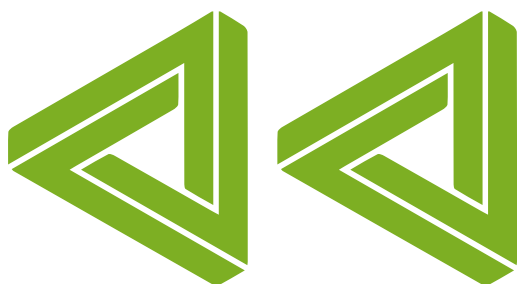




Poznaj iluzje polskiego artysty tworzącego na chodnikach Ryszarda Paprockiego, czy niesłychane przestrzenne motywy Felice Variniego. Jeśli nie na żywo, zobacz, co i jak w internecie. Nie da się nie docenić takiej wyobraźni i nie chodzi o gust, styl, lecz o bezbłędne geometryczne wyobrażenie twórców.

### □ Figury niemożliwe

To znaczy, są możliwe, bo są narysowane dzięki złudzeniu optycznemu, ale w naszej trójwymiarowej rzeczywistości nie mogą istnieć. Czy da się jednocześnie schodzić i wchodzić po schodach? A czy możliwe są schody donikąd?



Musisz zobaczyć trójkąt czy schody Penrose'a, sześciąt Neckera, grafiki Eschera. Czy dasz się porwać iluzji? Twój wiek nie ma tu nic do rzeczy, każdy widzi to, co widzi. A może wyobrazisz sobie i narysujesz coś nowego, odkrywczego, niemożliwego?

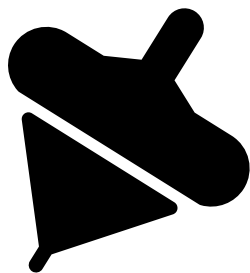
### □ Iluzja na boisku?

Czy obraz, czy reklama, cokolwiek to będzie, da się tak narysować na płasko, żeby udawało, że stoi? Da się. Przykładem są reklamy za linią bramkową prezentowane w czasie meczów piłkarskich. Widzisz ponad wszelką wątpliwość coś, co jest pionowe, a nagle na to coś wbiega piłkarz i nic. Bo to coś leży na płasko na murawie.

Oglądasz czasem mecze w piłkę nożną? Przyjrzyj się, czy rysunek panoramiczny za bramką stoi, czy leży? Wiesz, na czym polega trik? Może poćwiczysz? Może dasz radę powtórzyć trik?

### □ Bączek

Bączek to zabawa dla najmłodszych, ale dorośli też mają dużą frajdę z obserwacji różnych kształtów, mieszania się barw w ruchu. Abstrakcyjne kombinacje linii, spirale puszczane w ruch dają efekt złudzenia optycznego. W bączkach jest magia, a to nic innego jak geometryczne efekty optyczne wynikające z szybkiego wirowania wokół własnej osi.



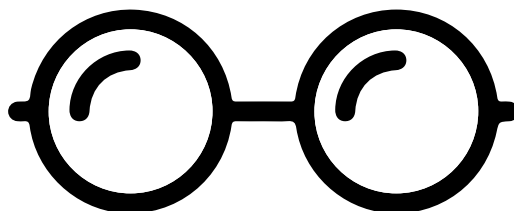
Możesz poszukać w sklepach gotowych zestawów bączków z różnymi wzorami albo zrobić

taki własnoręcznie (liczy się precyzja wykonania, im bączek będzie lepiej wyważony, tym efekt ciekawszy). Inspiracji do wykorzystania wzorów dostarczają internauci z całego świata – wystarczy poszukać na YouTube. Możesz też wymyślić własny układ linii, kolorów, kształtów i sprawdzić, czy iluzja zadziała.

### □ Okulary

Czy miałaś/miałeś już badanie wzroku? Naszym wzrokiem zajmują się lekarze specjaliści – okuliści. Gdy mamy problem z widzeniem, idziemy po pomoc. Lekarz zakłada różne soczewki i kontroluje wzrok. Oceni, czy widzimy równie dobrze z bliska i dalej. Gdy stwierdzi nieprawidłowość, zaleci korektę – przepisze odpowiednie okulary. Niewiele osób ma wzrok doskonały, wady wzroku pojawiają się i pogłębiają wraz z wiekiem. Starsi często mają kłopoty z czytaniem bez okularów. Bywa, że problem pojawia się już u dzieci. Okulary, a raczej soczewki umocowane w oprawkach poprawiają widzenie. Właściwy dobór szkielek z reguły rozwiązuje problem – do bliży, czyli do czytania, nosimy tak zwane plusy, do dali – minusy. Optyka bez matematyki nie działa.

Zauważasz, że wiele osób nosi okulary na co dzień albo zakłada je w określonych sytuacjach? Genialne rozwiązanie, gdy możemy pomóc sobie dobrze widzieć. Pamiętaj, że nie jest zdrowo patrzeć przez cudze okulary, bo muszą być one dobrane do wady wzroku, więc lepiej nie przymierzaj nie swoich okularów.



Możesz zrobić domowe rozeznanie optyczne. Dowiesz się, kto nosi, jakie okulary, w czym mu pomagają, jak widziałyby bez okularów. Możesz zabawić się w okulistę, wystarczy, że na kilku karteczkach napiszesz litery albo cyfry, albo słowa czy zdania różnej wielkości. Pokazuj je badanym z różnej odległości i samodzielnie określisz, kto widzi lepiej daleko, kto lepiej z bliska.

### □ Niedostępny mikroświat?

Oko ludzkie ma naturalny zakres widzenia małych rzeczy i wielkich obiektów. Do zaglądania w mikroświat służą lupy i mikroskopy, do obserwacji makrokosmosu – lunety, teleskopy. W dzisiejszych czasach dzięki technice mamy nowe, niewyobrażalne możliwości podglądania świata. Pierwszy kontakt z mikroskopem

musi wzbudzić podziw – Ła! Żadne opowieści nie zastąpią osobistego doświadczenia – świat niedostępny gołym okiem można i warto zobaczyć. I zachwycisz się, bo otworzy się przed tobą mikroświat logicznego porządku struktur, ocean geometrycznych kształtów.

Masz to doświadczenie już za sobą? Jeśli tak, to jakie masz odczucia?

Jeśli nie, musisz sprawdzić, jak to działa i nie ma co czekać do lekcji na ten temat w szkole. Podstawa to dobry mikroskop, bo przygoda ze słabym może rozczarować i zepsuć pierwsze wrażenie, a to, jak wiadomo, można zrobić tylko raz. Oglądaj gotowe preparaty, na zachętę są doskonałe.

**1200x**



Gdy twój apetyt na wgląd w struktury mikroświata zostanie rozbudzony, możesz robić własne próbki i oglądać, co chcesz. Jedynym ograniczeniem będzie optyczna zdolność mikroskopu do powiększenia obrazu. Zwróć uwagę – powiększenie 600x jest dwa razy słabsze niż powiększenie 1200x. A, to chyba oczywiste, jeśli bardziej można zajrzeć w głąb, czyli powiększyć, tym obraz może być ciekawszy, choć bez przesady i nie dla wszystkich obiektów. Dlatego dobre mikroskopy mają możliwość wyboru obiektywu.

### □ Widzieć dalej

W zgłębianiu tajemnic historii optyki pomagają wykopaliska, domena archeologów. Spod ziemi wykopane zostały „soczewki” sprzed tysiąca lat przed naszą erą. Były to kryształki powiększające obraz. Od czasów renesansu „okulary” były w powszechnym użyciu tych, którzy mogli sobie na nie pozwolić, ale przełom w obserwacji odległych obiektów nastąpił wieki później, dopiero po wynalezieniu teleskopu, który pozwalał urzeczywistnić ludzkie marzenie, by widzieć dalej i dalej.

Chcesz obserwować ptaki w locie, samoloty, odległe obiekty? Przyda się lornetka, bo ludzkie oko ma ograniczone możliwości. Spójrz przez lornetkę – to kolejne tajemnice do odkrycia. Czy przez lornetkę zobaczysz własny palec? Co najbliższego możesz dojrzeć? Jak najdalej sięgniesz okiem, patrząc przez lornetkę?





” **Wyobraźnia jest ważniejsza niż wiedza, bo choć wiedza wskazuje na to, co jest, wyobraźnia wskazuje na to, co będzie**

Albert Einstein

## □ Jak wygląda gwiazda

Patrzemy w niebo i widzimy gwiazdy, świecące punkciki rozsiane po niebie, tworzące gwiazdozbiory i samotne nomen omen gwiazdy. Gwiazdy to kule, ciała niebieskie w kształcie kuli, jak Ziemia, Księżyc, Słońce. Każde dziecko wie, jak narysować gwiazdę – to po prostu gwiazda, dla dziecka kształt jednoznaczny, choć każde wykonanie będzie inne. Kod kulturowy daje wykładnię. Dlaczego tak? Czy może gwiazdy naprawdę mają ramiona? Tak jak Słońce, najbliższa Ziemi gwiazda, wysyła promienie, (rysujemy je jako promyki, bo czym by było słońce bez promieni?), tak gwiazdy z niezmiernych odległości promieniują, co możemy zobaczyć gołym okiem, choć nie każdemu się to uda. Najlepiej obserwować je w pogodną sierpniową noc, gdy masowo „spadają”.



Jak ty rysujesz słońce? Jak gwiazdy? Czy mają jeden wzór, czy też na wiele sposobów? Narysuj dowolnie dużo gwiazd, może ułożysz je w gwiazdozbiory?

Gwiazdy można oglądać przez teleskopy, najlepiej w obserwatorium astronomicznym. Warto popatrzeć, gdy będzie okazja. Zgłoś zainteresowanie.

**Zapamiętaj: – absolutnie nie wolno patrzeć bezpośrednio na słońce!!!**

## □ Trójwymiar

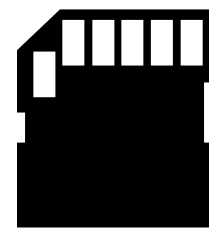
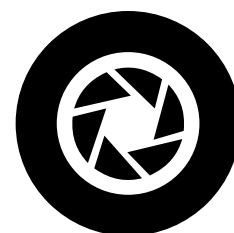
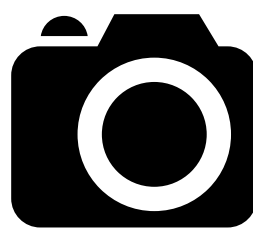
Świat widzimy w trzech wymiarach, ale jeśli chcemy go odwzorować, nie jest to takie proste.

Masz pomysł, jak można przedstawić świat najbardziej realistycznie? Możesz wymyślić coś odkrywczego, na początek sprawdź, co już jest opatentowane:

- prosta perspektywa na rysunku, w malarstwie. Im więcej dzieł zobaczysz i przeanalizujesz pod kątem perspektywy, tym większą będziesz mieć świadomość działania złudzenia.
- czy wiesz, co to pocztówki trójwymiarowe? Kiedyś były modne i popularne. Spytaj rodziców, dziadków, może mają zachowane egzemplarze.
- popatrz na hologram. Co widzisz? Jest tam głębia?
- nowoczesne techniki pozwalają na druk dający złudzenie trzech wymiarów. Do wejścia w trzeci wymiar potrzebne są specjalne okulary – z jednym niebieskim, drugim czerwonym okularzem. Jednych ta technika zachwyca, innych męczy. Dowiesz się, jak sprawdzisz na sobie.
- filmy 3D – specjalne kina zapraszają na wrażenia specjalne. Siadasz w fotelu, patrzysz przez specjalne okulary, do każdego oka trafia inny obraz i te dwa obrazy składają się na trzeci wymiar. Jesteś w centrum wydarzeń. Pójdź chociaż raz, sprawdź na sobie. Czy wbije cię w fotel?

## □ Fotografia cyfrowa

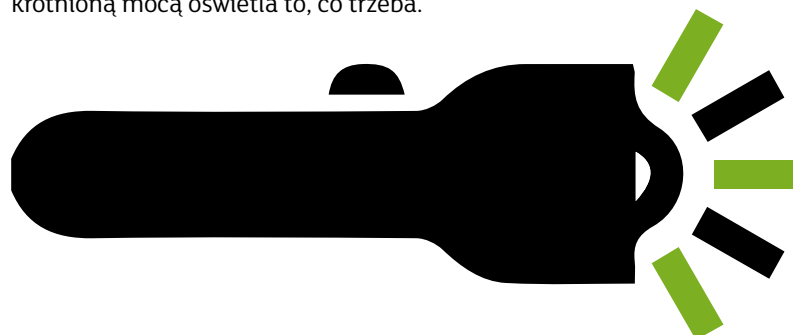
Czy fotografia to sztuka? Kiedyś, w czasach przed smartfonami, zdjęcia były dziełami sztuki. Nieliczni twórcy mieli odpowiedni aparat wysokiej jakości i wiedzieli, jak w ciemni, za pomocą chemikaliów wywołać i utrwalić obraz zapisany na fotoczułej kliszy. Jakkolwiek abstrakcyjnie to brzmi dla ciebie, tak było. Dziś w epoce fotografii cyfrowej (cyfra to matematyka!) każdy jest potencjalnie fotografem doskonałym. Czemu to zawdzięczamy? Aparatom. Tak, ale czemu zawdzięczają to aparaty? Matematyce. Zapis kadrów w postaci cyfrowej daje niesamowite możliwości, a stoją za tym piksele. Niezliczone punkciki odpowiedzialne za kolor. Im więcej pikseli, tym jakość zdjęcia lepsza, bo większa jest jego rozdzielczość. Oczywiście, tak jak nie trzeba wiedzieć ani rozumieć, dlaczego samolot lata, żeby wsiąść i bezpiecznie nim polecieć, tak nie trzeba zgłębiać teorii technologii cyfrowej, by robić świetne zdjęcia, filmy. Ale być może kiedyś zainteresujesz się tą techniką od kuchni. Może okaże się fascynująca?



Po pierwsze – dotrzyj do albumów z rodzinnymi zdjęciami sprzed lat. Możesz porównać technikę, jakość fotografii, a te zmieniały się z pokolenia na pokolenie. Może gdzieś w szafie jest aparat sprzed lat, który obejrzysz, porównasz. Po drugie – zapytaj starszych, czy wiedzą, na czym polega wkład materyki w cyfrowe aparaty fotograficzne. (Ciekawe, co powiedzą?) Po trzecie – ciesz się, że możesz fotografować w świetnej jakości, co chcesz, kiedy chcesz. Zapisujesz tym samym ważne momenty, do których kiedyś chętnie wrócisz, pod warunkiem, że nie zginą w przestrzeni. I pamiętaj – to dzięki matematyce!

## □ Rozbiór latarki

W każdym domu, samochodzie powinna być latarka. Na wszelki wypadek. Za żarówką jest lustro albo coś (jak to można nazwać?), co jeszcze lepiej odbija promienie i kieruje je we właściwą stronę. To coś ma kształt paraboli albo czegoś zbliżonego do paraboli. To dlatego światło ze zwielokrotnioną mocą oświetla to, co trzeba.



Masz latarkę? Przyjrzyj się. Nie musisz jej demontować. Widzisz ten kształt wypukły? Jak myślisz, jak to działa? Jaką drogę przebiegają promienie?





# Pieniądże, zakupy, okazje, czyli praktyczne ćwiczenia z matematyki

Dzień, może tydzień bez pieniędzy da się przeżyć – korzystając z zapasów, mając opłacone rachunki, bez zachcianek. A miesiąc? Rok? Nie da się. Czyli, chcemy czy nie, pieniądze są w życiu ważne. Nawet jeśli nie umiemy albo nie chcemy rozmawiać o pieniądzach, nie znamy się na finansach, nie da się od tematu uciec. Finanse to matematyka w każdym wymiarze, dlatego lepiej być przygotowanym, od dziecka, na spotkanie z nimi. Już od wieków obowiązuje model transakcji – towar za pieniądze i raczej nie ma powrotu do handlu wymiennego – towar za towar. Warto wiedzieć, że w starożytności handel był kołem zamachowym rozwoju matematyki – na każdym etapie – miary towarów, wartość towarów, kredyt/dług, zapłata – to pojęcia znane od zarania dziejów. Oczywiście, że większość potrzebnych (i niepotrzebnych) rzeczy kupujemy, czyli musimy za nie zapłacić. Wszystko, co jest do kupienia, czyli towar, ma cenę, która w większości wypadków odzwierciedla jego wartość (tu zdarzają się wyjątki). Cena wyrażona jest wartością liczbową w pieniądzu – w Polsce płacimy złotymi, w innych krajach innymi walutami, np. euro. Jakie słowo jest najczęściej powtarzane, najczęściej wyszukiwane w internecie w kontekście zakupów? Duże prawdopodobieństwo, że „tanio”. To naturalna cecha – chcemy kupować tanio, nie chcemy przepłacać. Lubimy orientować się w cenach, porównywać, kalkulować. Nawet zamożni i rozrzutni nie przepadają za przepłacaniem (i tu są wyjątki). Dokonując zakupów rozsądnie, można oszczędzać, gdy w planach są większe sprawunki czy inwestycje, można wziąć kredyt. Dzieci już od najmłodszych lat bombardowane są informacjami o przecenach, promocjach, rabatach, ofertach specjalnych. Większość z nich biernie bierze udział w rozmowach rodziców, osłuchuje się ze słowami i sformułowaniami: taniej, drożej, to kosztuje majątek, stać nas, nie stać, budżet domowy, podatki. Wiele jest okazji i pretekstów do rozmów o pieniądzu i matematyce. Nawet najprostszy paragon jest kopalnią tematów.

## □ Orientacja

Za 10 złotych raczej nie kupisz produktów na trzydniowy obiad dla 4 osób, a za 100 złotych nie staniesz się posiadaczem nowego roweru. Nie ma rady – warto orientować się w cenach różnych towarów. Poznawanie i zapamiętywanie cen może być nawet przyjemne, a dodatkowo doskonale pomaga ćwiczyć pamięć. Dzięki temu będziesz mieć szansę, by celnie szacować wartość zakupów.

Poznawaj, zapamiętuj, orientuj się.

## □ Ekwivalent

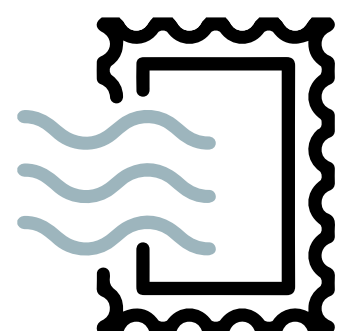
Trudne słowo, ale może się przydać. Co to? Równowartość. Ktoś ma banana, ktoś ma pocztówkę. Wymieniają się i umawiają, że jest OK. Nikt nikomu nic nie dopłaca. Uznają, że banan i pocztówką są równowarte, a każdy z partnerów ma takie same korzyści z wymiany. Zanim w obrocie pojawiły się pieniądze, zanim ludzie nauczyli się dokładnie ważyć i mierzyć, tak wyglądały początki handlu – ktoś wymieniał sól na sukno, ktoś bursztyn na przyprawę, a inny wielbłąda na stado kóz.

Dzieci wymieniają się między sobą, to naturalne. Na co ty możesz się zamienić? Co, na co wymienisz? Co ma dla ciebie równoważną, atrakcyjną wartość? Kiedyś, gdy sklepy z zabawkami nie były tak pełne jak dziś, dzieci też się wymieniały. W tamtych czasach różne drobne rzeczy, niby bezwartościowe, były bardzo cenne. Zapytaj rodziców, może nawet lepiej w tej konkurencji sprawdzą się dziadkowie – czy pamiętają, co kolekcjonowali, co było ich przedmiotem wymiany (może trudno będzie ci to zrozumieć, ale tak było):

” *Ci, którzy rozumieją tylko to, co da się wytłumaczyć, niewiele rozumieją*

**Marie von Ebner-Eschenbach**

- serwetki stołowe,
- torby, tzw. reklamówki,
- puszki po coli, po piwie,
- znaczki pocztowe,
- monety,
- podkładki pod piwo,
- kalkomanie z Kaczorem Donaldem,
- kasety i pocztówki dźwiękowe,





- naklejki,
- guziki,
- różne obrazki,
- czasopisma i książki,
- co jeszcze?

## □ Szacowanie

Jesteś w sklepie. W koszyku masz kilka produktów albo pełen wózek zakupów.

W drodze do kasy spróbuj oszacować, ile będą kosztować zakupy. Sprawdź potem, jak bliski rzeczywistej, łącznej wartości zakupów był twój szacunek. Z czasem dojdiesz do perfekcji. Możesz wciągnąć każdego z rodziny, kto stoi z tobą w kolejce do kasy – ciekawe, kto trafi najcelniej.

## □ Domowy koszyk

Te same towary mogą mieć inne ceny. Specjaliści regularnie robią badania porównawcze. Ustalają skład tzw. koszyka, w którym znajdują się podstawowe, popularne produkty, takie jak chleb, mleko, masło itd. Następnie sprawdzają ceny tak określonego zestawu w różnych sklepach, porównują. Na tej podstawie łatwo się zorientować, który sklep jest najtańszy, gdzie jest drożej, a gdzie najdrożej.



Zaproponuj zrobienie rodzinnego koszyka zakupów. Po pierwsze, musicie stworzyć listę najczęściej kupowanych produktów. To mogą być same artykuły spożywcze, ale również produkty chemii gospodarczej, kosmetyki. Wspólnie zbierzcie informacje o cenach w sklepach, do których chodzicie, podsumujcie i zdecydujcie, gdzie zakupy są najbardziej opłacalne.

## □ Tanio, taniej, najtaniej?

W internecie są serwisy porównujące ceny tych samych produktów w różnych sklepach – stacjonarnych i internetowych. Przy zakupie pasty do zębów cena może nie mieć znaczenia. Gdy rodzinie planujecie większy zakup – np. narty, telewizor – warto sprawdzać. Różnice bywają znaczące. A za oszczędzone pieniądze można nabyć coś jeszcze, np. ciekawą książkę, albo pojechać na wycieczkę.

Porównuj, ale zwracaj uwagę na opis. Sens ma porównywanie tych samych produktów. Porównywanie gruszek z jabłkami na nic się nie zda.

## □ Różnica robi różnicę

Czy wiesz, jaka jest różnica między znaczeniem słów: złoty i złotówka? A różnica między określeniami: pieniądze i pieniążki?

Pomyśl, może intuicja coś ci podpowie? Już wiesz? Zapamiętaj. To ważne.



Podpowiedzi:

Złoty to nasza polska jednostka monetarna (w innych krajach są np. franki, korony, dolary, euro), w złotych wyrażane są ceny i wartości pieniężne towarów. Złotówka to moneta o nominalnie 1 złoty, choć to określenie potocznie używane jest jako synonim złotego. Powiemy: kilogram jabłek kosztuje 3 złote, jeśli masz trzy złotówki, możesz kupić kilogram jabłek, wartość złotego rośnie albo złotówka traci na wartości. Pieniądze to ogólne określenie tak zwanych środków płatniczych, którymi płacimy, kupując rozmaite dobra. Pieniążki to potoczna nazwa monet, raczej o drobnych nominałach. Możemy powiedzieć, że bez pieniędzy nie można nic kupić, więc zbierasz pieniążki o różnych nominałach i wrzucasz do skarbonki.

## □ Od małego do dużego majątku

Mówi się: „Ziarnko do ziarnka, a zbierze się miarka”. Coś w tym jest.

Poproś dorosłych, by przekazywali ci wszystkie „złote” pieniążki – 1-, 2-, 5-groszowe, a może też „srebrne” – 10-, 20-, 50-groszowe. Systematycznie gromadząc, z groszy można zbierać sporą kwotę. Wydasz ją potem na przyjemności albo przekażesz na cele charytatywne (np. „Góra grosza” to zbiórka groszy organizowana przez PCK). Oszczędzaj regularnie, ciekawe, kiedy się zdziwisz, ile już masz.



## □ Różne modele

Jak kupujemy? Co wybieramy? Za co płacimy? Niech za przykład posłuży lokalny warzywniak. Niektóre owoce i warzywa dostaniemy na sztuki (np. por, kalafior), inne na wagę (np. jabłka, banany), inne w pojemniku (np. maliny, jeżynny), jeszcze inne w siatce (np. cebula, ziemniaki). Nie ma reguły, w innym sklepie możesz kupić pora na wagę, a jabłka na sztuki.

Zaobserwuj, jaka metoda obowiązuje w pobliskim warzywniaku (supermarkecie lub gdziekolwiek robicie zakupy), przyjrzyj się, jak są wyceniane i sprzedawane poszczególne gatunki warzyw i owoców. Jak myślisz, od czego to zależy? Czy miałoby sens kupowanie kalafiora na wagę, a borówek amerykańskich na sztuki?

## □ Zabawa w sklep

Taka zabawa cieszy dzieci pewnie od zawsze, bo w małym, tradycyjnym sklepie może być trochę magii (gorzej z klimatem w supermarkecie).

Zaproś towarzystwo do zabawy. Zorganizuj sklep: wymyśl nazwę, wybierz specjalizację, zgromadź produkty, stwórz własne pieniądze albo poproś o prawdziwe, wykombinuj coś, co będzie kasą, coś, co będzie wagą, coś, co posłuży jako koszyki, ustal ceny, zrób reklamę, rozdaj role – ktoś musi kupować, ktoś musi sprzedawać. Otwórz sklep. Skrupulatnie dodawaj ceny sprzedawanych produktów, jak możesz, waż dokładnie, uczciwie wydawaj resztę. Pamiętaj, że klienci muszą mieć do ciebie zaufanie – na każdym poziomie.

## □ Liczymy resztę

Rzadko za coś płacimy równą kwotę. Zdarza się, ale częściej oczekujemy na wydanie reszty. Z matematycznego punktu widzenia reszta to nic innego jak wynik odejmowania. Należy się 4,50 zł. Masz 5 zł. Ile reszty dostaniesz? Masz 10 złotych, ile reszty dostaniesz?

Licz, ćwicz, wykorzystuj okazje do obliczeń. Robisz zakupy, dostajesz resztę, sprawdź, czy jej wartość zgadza się z wynikiem odejmowania.

## □ Liczenie w pamięci

Obliczanie należności za zakupy bez kalkulatora czy elektronicznej wagi przeliczającej masę na cenę to wyjątkowo trafiony przykład wykorzystania tabliczki mnożenia w codziennym życiu. Liczy się prawidłowość obliczeń i szybkość. Czy zdarzyło ci się kiedyś patrzeć z podziwem na kogoś, kto sprzedawał warzywa na straganie i liczył w głowie: ile się należy? Nie jest to proste, ale niektórzy sprzedawcy mają talent albo przez lata wypracowali umiejętność.





# ” Myślenie to ciężka praca, i pewnie dlatego tak wielu jej nie podejmuje

Henry Ford

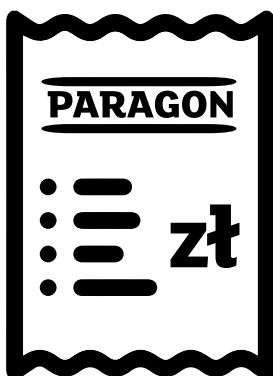
Spróbuj i zmierz się z wyzwaniem: 68 dkg zielonego groszku po 14,30 zł za kilogram, 3 nektarynki, w sumie 280 g, kilogram kosztuje 7,50 zł, 1 kalafior 4,60 zł za sztukę. Ile trzeba zapłacić? Albo policzysz prawidłowo, albo się pomylisz. Sprzedawca także może popełnić błąd. Kto go sprawdzi? Zawsze możesz poprosić o rachunek (kalkulator wskazuje sumę do zapłaty 16 zł 42 gr).

Ćwicz, sprawdzaj przy każdej okazji. Najlepszy sposób kontroli – nie musisz liczyć co do grosza. Szacuj, licz w przybliżeniu. Coś zawyżysz, coś zaniżysz – ale wynik będzie blisko prawdziwego. Wystarczy ogólny rachunek, a taki dasz radę przeprowadzić w pamięci. Gdy uprościsz i policzysz: 0,7 kg groszku po 14 zł za kilogram + 0,3 kg x 7 zł + 4,6 zł = 16 zł 50 gr. Nawet jeśli sprzedawca się pomyli, mniej więcej wiesz, jaki powinien być rachunek.

## □ Paragon fiskalny, czyli sprawdzam

Zgodnie z prawem każdemu zakupowi powinien towarzyszyć paragon, czyli kwitek potwierdzający rejestrację sprzedaży w systemie kasy fiskalnej. To właśnie kasy fiskalne drukują paragony. Ale nie tylko to robią. Czytniki kas służą do odczytania kodu produktu, potem naliczają ceny wraz z podatkami, rozliczają podatek VAT zgodnie z obowiązującymi stawkami. Potem dane ze wszystkich paragonów składają się na informację o obrocie sklepu, czyli sumę zakupów z całego dnia, miesiąca, roku. Paragony służą także klientom. Matematyka nie oszuka nikogo. Gwarantuje to znak równości: jeżeli  $A = B$ , to jest niepodważalne. I już. Coś kupujesz, musi być na paragonie. Dokładnie to, co masz w koszyku – na wagę, na sztuki.

Paragon jest dowodem zakupu, dlatego warto go brać. W przypadku wątpliwości, czy zakupy zostały dobrze podliczone, zawsze możesz sprawdzić pozycje i sumę wydrukowaną na paragonie fiskalnym. Tam powinno się wszystko



zgadzać, a jeśli nie, można reklamować. Bierz paragony, sprawdzaj, czy wszystko się zgadza. Gdy trzeba – reklamuj.

## □ Paragony i szeregi

Paragony dostajemy przy każdym zakupie, wszystko i wszędzie. Wyjątkiem może być zakup bukietu kwiatów albo poziomek od działkowca. Na paragonach jest mnóstwo informacji – nie tylko o cenie zakupów, ale i o naliczonych podatkach, dacie, godzinie wystawienia, NIP-ie sprzedawcy.

Zapoznaj się z informacjami na paragonie. Raz wystarczy.

Gdy zbierzesz trzy paragony, już możesz się zająć matematycznie. Choć im więcej ich masz do dyspozycji, tym ciekawiej i trudniej.

- ułóż od największej transakcji do najmniejszej;
- od najniższych podatków do najwyższych;
- uszereguj daty zakupu od najdawniejszej do najbliższej;
- uszereguj czas zakupu – od najwcześniejszej godziny do najpóźniejszej;
- uszereguj według numerów NIP – możesz zastosować dowolne kryterium.

Wczytaj się i spróbuj stworzyć kolejne konkurencje.

## □ Podatki VAT

Państwo nie zarabia pieniędzy, ale wydaje – na budowę dróg, na szkoły, na szpitale, zasiłki, administrację... Skąd państwo bierze pieniądze? Od każdego z nas. Jednym z podatków jest tak zwany VAT (z ang. Value Added Tax, czyli podatek od wartości dodanej), kwota zawarta w cenie produktu. Idziemy na lody, po marchewkę albo kupić spodnie lub samochód – przy okazji zakupów, płacąc za towar, płacimy podatek.

# 23% VAT

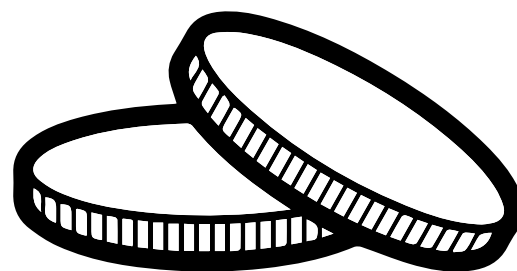
Na podstawie analizy paragonu najlepiej widać, jaki podatek odprowadzamy do kasy państwa. Są na nim wyszczególnione kwoty i stawki (procenty podatku są inne na różne artykuły).

Przyjrzyj się paragonom. Zobaczysz, jakie są stawki podatków. Na jakie grupy towarów najwyższe? Na jakie najniższe?

Wyobraź sobie, co by było, gdyby nie było podatków.

## □ Polska specjalność

Do Polski przyjeżdża coraz więcej cudzoziemców, czyli gości zza granicy. Kupują pamiątki, robią zakupy na straganach, zaopatrują się w napoje i jedzenie. Nasz kraj im się bardzo podoba, chwalą naszą gościnność, tylko nie mogą się nadziwić jednej, drobnej, ale powszechnej rzeczy: w każdym sklepie (zdarzają się wyjątki) sprzedawca prosi o „końcówkę”. Ktoś, nie tylko cudzoziemiec, płaci 13 zł 68 gr, pada pytanie: „Czy ma pan końcówkę?”, ktoś kupuje coś za 17 zł 43 gr, pada pytanie: „Czy ma pani końcówkę?”.



Zwróć uwagę przy zakupach, popytaj rodziców, czy też mają takie wrażenie, zobaczysz, że cudzoziemcy słusznie wytałali powszechną praktykę. To w zasadzie reguła. Na wezwanie wyszeptaj drobne albo mów, że nie masz drobnych. I czekaj, co będzie.

## □ Drugie imiona pieniędzy

Na co dzień mówimy skrótami, posługujemy się potocznymi pojęciami. Raczej nie zwracamy się do siebie na przykład tak: „Czy mogę prosić o nasze polskie środki płatnicze?” albo „Ile monet i o jakim nominale mam przygotować?” ani „Pożycz mi proszę sto złotych, najlepiej w jednym banknocie”. Inaczej rozmawiamy z rodziną, inaczej z kolegami, inaczej w sklepie.

Jak w twoim otoczeniu potocznie mówi się na pieniądze?

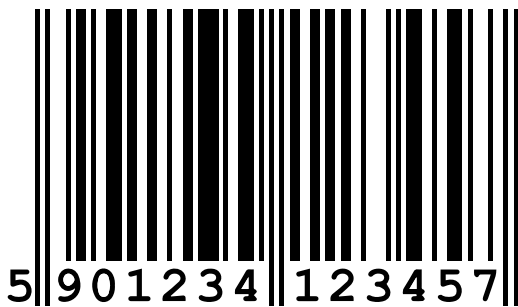
## □ Kod kreskowy

Prawie każdy produkt ma jednoznacznie przyporządkowany numer zawarty w kodzie kreskowym – to ułatwia zamawianie towaru, rozliczanie sprzedaży, obliczanie należności. Wystarczy wskanować unikatową kombinację grubszych i cieńszych kresek, którym przyporządkowane są cyfry, i już wszystko wiadomo. Co ciekawe, w dzisiejszym zglobalizowanym świecie każdy kraj ma swoje oznaczenie – numer towarów wyprodukowanych w Polsce zaczyna się od 590.





Sprawdź, jakie produkty mają z przodu wizytówkę „590”.



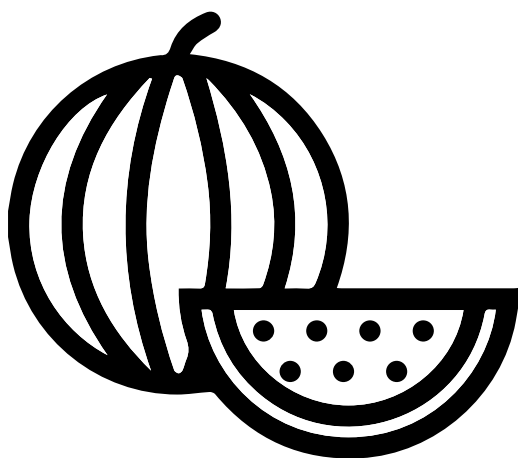
Przyjrzyj się kilku kodom, spróbuj je rozszyfrować. Jaka kompozycja kresek odpowiada poszczególnym cyfrom?

Masz pomysł, dlaczego kreski są lepsze do identyfikacji niż sam numer?

## □ Spółka zakupowa i inne opcje

Na coś brakuje pieniędzy? Zawsze znajdzie się rozwiązanie. Dorośli biorą kredyty, kupują coś na spółkę, oszczędzają.

Wyobraź sobie: jesteś na wycieczce. Masz ochotę na arbuza. Arbuza kosztuje 15 złotych, a sprzedawca nie chce go podzielić. Ty masz 5 zł. Co tu zrobić?



Pamiętaj – ZAWSZE jest rozwiązanie. Masz kilka opcji, poniżej trzy najbardziej oczywiste, ale na pewno nie wyczerpują możliwości. Rozważ (na razie teoretycznie) ich sens, atrakcyjność, realność:

- szukasz kolegów zainteresowanych dołączeniem do spółki zakupowej. Wystarczy jeden kompan, który ma i da 10 zł, dwie osoby, każda da po 5 zł, albo jedna np. 7 zł, druga 3 zł, i tak dalej... Potem musisz „zarządzać” arbuzem – każdy powinien dostać taki kawałek, jaką część sumy dołożył. 10 zł – 2/3, 5 zł – 1/3, 3 zł – 1/5. A jaką część dasz koledze, który zainwestował 7 zł?
- ogłaszasz zbiórkę po 1 zł i kupujesz arbuza dla całej grupy, wystarczy 15 osób. Arbuza należy do wszystkich – każdy dostaje podobny kawałek.
- pożyczasz od kogoś 10 zł. Masz arbuza na własność, możesz zjeść sama/sam, możesz

podzielić i sprzedawać kolegom kawałki albo poczęstować, kogo chcesz. Po powrocie z wycieczki musisz oddać dychę.

Możesz też zrezygnować z arbuza i napić się wody. Decyduj.

## □ Różna wartość tego samego

Cena i wartość. Podobne z pozoru pojęcia łatwo można pomylić. Najlepiej temat przeanalizować na przykładach. Wszystko zależy, jak bardzo komuś na czymś zależy.

Wyobraź sobie, że:

- jesteś na pustyni. Upał. Chce ci się pić. Ile warta jest dla ciebie butelka wody? 2,50 zł czy raczej jest bezcenna?
- zbierasz naklejki. Masz już prawie komplet, brakuje ci jednej. Czy za tę jedną jesteś gotowa/gotowy zapłacić więcej niż za poprzednie?

Wyłapuj takie sytuacje w życiu. Kiedy coś ma wyższą postrzeganą wartość niż cena, kiedy niższą?

## □ Tanio, drogo? Co tańsze, co droższe

To zależy. Dla jednego tanio, dla innego drogo. Sytuacja wpływa na postrzeganie wartości (cena wody w kinie – drogo, na pustyni – bez znaczenia). Nie ma jednej obiektywnej odpowiedzi. Ty, twoi opiekunowie macie wyrobione zdanie i jesteście w stanie rodzinie szeregować pojęcia tanio i drogo.

To może być niezła zabawa, możecie mieć odmienne punkty widzenia, spierać się co do oceny, porównywać jedne produkty (usługi) z innymi w ramach tych samych kategorii i w różnych zbiorach (np. pomarańcze mniejsze są droższe od większych, pomarańcze zasadniczo są droższe od bananów). Bez ograniczeń.

Jak oceniasz/oceniacie różne ceny (zawsze trzeba ustalić kryterium – o co chodzi, o jeden posiłek, o kilogram, o koszty miesięczne):

- puszka kukurydzy – świeża kukurydza;
- bilet autobusowy – benzyna;
- szampon do włosów – pasta do zębów;
- ziemniaki – ryż;
- bilet do kina – bilet na basen;
- i kolejne...

## □ Praktyczna lekcja marketingu

Co najmniej dwa razy w roku zaczynają się sezonowe wyprzedaże. Rabaty wyglądają imponująco, kuszą klientów. Z punktu widzenia

sprzedawców lepiej sprzedać końcówki taniej, dużo taniej, niż zostać z towarem na kolejne miesiące. Oferty sklepów to gra z klientem, czyli z tobą, ale od dziecka warto wiedzieć, że żadna promocja nie zasługuje na kupowanie niepotrzebnych rzeczy.

Na ogłoszeniach i w reklamach widzisz różne metody zachęcające do zakupów, ale najpopularniejsze są trzy warianty:

- „Obniżka o 20, 30, 40, 50, 60, 70... procent”;
- „Dwa produkty w cenie jednego”;
- „Kup dwie rzeczy, trzecią dostaniesz za darmo albo za symboliczną złotówkę”.

Jak czujesz, co się najbardziej opłaca? Jaką ofertę wybrać? To się da prosto policzyć i porównać. Zanim się skusisz, policz.

## □ Mądrość ludowa

Proste prawdy sprawdzają się od pokoleń. Jedną z nich jest powiedzenie, że biednego nie stać na tanie rzeczy. To kwestia rachunku ekonomicznego, czyli matematyka w praktyce.

Zgadzasz się czy nie? Stwórz listę argumentów na TAK i na NIE. Może masz takie przypadki w pamięci? Do jakich zakupów ta mądrość pasuje jak ulał?

## □ Promocja marzeń

Wiadomo, że reklama jest dźwignią handlu.

Wymyśl jakiś model superoferty, hiperpromocji, która przypadłaby ci do gustu. Zrób plakat z taką promocją.

## □ Cena cenie nie równa

Gdy ceny są podane za jednostkowe opakowanie, warto włączyć czujność. Opakowania są różne i zdarza się, że wielkością wprowadzają w błąd, dając złudzenie większej zawartości. Są też różne wagi, objętości, pojemności produktów – każdy producent ma własny marketingowy pomysł na odróżnienie się od konkurencji, na wzrost sprzedaży.



Założmy, że chcesz kupić pastę do zębów. Na półkach w sklepie wiele propozycji – różne firmy, różne przeznaczenie, różne opakowania. Coś trzeba wybrać. Spójrz nie tylko na cenę za opakowanie, ale i na informację o zawartości. Ilość pasty do zębów podawana jest w ml, są tubki małe i większe. Jedne mają 50, inne 75, jeszcze inne 100 czy 120 ml zawartości, objętości. To duże różnice.







Warto uważać, bo zdarza się, że na wysokości oczu wystawiony jest produkt w większym opakowaniu, który ma cenę za litr/kilogram wyższą niż ten na dolnej półce w mniejszym opakowaniu. Czy to logiczne?

Włączaj radar przy innych zakupach.

## □ 99 – magiczna końcówka

Każdy wie i widzi, że wiele cen ma końcówkę 99 groszy. To nie matematyka, a psychologia. Ludzie wolą wydać 4,99 zł niż 5 zł. A skoro mogą wydać 4,99 zł, to nie ma co proponować 4,33 zł czy 4,68 zł. Ta różnica to czysty zysk sprzedawcy. Zasada „dziewiątki na końcu” działa też przy większych kwotach: książki często kosztują 39,90 zł (bo to inaczej wygląda niż 40 zł), a ceny na telewizory np. 1999 zł (bo to zupełnie co innego niż 2000 zł).

Przy okazji zakupów popatrz na kartki z cenami. Czy na ciebie ten trik działa? Porozmawiaj z rodziną, ciekawe, co dorośli myślą o cenach kończących się na 9.

## □ Za jedyne...



Sprzedawcy często reklamują produkty, odwołując się do sformułowania „za jedyne”. Czy to 1 zł, 100 zł czy 500 zł musi działać. Masz, jako klient, mieć przekonanie, że to, co kupisz „za jedyne” ileś złotych, w praktyce jest warte wiele więcej.

Jak myślisz, na czym to polega? Spytaj, czy ten trik może wpłynąć na decyzję o zakupie?

## □ Anegdota

Rozmawia dwóch kierowców:

Jeden – „Czy wiesz, że zdrożało paliwo?”

Drugi – „Mnie to nie obchodzi, ja zawsze tankuję za 100 zł.”

Czy wiesz, gdzie tkwi błąd w rozumowaniu?

## □ Konsumentkie śledztwo

Zdarza się, że sklepy promują towary, zachęcając do zakupu konkretnego opakowania, zwykle większego. Intuicyjnie jesteśmy przekonani, że większe opakowanie równa się mniejszy koszt jednostkowy. Ale trzeba uważać na pułapki. Zgodnie z obowiązującym prawem na etykietach na produkcie musi być podana cena za opakowanie i jednocześnie cena za jednostkę, np. za kilogram, litr, sztukę. Trzeba poszukać tej informacji, bo zwykle jest podana miniaturowymi cyferkami, ale warto. Jak do niej dotrzesz, możesz się czuć bezpiecznie – masz wybór i informację, możesz kupować najtaniej.

Poćwicz, to ciekawe badanie, daje zaskakujące rezultaty. Przeliczasz? Ćwiczysz tabliczkę mnożenia. Pomagasz dorosłym, bo oni nie widzą małych cyferek.

## □ Dług i majątek

Takich pojęć używali przed wiekami Hindusi do opisania liczb dodatnich i ujemnych. Czy domyślasz się, o co im chodziło?

Wymyśl jak najwięcej sytuacji związanych z pieniędzmi, ale nie tylko, kiedy możesz zastosoować pojęcia „dług” i „majątek”. W jakich przypadkach masz do czynienia z każdym z nich? Podpowiedzi:

- dostajesz kieszonkowe i chowasz do skarbonki, powiększasz .....
- na wycieczce pożyczasz od kogoś 10 zł, masz .....
- prosisz rodzinę o wcześniejszą wypłatę kieszonkowego (z ważnego powodu), masz .....
- zarabiasz pieniądze, wyrzucając śmieci, masz .....

Samo życie – jak u starożytnych przodków – dług i majątek, dwie strony tej samej monety. Kiedy masz pieniądze, powiększasz „majątek”, a kiedy masz „dług”? Czy „dług” można zamienić na „majątek”? A odwrotnie?

Wyobraź sobie takie sytuacje, na swoją miarę posiadania.

## □ Domowy budżet

Pieniądże trzeba zarobić. Tylko małe dzieci myślą, że pieniądze bierze się ze ściany, czyli z bankomatu. Właściwie mają rację, bo widzą, jak dorośli wyjmują banknoty z bankomatu, czyli ze ściany. Dorośli wiedzą, że mogą je wyjąć, pod warunkiem, że mają je na koncie. Ale jak tam trafiły, skąd się wzięły? Rodzice chodzą do pracy, by zarabiać. Takie życie. Od najmłodszych lat większość dzieci słyszy: na to nas nie stać, to jest za drogie, nie mamy pieniędzy, nie możemy sobie na to pozwolić. Znasz to? Rodzice muszą dbać, by pieniędzy wystarczyło na wszystko, co niezbędne: na opłacenie rachunków za mieszkanie, na dojazd, na opłaty za szkołę, na ubranie, na jedzenie, na kulturę, na wakacje. O wszystkim muszą pamiętać!

Zachęć rodzinę do szczerzej rozmowy o pieniądzach. Podsumujcie (matematyka! – przyda się do tego kartka papieru albo arkusz kalkulacyjny Excel) wszystkie przychody (to, co rodzice zarabiają), stałe wydatki, rodzinne oszczędności. Poznasz sytuację, lepiej zrozumiesz decyzje rodziców.

## □ Ile czego zużywamy?

W dzisiejszych czasach to standard – ciepła i zimna woda z kranu, w domu jest ciepło dzięki

ogrzewaniu, gotujemy posiłki na gazie albo na kuchenkach elektrycznych, bez prądu ani rusz, większość sprzętów działa po podłączeniu do gniazdka elektrycznego albo po naładowaniu, też dzięki prądowi. To wszystko tak zwane media, za które płacimy i to nie mało. Może włączysz się do domowego programu oszczędzania, a tym samym przyłączysz do proekologicznych działań? Co miesiąc albo w innym rytmie płacimy za media. Rachunki są bardzo skomplikowane, składają się z wielu elementów, ale pewne jest, że im mniej zużywamy, tym mniej zapłacimy.

Warto mieć świadomość, że nic nie jest za darmo. Skąd wiadomo, ile zużywamy? Służą do tego liczniki. Nie do wszystkich mamy dostęp, ale gdy jest taka możliwość, spiszcie stany i rodzinnie przeanalizujcie zużycie. Może warto (i to będzie ciekawe) przeprowadzić domowy poligon badawczy – np.:

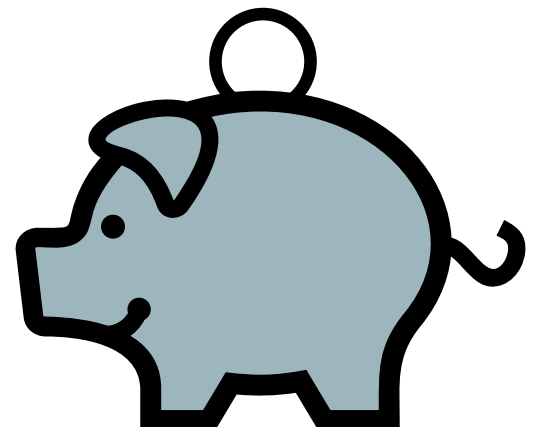
- wszyscy starają się zużywać mniej wody (jest na to 100 sposobów),
- konsekwentnie wyłączacie ładowarki i inne urządzenia czuwające (telewizory, komputery),
- przed zakupami porównujecie zapotrzebowanie na energię żarówek, sprzętów domowych, wybieracie energooszczędne.

## □ Potęga oszczędzania

Lokata w banku gwarantuje oprocentowanie, mniejsze lub większe, ale zawsze. „Świnka” nie rozmnoży pieniędzy, ale zanim będziesz mieć konto w banku, warto poznać urok oszczędzania.

Masz swoją skarbonkę? Super. Nie masz, koniecznie zorganizuj – może to być klasyczna „świnka” lub jakiegokolwiek pudełeczko (najlepiej, żeby było szczelnie zamknięte, z dziurką, przez którą można wrzucać monety i banknoty, lecz na tyle małą, by nie dało się łatwo sięgnąć po oszczędności). Wrzucaj tam wszystkie pieniądze (nawet monety o najniższych nominałach, ale i banknoty), które dostaniesz lub zarobisz. Nawet nie zauważysz, jak nabiera się spora suma.

„Rozbicie” skarbonki zawsze jest emocjonujące: jaką sumę udało się uzbierać? Czy starczy na wymarzony zakup? Warto poczekać. Zaplanuj, na co wydasz oszczędności. Poczekaj.





# Podróż, czyli matematyka w drodze, na wakacjach, na wycieczce

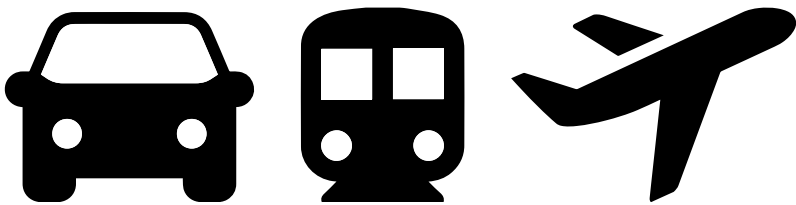
Każda wyprawa, krótka czy długa, pieszo, na rowerze, samochodem, pociągiem, samolotem może być ciekawym doświadczeniem. Matematyka jest wkoło, jak zawsze, nieodzownie. Podróż to doskonały czas na wyzwania matematyczne dla całej rodziny, bo jak powszechnie wiadomo – dzieci podczas drogi się nudzą. Może mniej będą się nudzić, gdy wezmą udział w przygotowaniach? Już najmniejsze dzieci można włączyć w planowanie wyjazdu. Może zaangażowane dzieci pomogą ją tak zaplanować, by była przyjemnością? Tematem z zakresu geometrii jest pakowanie – dobór walizek, ułożenie niezbędnych rzeczy, zapakowanie bagażu do bagażnika, ocena, czy bagaż da się udźwignąć, czy się zmieści w środku lokomocji, czy ciężar nie przekracza limitu (lot samolotem). W czasie podróży rozglądajmy się z dzieckiem, rozmawiajmy o tym, co widać przez okno, o miejscowościach, atrakcjach, które mijamy. Przygotujmy wspólnie plan trasy, przystanki, atrakcje po drodze – dzieciom to się na pewno spodoba i nie będą ciągle pytać, czy jeszcze daleko. Bo wszędzie jest ciekawie i we wszystkim jest matematyka. Przed wyprawą warto pomyśleć o rozrywkach – przygotować pomysły, zabrać gry, by droga upłynęła miło i szybko.

## □ Przygotowanie do podróży

Szykuje się podróż. Cieszysz się? Masz do wyboru – dać się spakować ijechać albo wziąć udział w przygotowaniach. Na co się decydujesz?

Może masz ochotę włączyć się w planowanie? Co wiesz o wyprawie? Zadaj pytania:

- Jak daleko się wybieramy?
- Jaką trasę wybieramy – najkrótszą czy najszybszą?
- Jak przebiegać będzie wybrana trasa? To będzie linia prosta czy łamana? (możesz narysować szkic trasy, uwzględniając najważniejsze punkty podróży, może wykreślisz trasę na mapie albo skorzystasz z map w aplikacjach, żeby zobaczyć, którądy będzie przebiegać)?
- Jaki środek lokomocji będzie najlepszy?



- Czy po drodze będą przystanki, jak długo będą trwały?
  - Czy będą konieczne przesiadki? Jeśli tak, to czy znamy rozkład jazdy – ile ewentualnie trzeba będzie czekać na kolejny etap podróży?
  - Ile będzie trwała podróż, z jaką prędkością będziemy się przemieszczać?
  - Jaki prowiant trzeba zabrać (ile posiłków dla ilu osób)?
  - Czy będzie niezbędny nocleg? Jeśli tak, to w jakim miejscu, czy mamy już zarezerwowane miejsce?
  - Czy pobyt jest zaplanowany?
- I wiele innych pytań z matematyką w tle. A na miejscu podsumujesz, czy wszystko poszło zgodnie z planem.



## □ Nie dla nudy

Czeka cię dłuższa podróż samochodem, pociągiem, autobusem? Nie musisz się nudzić, nie musisz oglądać filmów, możesz zająć się matematyką. Szare komórki będą ci wdzięczne. Możesz zamęczać towarzyszy podróży setką pytań, byle nie ograniczały się do podstawowego zestawu: „Daleko jeszcze?”, „Kiedy będziemy?”.



Rozglądaj się. Z prawej, z lewej, dzieje się sporo ciekawego. Masz na to gwarancję. Co możesz robić?

- licz: czerwone samochody, i/lub w innych kolorach, krowy na pastwiskach, bociany, snopki siana, traktory. Możesz notować na kartce w odpowiednich rubrykach.
- wypatruj rekordzistów: największego drzewa, najwyższej wieży, największego budynku.
- dodawaj w pamięci cyfry w tablicach rejestracyjnych mijanych samochodów (pamiętaj – 9 i liczby, których suma daje 9, nie zmieniają wyniku, gdy sprowadzasz je do postaci jednej liczby), wyszukuj reguły: same parzyste, nieparzyste, kolejne, może trafi się jakiś ciekawy numer, np. złożony z tych samych cyfr. Możesz (to nie matematyka, ale przy okazji...) odgadywać skąd pochodzą mijane i wyprzedzane samochody. Poznasz swój kraj i wyćwiczysz pamięć.
- wypatruj znanych kształtów – może spostrzeżesz coś okrągłego, kwadratowego, może trójkątnego? Analizuj wszystko, co ci się skojarzy: pola, drzewa, budynki, chmury itd.
- popatrz na korony drzew – czy wszystkie są takie same? Nie. Jakie kształty przypominają? Możesz dopasować kształty do gatunków drzew. Są charakterystyczne, przy dobrej wprawie – ćwiczenie czyni mistrza – rozpoznasz je z daleka.
- wypatruj szeregów – przydrożny szpaler drzew (takie same czy inne?), żywopłoty przy domach, klucz ptaków, sekwencje samochodów – np. trzy tej samej marki po kolei, 12 srebrnych po kolei. Warto być czujnym, bo w każdej chwili może się pojawić coś wartego odnotowania.





# ” W matematyce nie ma drogi specjalnej dla królów

## Euklides

- licz zbiory – ile owiec pasie się przy drodze, ile wagonów ma pociąg przejeżdżający w pobliżu, ile ciężarówek stoi na parkingu, ilu osób liczy grupa rowerzystów.
- no i zawsze możecie wspólnie rozwiązywać zagadki matematyczne, logiczne – wymyślać sami lub korzystać z gotowych zadań. Miłej podróży, czyli bon voyage!

## □ Szkic trasy

Jedziecie na rodzinną wyprawę z domu do miejsca X. Rodzice pewnie skorzystają z usług jakiejś aplikacji prowadzącej jak po sznurku do celu.

A ty zrób szkic – przed podróżą szkic planowanej trasy, ale możesz też odnotowywać trasę w czasie jazdy i zaznaczać kluczowe momenty, graficznie lub opisowo (np. przed Kutnem skręciliśmy w prawo). To zadanie wymaga uważności. Za pierwszym razem może ci zabraknąć kartki, bo podróż okaże się dłuższa, niż przewidywałaś/przewidywałeś. Nie zrażaj się. Możesz wziąć drugą kartkę i kontynuować. Z czasem dojdiesz do wprawy. Ale o co chodzi?

Narysuj plan. Zaczynaj od punktu START. I obserwuj podróż – skręcicie w prawo – rysujesz skręt w prawo, jedziecie prosto – rysujesz linię prostą (ronda możesz nie uwzględniać albo narysuj, jak wolisz). I tak aż do METY, czyli do celu. Na początku możesz zacząć rejestrować trasę już po wyjeździe z miasta – będzie prościej i szybciej wypracujesz oraz opanujesz metodę.

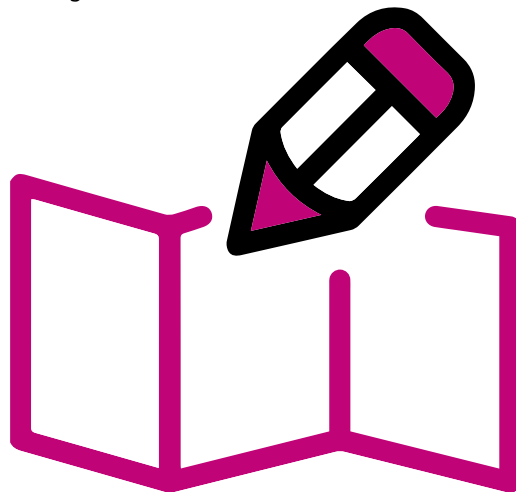


Możesz precyzyjnie przygotować inne trasy, np.: do sklepu, do szkoły, na basen, do parku, do dziadków, do najbliższego przyjaciela/przyjaciółki, na ulubione lody czy spacer z psem. Możesz dawać zagadki innym – niech zgadną,

o jaką drogę ci chodzi. Tak narysowana trasa przyda się też do zabawy w szukanie skarbu.

## □ Ciekawe

Czy wiesz, jaka jest różnica między mapą i planem? Nawet dorośli często się mylą – możesz ich przy okazji zaskoczyć i zaimponować wiedzą. Mapa to obraz większego terenu uwzględniający kulistość ziemi, ukształtowanie terenu. Plan przedstawia płaski, uproszczony obraz niewielkiego obszaru, np. miasta, ale może być plan osiedla, domu lub mieszkania. Planem może być też zapis pomysłu wyprawy, podróży – rysunkowy, czyli szkic, albo opis – ale to już w innym znaczeniu.



Ćwicz rysowanie planów. Pamiętaj o skali.

## □ Ile jeszcze

Planujecie, że podróż potrwa 4 godziny. Nudzi ci się?

Obliczaj, jaka część podróży już za wami, ile jeszcze zostało. Możesz obliczać miniony i pozostały czas w procentach, wyrażać ułamkami, podawać w minutach. Czas szybciej minie.

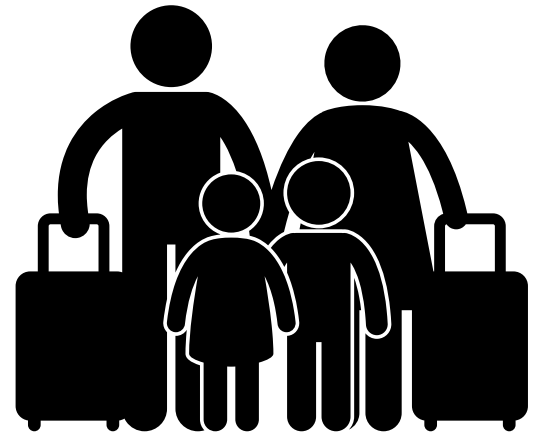
## □ Bajka podróżna

Podróż to świetny czas na rozmowę. A gdyby tak wspólnie ułożyć bajkę? Wiersz, zagadkę? Może zadanie z treścią z życia wzięte?

Może wymyślicie coś nowego, oczywiście związanego z matematyką.

## □ Rekordy w podróży

W podróży, na wakacjach też trzeba coś robić. Dlaczego nie stworzyć Wakacyjnej Kroniki Rekordów Rodziny?



Spisuj je w zeszycie, eleganckim notesie albo prowadź kronikę w internecie. Pamiętaj o dokumentacji fotograficznej i/lub ilustracjach.

Przykłady konkurencji:

- kto najszybciej przepłynie od ... do ...
- kto znajdzie najwięcej grzybów (jagód, małą, poziomek itp.)
- kto wypatrzy największe – najwyższe, najgrubsze – drzewo
- kto wypija najwięcej wody
- kto pierwszy dojrzy tęczę na niebie
- kto zje najwięcej pierogów
- kto zobaczy najciekawsze zwierzę
- kto nazbiera najwięcej pamiątek (muszli, szyszek, kamieni itp.)
- kto pierwszy wypatrzy klucz ptaków
- kto zaobserwuje najwięcej spadających gwiazd
- kto najwcześniej wstanie, żeby obejrzeć wschód słońca

I co jeszcze? To zależy od waszego programu podróży i tego, co będziecie robić.

## □ Kształty w podróży

Jedziecie na wakacje. Być może będzie okazja, by poznać różne miasta, miasteczka. Co jest w każdym mieście? Rynek.

Skup się na obserwacji rynków.

- Jaki ma kształt?
- Pod jakimi kątami odchodzą boczne ulice?
- Czy zabudowa jest spójna, czy od sasa do lasa?
- Czy zauważasz porządek geometryczny, czy raczej chaos?
- Jakiej wielkości są kamienice?
- Po ile okien mają?
- Jakie kształty mają dachy?
- Jak wyglądają chodniki?
- Jakimi płytkami są pokryte? Jaki mają kształt, jaki parkiet tworzą?





- Czy przy rynku, na rynku rosną drzewa? Może jest park? Czy są klomby?
- Jaki kształt mają latarnie, ławki, śmietniki?
- Osobnym tematem do obserwacji są studzienki wodne, kanalizacyjne wpuszczone w chodniki. Dlaczego to ciekawe? Po pierwsze, wszędzie na świecie są różne (można porównywać, robić zdjęcia, warto, bo niektóre pochodzą sprzed stu lat), po drugie, najczęściej są okrągłe. Wiesz dlaczego?

Będziesz w nowym mieście, patrz nie tylko na rynki, ale i na mosty, pomniki, nowe osiedla, stare kamienice, parki – to wszystko kształty. Pierwsze spojrzenie pozwala zobaczyć to, czego już nie widzisz, patrząc na obiekty dobrze znane.

## □ Jak dotrzeć do skarbu?

Masz wakacje, jesteś w nowym terenie. To szansa na nowe przygody.

Wykorzystaj okazję na miniwyprawę do parku, lasu, na sąsiednią działkę (dorośli muszą wiedzieć, gdzie jesteś, z kim i kiedy wrócisz). W lokalnych warunkach możesz poćwiczyć ręczną nawigację, czyli kierowanie do celu, bez użycia GPS, sygnałów satelitów, aplikacji na smartfony.



Zaproś kolegów do zabawy. Wybierz coś, co będzie skarbem – kamień, cukierek, cokolwiek. Schowaj w wybranym miejscu. W tajemnicy narysuj plan, jak dość do skarbu. Im bardziej będzie skomplikowany, tym bardziej ekscytująco. Chodzi o to, żeby poszukiwacze skarbu musieli odliczać kroki, skręcać w prawo, w lewo, poruszać się pod kątem, zawracać, wspinać, może odpowiadać na pytania i rozwiązywać zagadki... Ciekawe, kto pierwszy dotrze do skarbu? Zabawa może nie mieć końca, bo po tobie będzie kolej na następnego przewodnika.

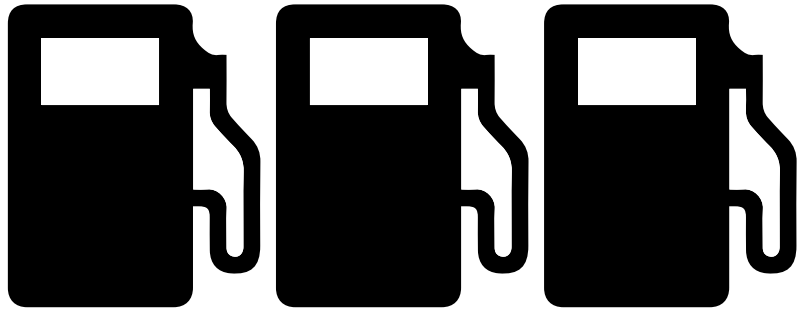
## □ Ile kosztuje paliwo

Cena paliwa (benzyny, oleju napędowego czy gazu) zmienia się właściwie z dnia na dzień. Doświadczeni kierowcy wiedzą, gdzie i kiedy tankować, by było najtaniej, bo ceny na stacjach się różnią. Taniej czy drożej, paliwo do samochodu to realny, niezbędny koszt – samochód bez niego nie pojedzie. Tankować trzeba.

Jedźcie na wycieczkę, poćwicz tabliczkę mnożenia, trochę dzielenia. Jedźcie za granicę – jeszcze ciekawiej. Zsumuj, ile kosztuje podróż. Jakie dane musisz mieć? Zbierz dane, ustal:

- jak daleko trzeba dojechać – ile kilometrów przed wami? – .... kilometrów

- ile średnio paliwa spala wasz samochód na 100 km? – .... litrów na 100 kilometrów
- jaka jest cena litra tankowanego paliwa (cokolwiek to jest)? – .... złotych za litr



Zastanów się, jak to policzyć. Zaskocz rodzinę wiedzą.

W ten sam sposób możesz obliczyć, ile wynoszą wydatki na dojazd do dziadków, do szkoły, do supermarketu, ile kosztują podróże samochodem przez miesiąc, wyprawa.

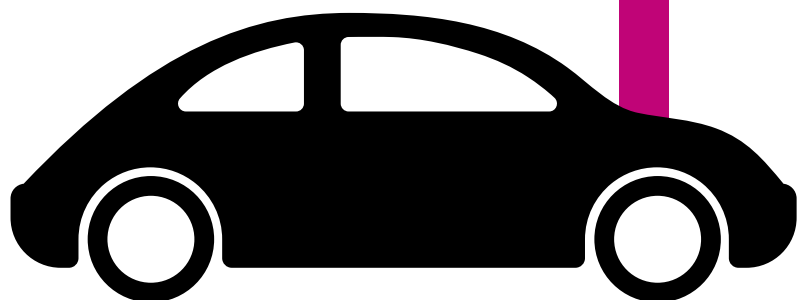
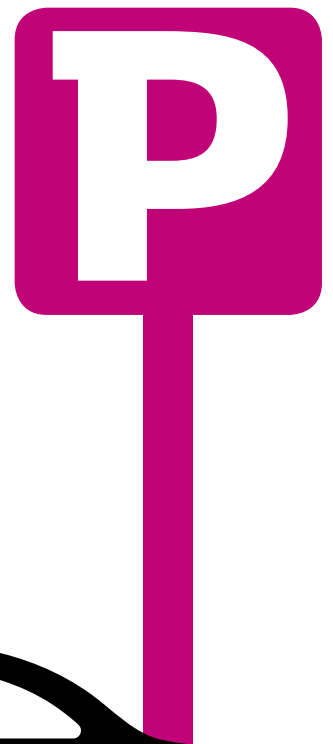
Porozmawiajcie o kosztach jazdy samochodem. Rodzice na pewno zwrócą twoją uwagę na fakt, że paliwo to nie wszystko. Gdybyś chciał poznać dokładny koszt przejeżdżanego kilometra, trzeba by uwzględnić cenę samochodu, wydatki na ubezpieczenie, przeglądy, części zamienne. To już skomplikowany rachunek. Ale...

## □ Parkowanie

Każda podróż, nawet najkrótsza, musi zakończyć się parkowaniem. To wcale nie jest takie proste – czasami zobaczysz samochód, którego kierowca, niezależnie od płci, niezmiernie się męczy przy parkowaniu. Doświadczonym kierowcom idzie sprawniej, ale zdarza się, że organizacja parkingów, układ miejsc postojowych, sąsiedztwo stojących aut i mistrzów kierownicy wystawia na próbę. Bywają parkingi źle zaprojektowane, zorganizowane bez sensu. Najwyraźniej ktoś miał problem z matematycznym myśleniem, z wyobraźnią przestrzenną, z logiką w ogóle.

Przyglądaj się parkingowemu życiu, a zobaczysz, ile tam wątków ściśle powiązanych z matematyką, geometrią, ile tam kątów, wymiarów, proporcji, szeregów:

- kształt parkingu,
- szeregi zaparkowanych pojazdów,
- wielkość miejsc parkingowych a wielkość parkujących samochodów,
- odległości między zaparkowanymi autami,
- organizacja parkingów podziemnych,
- czy manewrowanie przy parkowaniu – inaczej przodem, inaczej tyłem.

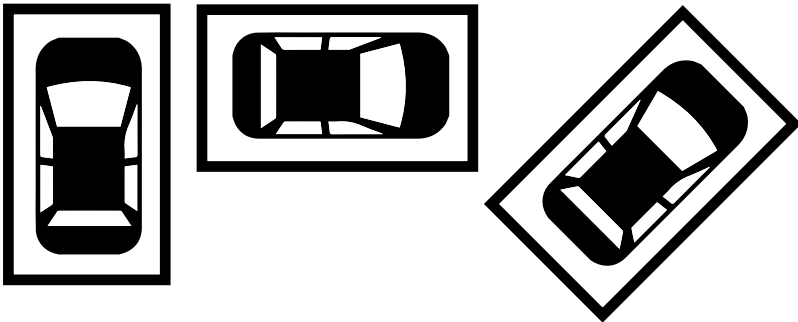




## □ Ćwiczenie praktyczne

Czy parkowanie jest trudne? Dla jednych tak, dla innych nie. To kwestia wyobraźni, wyczucia i praktyki.

Poćwicz na samochodzikach zabawkach. Może też być klocek, pudełko, a nawet telefon. Narysuj na kartce albo zbuduj z patyczków różne miejsca parkingowe – równoległe, prostopadłe, pod kątem, i ćwicz parkowanie. Przodem, tyłem. Jak łatwiej? Ciekawe, jakie wnioski wyciągniesz.



## □ Kamienie milowe

Znasz opowieść o kamieniach milowych Rzymian? Co 1000 podwójnych kroków (passusów) kładli kamień, by łatwiej było ustalić odległość z miasta do miasta. Wytyczali tak trasę, mogli ustalić, ile czasu zajmie przejazd między miastami. Dziś przy wielu drogach stoją białe (choć pewnie są wyjątki) słupki z oznaczeniami kilometrów, czasami z numerem drogi, odblaskami. Co dziesiąty słupek, masywniejszy od pozostałych, to słupek kilometrowy, wskazuje odległość od ustalonego (bywa, że nie zorientujemy się od jakiego, ale to nic) punktu. Dziewięć słupków pośrednich ustawionych jest pomiędzy słupkami kilometrowymi, co 100 metrów. Po co? Od czasów rzymskich cel się zmienił. Dziś pomagają ustalić, w jakim miejscu drogi znajduje się pojazd, drogowcy o tym systemie mówią pikietaż albo kilometraż. Przydają się w wypadku, gdy zepsuje się samochód i trzeba wezwać pomoc, gdy chcemy przekazać znajomym jadącym tą samą drogą, w jakim miejscu się znajdujemy, by umówić się na wspólny postój. Słupki służą też kierowcom do lepszej oceny odległości między pojazdami – jadącymi w tę samą stronę i nadjeżdżającymi z przeciwną, gdy planują wyprzedzanie.

Przyjrzyj się słupkom w czasie drogi. Patrz, jak szybko mijają w zależności od prędkości pojazdu. Gdy poświęcisz trochę czasu (a co masz lepszego do roboty w czasie jazdy?) na analizę odległości, będzie ci łatwiej szacować dystans w różnych sytuacjach, niekoniecznie drogowych.

## □ Znajdź różnice

Jesteś w nowym miejscu – bez znaczenia, czy to agroturystyka, czy zagraniczny kurort. Wszystko wkoło jest nowe. Tak jak tylko raz można zrobić pierwsze wrażenie, tak tylko na początku zauważamy wszystko inaczej, widzimy ostrzej, dostrzegamy różnice.

Porównuj nowe miejsca z innymi, które już znasz, z twoim miejscem zamieszkania.

- Co jest podobne, a co zupełnie różne?
- Co jest większe?
- Czego jest więcej?

Możecie zabawić się w rodzinne wynajdywanie różnic – np. każdy ma za zadanie wypisać 10, 20 albo więcej różnic. Możecie też po kolei zgłaszać swoje świeże spostrzeżenia. To będzie prawdziwe ćwiczenie spostrzegawczości.



## □ Czas mija szybko

Każde kolonie, obóz, wczasy, pobyt pod gruszą kiedyś się kończą. Jak jest fajnie, to zawsze skończą się za szybko. No cóż, wakacje nie trwają w nieskończoność.

Wiesz, ile ma trwać pobyt w nowym miejscu – tydzień, 10 dni, dwa tygodnie? Przyjmij, że to 100 procent. Ile procent stanowi każdy dzień? Odliczaj dni do końca i korzystaj z pobytu, ile się da.

## □ Ile kroków

Każdy spacer to minipodróż. Można sobie iść, można iść i o czymś myśleć, a można iść i liczyć kroki. Szczególnie zajmujące może to się okazać w miejscu, którego nie znasz, gdzie wszystko jest dla ciebie nowe.



Wymyślaj ciekawe możliwości zabawy krokami. Zaproś do zabawy inne osoby, porównujcie liczby kroków.

- idziesz w konkretne, nieodległe miejsce, które masz w zasięgu wzroku, np. do sklepu, na brzeg jeziora – oszacuj, ile masz kroków do celu. Znasz długość swojego kroku, passusa (dwukrok) – policz, jaki to dystans w metrach.
- chodzisz dokądś często – zmierz odległość krokami. Może jest kilka możliwych dróg dojścia? Zmierz, która najkrótsza.

## □ Pomiar kroku

Nienaturalny duży krok dorosłego to w przybliżeniu 1 m. Takimi krokami-susami można zmierzyć jakąś odległość, ale nikt tak nie chodzi. Długość równego kroku to ok. 75 cm, taka też jest przepisowa długość kroku marszowego w wojsku. Starożytni Rzymianie większe odległości, np. między miastami, mierzyli passusami, czyli podwójnymi krokami. Zgodzisz się, że łatwiej odliczać kroki jednej nogi – do wyboru lewej lub prawej – niż każdy krok. Passus, czyli historyczna miara rzymska, liczy ok. 1,48 m. 1000 passusów to mila rzymska, trochę się różni od współczesnej mili (1609 m), ale kluczowa jest nazwa – z łaciny mille, czyli tysiąc.

Zmierz swój krok i dwukrok. Jak? Połóż miarkę na podłodze. Dotknij palcami jednej nogi do początku miarki, zrób krok i zaznacz odległość do piąty drugiej nogi. Zrób drugi krok i zaznacz odległość do piąty pierwszej nogi (passus). I już możesz liczyć odległość krokami. Krótkie dystanse, np. od kanapy do okna – krokami (prawa, lewa, prawa, lewa...), odległość do parku – passusami. Prawa, prawa... albo lewa, lewa...





# Pomiary – klucz do ogarnięcia świata

Do badania i eksperymentów z matematyką nie są potrzebne ani specjalistyczne urządzenia, ani rękawice lub okulary ochronne konieczne przy doświadczeniach chemicznych, ale kilka podstawowych sprzętów będzie niezmiernie przydatnych. Z pewnością dostarczą one dziecku inspiracji i zajmą je lepiej niż niejedna zabawka. A rodzice i opiekunowie też będą się dobrze bawić, to gwarantowane. Oto lista sprzętów (część z nich na pewno jest gdzieś w domu):

- klasyczna waga szalkowa, koniecznie z odważnikami. Może być stara, są takie do kupienia na targach staroci (można też zrobić prostą wagę samodzielnie);
- waga kuchenna do precyzyjnego odmierzenia (kosztuje grosze);
- waga łazienkowa;
- pojemnik kuchenny z zaznaczonymi pojemnościami;
- rozwijana miarka 2- albo 5-metrowa, im dłuższa, tym większe możliwości, nomen omen, rozwoju, bo dzieci ekscytują się pomiarami długich odcinków;
- centymetr krawiecki do pomiaru obwodów i nieregularnych kształtów;
- klasyczna linijka i kątomierz – podstawowe przybory szkolne;
- poziomnica do kontroli poziomu i pionu, obserwacji kątów;
- kompas do wyznaczania kierunków i kątów odchylenia od wybranego kierunku;
- timer, minutnik, klepsydra do odliczania czasu;
- stoper, choćby w smartfonie;
- termometry do mierzenia temperatury, najlepiej wewnętrznej i zewnętrznej;

Bardzo przydatny jest elektroniczny, laserowy dalmierz, czyli przyrząd mierzący odległość. Pomiary przy jego użyciu dają dużo radości całej rodzinie (do rozważenia, bo urządzenie kosztuje około 200 złotych i nie jest niezbędne).

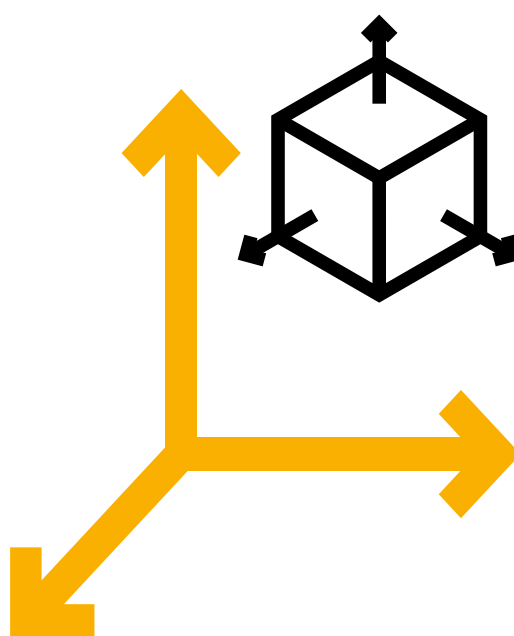
## Atawizm

Czyli coś, co zostało nam po przodkach. Czy wiesz, że ludzie lepiej oceniają odległość w poziomie niż w pionie? Nasi przodkowie musieli celnie ocenić odległość do bizona, na którego polowali, albo od dzikiego zwierza, przed którym musieli uciekać. A czy szacowali coś w pionie? Raczej mniej było okazji, choć były. Musieli szacować wysokość owoców na drzewie. Sięgnę? Nie sięgnę? Jakiej długości muszę mieć kij?

Wybierz po kilka, kilkanaście odległości w pionie i w poziomie – wystarczy w domu, ale oczywiście możesz poszerzyć teren badania. Oszacuj i sprawdź, czy też tak masz, że trafniej oceniasz odległość, długość w poziomie niż w pionie.

### Pion, np.:

- na jakiej wysokości jest twoje okno?
- jaka jest wysokość mieszkania?
- jak wysokie są okna?
- jaką długość mają zastony, firanki?
- jak wysoko nad podłogą jest parapet?



- jaką wysokość ma stół?
- jaką wysokość ma siedzisko krzesła?
- długość sukienki mamy?
- na jakiej wysokości zamocowany jest prysznic?
- ile centymetrów od sufitu wisi lampa?

### Poziom, np.:

- długość i szerokość pokoi;
- długość korytarza za drzwiami do windy, do sąsiada;
- długość łóżek;
- długość stołów;
- długość i szerokość wanny, brodzika;
- długość i szerokość budynku, w którym mieszkasz.

## Mania pomiarów

Wykorzystaj wszystkie możliwe pomoce do zabawy i naukowych pomiarów. Mierz, co tylko się da. Porównuj, tak będziesz mieć pojęcie – co większe, co mniejsze.

### Ustal na przykład:

#### Waga, pojemność:

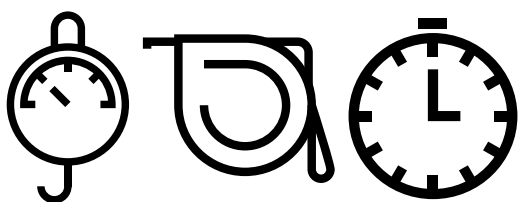
- Czy kilogram cukru waży więcej niż litr wody?
- Co jest cięższe: garnek aluminiowy czy żeliwny o takiej samej objętości (ogólnie





rzecz biorąc, chodzi o masę różnych naczyń)?

- Ile waży bielizna przed praniem, a ile po praniu?
- Ile jedzenia codziennie zjada rodzina?
- Ile waży wszystko i cokolwiek w kuchni – porcje jedzenia, opakowania, zależności netto, brutto, tara;
- Odmierzanie pojemności, przelewanie, porównywanie objętości w różnych opakowaniach – produkty sypkie i płynny;
- Ile waży najcięższa książka, a ile najlżejsza?
- Czy weekendowa gazeta jest lżejsza od kolorowego magazynu?
- Itd. Itd.



#### Długości, odległości:

- Jaki obwód ma blat stołu, a jaki blat kuchenny? Potem prosto policzysz, ile centymetrów przypada na jednego gościa, ilu gości zmieści się przy stole (w różnych towarzyskich spotkaniach bierze udział różna liczba osób)?
- Jakie są wymiary twojego łóżka, a jakie rodziców?
- Jaka jest głębokość wanny, a jaka prysznicza?
- Na jakiej wysokości jest parapet, a na jakiej biurko?
- Jaki jest najdłuższy prosty odcinek w mieszkaniu?
- Ile metrów ma najdłuższa ściana?
- Ile łącznie jest metrów bieżących okien?
- Jaka jest odległość od kanapy do telewizora?
- Jakie wymiary mają dywany?
- Jakie wymiary ma największa, jakie najmniejsza książka w domu?
- Jaka średnicę ma najmniejszy, jaką największy talerz w domu?
- Itd. Itd.

#### Czas:

- Badanie stopnia miękkości jajka w zależności od czasu gotowania;
- Pomiar czasu dojazdu do różnych miejsc: do windy, do śmietnika, do przystanku, do sklepu;
- Pomiar czasu trwania czynności, np.: zjedzenie kolacji, mycie zębów;
- Temperatura w pomieszczeniu, na zewnątrz, o różnych porach dnia, w różnych porach roku;
- Itd. Itd.

” **To, co nazywamy fizyką, obejmuje całą grupę nauk przyrodniczych, które opierają swe teorie na pomiarach i których idee i twierdzenia dają się sformułować za pomocą matematyki**

Albert Einstein

#### Wyższy stopień zaawansowania

Czy w domu macie poziomnicę? A może rodzice mają dalmierz – elektroniczny przyrząd do mierzenia odległości? Może gdzieś jest starodawny kompas albo nowoczesny, elektroniczny w jakimś smartfonie? To kolejne przyrządy, które dają niesamowitą radość pomiarów.

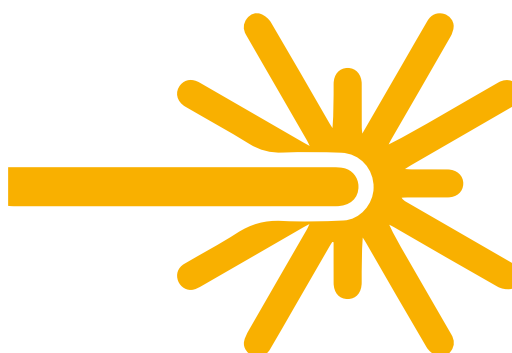
Wypożycz od rodziców i mierz. Obiecuj, że będą rodzinne pożyczki z twoich pomiarów.

Tematów nie zabraknie:

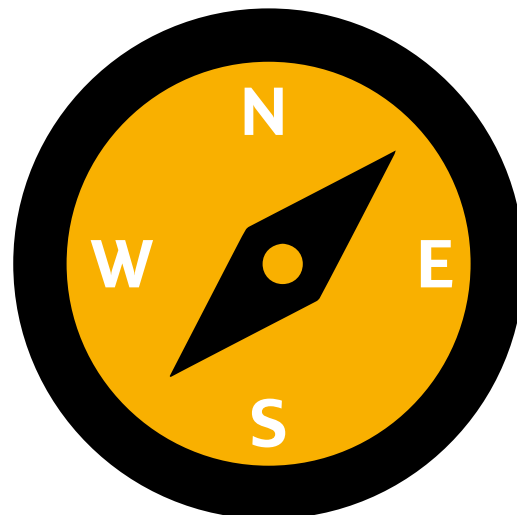
- Poziomnicą możesz sprawdzić, czy wszystkie poziome przedmioty rzeczywiście są poziome, czyli równoległe lub pionowe, czyli prostopadłe do podłoża. Zauważysz odchylenie – możesz zaproponować korektę. Pod stół podłóżysz karteczkę wyrównującą powierzchnię, skorygujesz zawieszenie obrazów, telewizora. Warto sprawdzić, jak stoją sprzęty domowe – lodówka, pralka – one powinny pracować w poziomie.



- Dalmierz też daje dużo radości – przykładasz przedmiot do ściany i wyświetla się odległość do wybranego punktu. Mając dane, możesz precyzyjnie obliczyć powierzchnię pokoi, ich kubaturę (objętość), znaleźć najdłuższy odcinek.



- Kompas to twój nowy przyjaciel. Chodź z nim wszędzie i patrz, gdzie północ, gdzie południe, gdzie wschód, gdzie zachód. Sprawdzaj, namierzaj. Zgadza się z kierunkami wschodu i zachodu słońca? Powtórz pomiar w innych porach roku. Ciekawe, czy coś się zmieni.



#### Pomiary, rozmiary

Po co komu za długie spodnie, za krótkie rękawy, za małe buty? Kupując ubrania, musimy znać swój rozmiar. Ubrania dla dzieci kupuje się na wzrost, dla dorosłych są różne tabele rozmiarów. Ktoś ma rozmiar 36, ktoś 48, inny XS lub 2XL. Przyda się poznać ten kod. Co prawda, w poszczególnych krajach oznaczenia różnią się między sobą, ale przynajmniej warto znać najbardziej popularne rozmiary, by trafić z zakupem jak najlepiej (szczególnie gdy nie można zmierzyć na żywo).

Poznaj swoje wymiary. Jeszcze rośniesz, ale bądź na bieżąco. Stwórz rodzinną kartę rozmiarów. Zmierz wszystkich domowników i zapisz wyniki. Do mierzenia nadaje się wszystko, niektóre wymiary przydają się często, innymi możesz zabawić się dla orientacji. Prawdopodobnie odkrywcze będzie porównanie obwodów głowy wszystkich domowników. Do pomiarów ciała najlepszy będzie centymetr. Możesz:



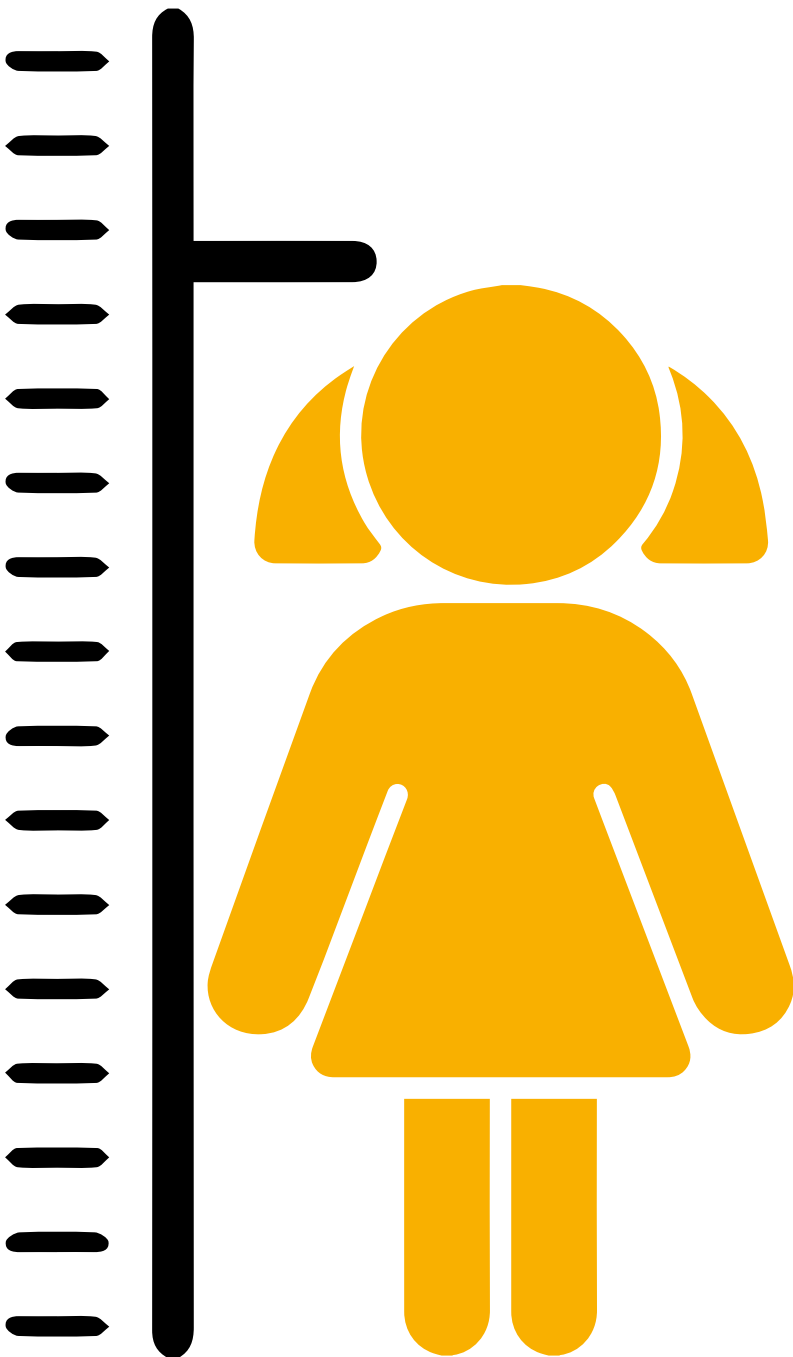


- po prostu zebrać miarę, czyli zmierzyć co chcesz i na co ci rodzina pozwoli;
- uszeregować od najmniejszego do największego w różnych kategoriach (wcale nie musi być tak, że najwyższa osoba ma wszystkie obwody, długości największe);
- prowadzić pomiary w czasie i patrzeć, jak zmieniają się dane (dzieci rosną, to pewne, a czy u dorosłych też zachodzą zmiany?);
- narysować sylwetki rodziny, np. zmniejszając wymiary według jakiejś skali, np. zmniejszając pięciokrotnie, byle proporcje zostały zachowane;
- sprawdzić, jak ma się obwód np. w pasie do wymiaru spodni mierzonych na płasko, czy jest dwa razy większy?

## □ Ślady wzrostu

Dzieci na całym świecie lubią sprawdzać, ile urosły. Przez noc, przez weekend, przez wakacje. Masz taką miarkę? Może rodzice odznaczają twój wzrost na framudze drzwi? To miła pamiątka.

Zrób autorską miarkę – zaproponuj dowolny kształt, zilustruj, jak chcesz (motyw żyrafy to klasyk). I zaznaczaj swój wzrost (pamiętaj całe stopy na podłodze, nie wyciągaj się!) np. co miesiąc. Możesz przygotować w prezencie podobne miarki dla rodzeństwa albo zaznaczajcie swój wzrost na jednej.



## □ Dokładność

To ważny temat, który dotyczy wszelkich odmierzanych długości, objętości, czasu, szybkości i niezliczonej ilości innych pomiarów. Zawsze zależy od sytuacji, od celu – po co coś mierzymy? Dla zabawy? Dla orientacji? Dla pewności? Czasem coś można oszacować na oko, czasem jest konieczna precyzja.

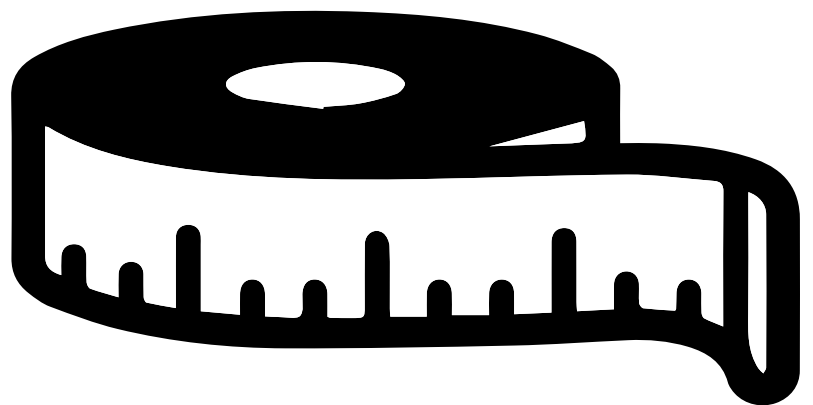
Mierzysz cokolwiek, ustalaj, jaka dokładność jest ważna. Konsekwencje mogą być poważne. Czasem 5 milimetrów sprawi problem (półka nie zmieści się we wnęce), czasami 5 centymetrów nie robi różnicy. Wszystko zależy.

Jak myślisz, z jaką dokładnością powinny być dokonane poniższe pomiary:

- długość: droga do windy – 12 metrów, długość półek, które zamówisz, by je zamontować w szafie – 96,5 cm, wymiar stopy – 22 cm, wymiary pokoju: 2,80 m x 3,20 m, wielkość guzika – 25 mm;
- czas: droga w górę – ok. 4 godzin, wycieczka do ZOO – ok. 40 min, jajko na miękko – 3,5 minuty, popcorn w mikrofalach – 30 sekund;
- objętość: wanna 200 l, wiadro 10 l, szklanka 250 ml, łyżeczka 5 ml.

## □ Technika pomiarów

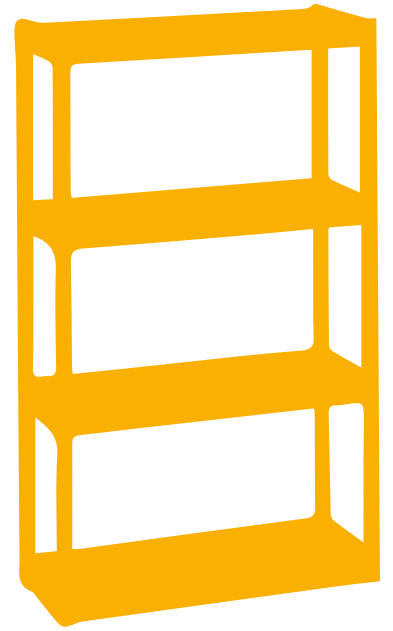
Żeby pomiar miał wartość, trzeba trzymać się zasad. Dlaczego? Po pierwsze, by pomiar był prawidłowy i spełniał cel mierzenia. Po drugie, żeby nie naciągnąć wyniku. Np. stajesz przy framudze (albo przy planszy do pomiaru wzrostu) i co robisz? Stoisz mocno na całych stopach i dociskasz plecy do ściany, czy też wyciągasz się, jak możesz, stajesz na palcach? Motywacje masz oczywiście – chcesz być szybciej wyższa/wyższy, ale pomyśl, czy nawet leciutko oszukany, naciągnięty wynik pomiaru ma sens? Co będzie, jak za miesiąc, po profesjonalnym pomiarze, okaże się, że zmalataś/zmalateś? To byłby ewenement. Trzeba pilnować, żeby pomiar był jak najbliższy stanowi faktycznemu.



Zrób ćwiczenie – wyobraź sobie, że jesteś w sklepie i kupujesz spodnie. Tak się złożyło, że musisz samodzielnie, bez niczyjej pomocy zmierzyć na sobie konieczną długość nogawki – od paska do ziemi (żeby były lekko na wyrost). Jak to zrobisz? Do dyspozycji masz centymetr krawiecki. Sprawdź (niekoniecznie musisz iść do sklepu w tym celu). Potem poproś kogoś o pomiar kontrolny. Czy wyniki są identyczne? Jeżeli nie, gdzie popełniłaś/popełniłeś błąd?

## □ Pomiar kontrolny

Ludzie się mylą – każdemu może się to zdarzyć. Aby uniknąć prostych błędów, wiele czynności jest kontrolowanych – w czasie produkcji, przy







akceptacji operacji bankowych, w czasie pilotowania samolotu. Czasami od rzetelności domowego pomiaru też wiele zależy, bo na przykład, co zrobić z półkami przyciętymi tak, że są troszeczkę za długie albo troszeczkę za krótkie? Dlatego warto pomiar powtórzyć, dla kontroli, żeby uniknąć problemu.

Mierzysz coś ważnego? Sprawdź dwa razy. Albo i trzy.

## □ Przenosiny w czasie

Historia o tym, jak nasi przodkowie przez setki lat dochodzili do obowiązującego dzisiaj systemu miar, jest naprawdę ciekawa. Kiedyś, kiedy nie było składanych miarek ani laserowych czytników odległości, ludzie musieli sobie w jakiś sposób radzić. I radzili, przy pomocy tego, co mieli zawsze przy sobie – własnego ciała. Miary były zawodne, bo ludzie różnili się budową, podobnie jak dziś. Trudno było ustalić wzorzec „łokcia” czy „stopy”. Stąd długi marsz ludzkości w kierunku obowiązującego obecnie jednorodnego, uniwersalnego systemu metrycznego (choć w krajach anglosaskich tradycyjne miary nadal trzymają się mocno – cal, jard, mila). Notabene i u nas do dziś właśnie w calach wymiaruje się przekątne telewizorów, podaje średnice śrub, wszelkich węży, złąček.

Wyobraź sobie, co i jak mogłabyś/mógłbyś mierzyć, nie mając nic, żadnych sprzętów mierniczych. Co byłoby problemem? Czy miary byłyby obiektywne, uniwersalne? Może coś zmierzysz po staremu?

Zmierz własną miarą (gdy to nie będą pełne wartości, postaraj się ustalić część miary):

- ile łokci ma długość i szerokość stołu?
- ile cali ma przekątna telewizora, a ile ekranu smartfona?
- ile kroków ma najdłuższy prosty odcinek w mieszkaniu?
- ile passusów (dwukrok) robisz od drzwi mieszkania do wyjścia na najbliższą ulicę?
- na wysokości ilu dłoni jest twoje biurko?
- czy szerokość drzwi wewnętrznych jest większa, czy mniejsza niż jard?
- ile piędzi ma wanna – na długość i na szerokość?
- ile sążni ma twój pokój?
- ile palców ma średnica ulubionego kubka?



## □ Czy to się zgadza?

Dawne miary były powiązane ze sobą, czyli dawały się przeliczać. Dziś niełatwo nadażyć za historycznymi relacjami, bo przez wieki, w zależności od terytorium lub od woli władcy, miary się zmieniały. Łokieć, tu i teraz, nie musiał zawsze być równy innemu łokciowi, a stopa stopie. Kto zacznie czytać o historii, naprawdę może doznać zawrotu głowy od mnogości i różnorodności miar. To temat na wyższą specjalizację.

Sprawdź na waszych rodzinnych pomiarach, czy mniej więcej zgadzają się długości, proporcje, zależności. Pamiętaj – to tylko zabawa. Zobacz, jak wyglądały relacje między miarami długości na polskich ziemiach (za Wikipedią). Przyjmując, że najmniejsza z jednostek – ziarno – ma 3,10 mm, policz, ile kolejne jednostki mają długości w systemie metrycznym:

- Palec (cal) = 8 ziaren = ?
- Dłoń = 3 palce = 24 ziarna = ?
- Stopa = 4 dłonie = 12 palców = 96 ziaren = ?
- Łokieć = 2 stopy = 8 dłoni = 24 palce = 192 ziarna = ?
- Sążeń = 3 łokcie = 6 stóp = 24 dłonie = 72 palce = 576 ziaren = ?

## □ Zwymiarowanie rodziny

Ile mierzy łokieć? Czyli prościej, choć brzmi bardziej skomplikowanie, ile centymetrów długości liczy odległość od stawu łokciowego do końca palca wskazującego? Ciekawe? Dziś ta wiedza do niczego ci się nie przyda, ale zawsze można się pobawić.



Zmierz, ile centymetrów ma twój łokieć. Spodobało ci się? Może opomiarujesz rodzinę? Tak w starym stylu, w starych miarach. Zorganizuj przybory miernicze, zmierz i zapisz wymiary swoje i bliskich. Potem możesz porównywać, wyciągać wnioski. Jaką długość mają te staro-dawne miary w waszym wykonaniu?

- wzrost (wiadomo – od czubka głowy do ziemi albo odwrotnie, byle być wyprostowanym i nie wspinać się na palce);
- krok (od pięty tylnej nogi do palców przedniej nogi w wyroku);
- passus, czyli podwójny krok (od pięty lewej lub prawej nogi do palców tej samej nogi

w następnym kroku);

- stopa (od palca do pięty);
- sążeń (odległość między końcami palców dłoni, gdy ramiona są rozpostarte maksymalnie);
- jard (odległość między brodą a końcem środkowego palca wyciągniętej na bok ręki);
- łokieć (od stawu łokciowego do końca środkowego palca);
- piędź (od końca kciuka do końca małego palca rozpostartej dłoni);



- dłoń (odległość w najszerszym miejscu pomiędzy nasadą palców a wewnętrzną krawędzią przylegającego kciuka);
- podwójna dłoń (pomiędzy odgiętym kciukiem a dołem rozpostartej dłoni);
- dłoń końska (odległość od zewnętrznej części dłoni do zewnętrznej krawędzi przylegającego kciuka);
- cal (szerokość kciuka w zgięciu palca);
- grubość włosa (potrzebna będzie lupa).

## □ Ćwiczenie fizyczne

Sążeń to rozpiętość ramion (dwa jardy). A jard, warto wiedzieć i łatwo to sobie wyobrazić, jako miara bardzo przydawał się kupcom tkanin – żeby zmierzyć tkaninę, kupiec łąpał brzeg materii brodą i wyciągał rękę. Tak udawało mu się powtarzalnie mierzyć długość tkaniny – do dziś wielcy krawcy korzystają z tej metody. Taka odległość wynosi trochę mniej niż metr, a ściślej 91,4 cm. No ale wracając do sążnia – sążeń to dwa jardy (tak jakbyśmy sobie wyobrazili, że kupiec łąpie tkaninę brodą i rozkłada obie ręce na boki). I co ciekawe, podobno sążeń równy jest naszemu wzrostowi.

Możesz sprawdzić. Stajesz przy ścianie. Zaznaczasz wzrost. Potem odsuwasz się na bok, rozkładasz szeroko ręce i jednym palcem wskazującym dotykasz podłogi, a ktoś zaznacza, gdzie sięga drugi, wyciągnięty pionowo w górę palec wskazujący. Czy to jest na wysokości twojego wzrostu? Sprawdź, jak to wygląda u innych. Wszak jedni mają dłuższe ręce, a inni np. tułów.





# Prawdopodobieństwo, czyli co jest jak dalece możliwe i jak bardzo

Tak jak logika zajmuje się zdaniami oznajmującymi i nie bierze udziału w gdybaniu, tak prawdopodobieństwo bada to, co nieprzewidywalne. Ma co robić, bo niewiele rzeczy w życiu jest pewnych. Dorośli żartują, powtarzając myśl amerykańskiego polityka Benjamina Franklina żyjącego w XVIII wieku: „Na tym świecie pewne są tylko śmierć i podatki”. Większość tego, co dzieje się w naszym życiu zależy od przypadku, czyli jest nie do przewidzenia. Ale na ratunek stawia się matematyka, która i tutaj może pomóc. Prawdopodobieństwo zdarzeń losowych daje się ująć w matematyczne reguły. Przyczyną rozpoczęcia naukowych badań nad prawdopodobieństwem był pewien francuski bogacz, który koniecznie chciał wygrać w kości. Miał nadzieję, że z pomocą tęgich głów matematycznych znajdzie sposób, żeby przechytryć los i innych graczy. Nie ma mowy. Nie ma gwarancji ani sprawdzonego, uczciwego sposobu, by w kolejnym rzucie wypadła 6, ale wiadomo, jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie i że nie wypadnie. Analiza rachunku prawdopodobieństwa w grach losowych, rzutu monetą, rzutów kości, rozkładu kart jest fascynująca i dostępna dla każdego, przy domowym stole. Miliony ludzi na całym świecie liczą na łut szczęścia w grach losowych, z nadzieją kupują losy na loterii, wypełniają kupony. Szansa trafienia 6 liczb z 49 jest jedna na prawie 14 milionów. Mało. I co z tego? Przed kolekturami stoją kolejki, bo natura ludzka sprawia, że każdy liczy na uśmiech fortuny skierowany właśnie do niego. Nawet dziecko wie, że czasami nikt nie trafi i jest kumulacja, niekiedy trafi kilku graczy naraz – mają szczęście czy pecha? Prawdopodobieństwo jest informacją, daje orientację, może być przesłanką do wyboru, decyzji, nie daje żadnej gwarancji. Mówimy, że coś jest prawdopodobne lub nieprawdopodobne, pewne albo niemożliwe.

## □ Skale prawdopodobieństwa

Zgodnie z przyjętą definicją prawdopodobieństwo zdarzeń losowych jest liczbą. Największe możliwe prawdopodobieństwo to „1” i jest to prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego, najmniejsze to 0 i jest prawdopodobieństwem zdarzenia niemożliwego. Ale tak, jak w wielu sytuacjach, język potoczny wzbogaca codzienną komunikację, pozwala na wiele innych określeń związanych z określeniem prawdopodobieństwa.

Możesz wypracować swoją podręczną miarkę prawdopodobieństwa, skalę. W codziennych sytuacjach możesz oceniać prawdopodobieństwo i oznaczać zdarzenia, jak chcesz, jak ci będzie najwygodniej:

- formalnie: od 0 do 1, pomiędzy tymi skrajnymi wartościami są nieskończone możliwości – np.  $1/6$ ,  $1/365$ ,  $1/1000$  itp.
- w procentach w skali od 0% do 100%, gdzie 100% – zdarzenie pewne, 0% – zdarzenie niemożliwe, pomiędzy nimi odpowiednio pośrednie wartości np. 10%, 33%, 99%.

**0%****100%**

- opisowo: do wyboru masz zakres określeń między „pewne” a „niemożliwe”. Pomędzy nimi możesz tworzyć/wykorzystywać dowolne określenia: raczej nie, na pewno nie, raczej na pewno nie, może troszeczkę, ciut-ciut, chyba będzie ciężko, na bank, w życiu, akurat, fifty-fifty, jak mi tu kaktus wyrośnie, pewne jak Słońce, nie ma ludzkiej mocy... Wybierasz, co ci pasuje, ale przede wszystkim, co pasuje do sytuacji. Może uszeregujesz te określenia?

” **Jedną z korzyści wynikających z orientacji w matematyce jest to, że można zaimponować znajomym**

Ian Stewart

## □ Zdarzenia losowe

Na formalne obliczanie prawdopodobieństwa masz jeszcze czas, ale niezależnie od wieku masz intuicję. Wiesz albo wydaje ci się, że wiesz, co jest jak prawdopodobne. I to jest dobry początek.

Wymyśl, przypomnij sobie z życia wzięte sytuacje, zdarzenia, które zależą od losu. Czy i jak bardzo według twojej intuicji są one prawdopodobne, w jakim stopniu nieprawdopodobne? Swoją intuicję możesz wyrazić według jednej z powyższych metod: od 0 do 1, od 0% do 100% lub potocznie. Gdy cokolwiek obstawisz, sprawdź koniecznie, jak trafiona była twoja intuicja.

Może starsi pomogą ci policzyć prawdopodobieństwo (nie zawsze będzie to możliwe albo będzie możliwe dopiero po doprecyzowaniu założeń).

Poniżej kilka przykładów – z życia. Zwróć uwagę, że nie wszystkie zdarzenia są czysto losowe, na niektóre masz wpływ. A jeśli tak, to możesz coś





zrobić, żeby zwiększyć prawdopodobieństwo spodziewanego zdarzenia. W części przykładów będzie to więc prawdopodobieństwo matematyczne, w części praktyczne (bliskie gdybaniu).

Jak oceniasz prawdopodobieństwo, że:

- sąsiadom urodzi się dziewczynka czy chłopiec,
- w rzucie monetą wypadnie orzeł czy reszka,
- wypadną trzy orły, gdy rzucasz raz trzema monetami,
- w twojej klasie, wśród 20 uczniów, jest ktoś, kto obchodzi urodziny tego samego dnia co ty,
- na chybił trafił, czyli przypadkowo, nie patrząc, spośród 8 par skarpet z szuflady wyciągniesz jedyną parę, której nie lubisz,
- suma oczek dwóch kości w jednym rzucie będzie większa niż 7,
- pierwszą osobą, którą spotkasz po wyjściu z domu, będzie kobieta,
- losowo wyciągnięta karta z pełnej talii kart będzie pikiem (jeden z kolorów, inne to kiery, trefle, karo),
- będzie słońce czy deszcz,
- na święta będzie „Kevin sam w domu”,
- zdążysz z porządkowaniem pokoju przed wyjazdem,
- szansa na wygraną w szkolnej loterii (jest 100 losów, 3 losy są wygrywające, możesz wybrać jeden los),
- dostaniesz na urodziny to, o czym marzysz,
- z torebki, nie patrząc, wyciągniesz dropsa (albo inny cukierek) w ulubionym smaku (wiesz, że to mieszanka 3 smaków i cukierków w każdym smaku jest tyle samo),
- czy trafisz celnie do kosza, do bramki, w kręgle...
- znajdzie się twoja ulubiona zabawka,
- i tu miejsce na niekończącą się liczbę kolejnych, mniej lub bardziej zależnych od losu, zdarzeń do oszacowania.



## □ Przepiękowska zbieżność?

Co to jest „los”? Zależy od znaczenia. Los, inaczej przeznaczenie, czyli to, co nas spotyka w życiu – zarówno dobre, jak i złe rzeczy (choć gdy się dzieją, nie można z całym prawdopodobieństwem być pewnym, że to dobre albo niedobre, bo różnie się może okazać...), a na co nie mamy wpływu, co nie da się przewidzieć, nie da się przygotować na los. Drugie znaczenie losu to kupon uprawniający do udziału w loterii. Żeby grać, żeby wygrać, trzeba mieć los. To los i to los. Los losu zależy... od losu?

Czy grałaś/grateś kiedyś na loterii? Dzieci nie mogą brać udziału w grach losowych, ale kupon na loterii w czasie pikniku to inna historia. Ciekawe, czy udało ci się już coś wygrać w życiu? Jak oceniasz – masz szczęście czy pecha w takich sprawach (niektórzy mówią, że zawsze wygrywają, inni mają przekonanie, że nigdy nic). Popytaj, jak swoje szczęście w grach losowych oceniają członkowie rodziny. Zbierz oświadczenia, uszereguj w kolejności od najszcześniejszego do największego pechowca (chodzi tylko o zabawę). Gdy następnym razem trafisz na jakąś loterię fantową (fantami kiedyś nazywane były nagrody), daj sobie szansę, weź udział, ale przede wszystkim spróbuj oszacować szanse na wygraną.

Pomocnicze pytania:

- ile jest losów?
- ile jest nagród?
- czy każdy uczestnik może wziąć jeden los, czy też więcej?
- jak będzie prowadzone losowanie („sierotka”, z zawiązanymi oczami czy wrzucone losy będą dokładnie wymieszane)?

## □ Suma okoliczności

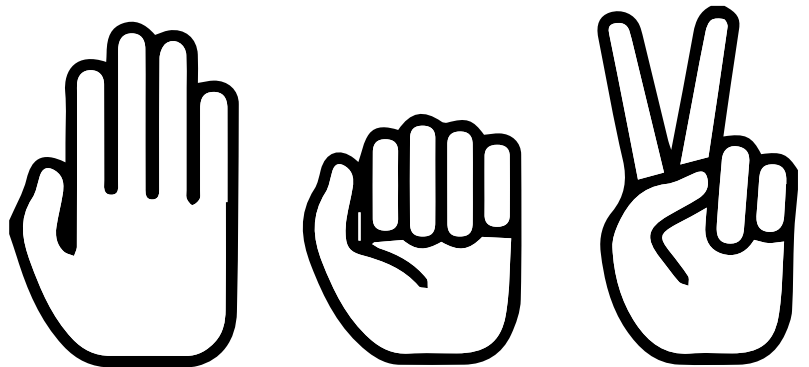
Jak to jest z tym prawdopodobieństwem? Jest obiektywne czy nie? To zależy. Na rzut kośćmi nikt, nawet geniusz ani mistrz sprawnych rąk nie ma wpływu, decyduje jedynie przypadek. Czy dziecko będzie miało niebieskie oczy, czy brązowe (a może zielone?) zależy od wielu czynników genetycznych, choć jest w tym sporo losu. Prawdopodobieństwo, że ktoś odgadnie, w jaki klawisz pianina uderzono, by wydobył się określony dźwięk, zależy od jego słuchu, nie od losu (akurat, jaki ma słuch to zależy od losu). Czy sportowiec zdobędzie medal, zależy od wysiłku włożonego w treningi, ale i od formy konkurentów.

Jak sądzisz, czy w każdej sytuacji można podać (próbować liczyć) prawdopodobieństwo? Czy zawsze jest w tym sens? Decyduje przypadek, ale mogą być przesłanki, że coś się wydarzy częściej, coś rzadziej. Przesłankami mogą być ewidentne fakty, wyniki badań, zebrane dane statystyczne, pomiary, obliczenia. Czy w rodzinie, w której od lat rodzą się sami chłopcy, kolejne dziecko będzie też chłopcem? Wcale nie musi tak być, ale może. Przez ostatni tydzień była piękna pogoda – jutro będzie słońce czy deszcz? Drużyna zwycięża od początku rozgrywek, czy wygra kolejny mecz? To się okaże.

## □ Kto wygrywa? Kto zaczyna?

Prawdopodobieństwo bywa jak waga – rozkłada się pół na pół. Tak jest np. z rzutem monetą. Albo orzeł, albo reszka. Trzeciego wyjścia nie ma. I to się może przydać na przykład, gdy trzeba zdecydować, kto zaczyna mecz, bo ktoś musi. Skoro tak, najwygodniej zdać się na los, nikt nie może mieć pretensji. Obiektywnie szanse są fifty-fifty, czyli 50:50.

W jakich innych sytuacjach rzut monetą może rozwiązać problem? Jak można sobie inaczej poradzić, by wylosować kogoś, kto coś? Kilka metod, ale zawsze trzeba ustalić zasadę. Kto wygrywa i co to znaczy, że wygrywa?



Metody:

- ciągnięcie zapalek – kto z łebkiem, kto bez,
- rzut kością lub kośćmi – kto wyrzuci więcej oczek,
- wybór karty – kto wyciągnie większy nominał, np. as to więcej niż walet,
- rzut monetą,
- kamień – nożyce – papier (papier owija kamień, kamień tępi nożyce, nożyce tną papier),
- raz, dwa, trzy, ile palców masz ty,
- kogucik czy kurka (w jaki kształt ułożą się ściągnięte nasionka żdźbła trawy?),





- w której ręce (ukryty przedmiot w jednej dłoni),
- inne pomysły?...

## Orzeł czy reszka

Ile razy sięgamy po tę metodę! Kto idzie wyrzucić śmieci? Kto zjada ostatni kawałek ciasta? Która drużyna rozpoczyna mecz? Krótki, jednoznaczny wyrok, nikt nie dyskutuje. Tak chciał los. Rzut monetą – wypadnie albo orzeł, albo reszka. Może się jeszcze zdarzyć, że moneta ustawi się na brzegu, ale to mało prawdopodobne. Zakładając, że moneta jest równo wyważona i nie ma skaz zakłócających jej ruch, prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł i reszka, jest takie samo. Są to dwie równie prawdopodobne możliwości. Prawdopodobieństwo każdej opcji to 1/2.



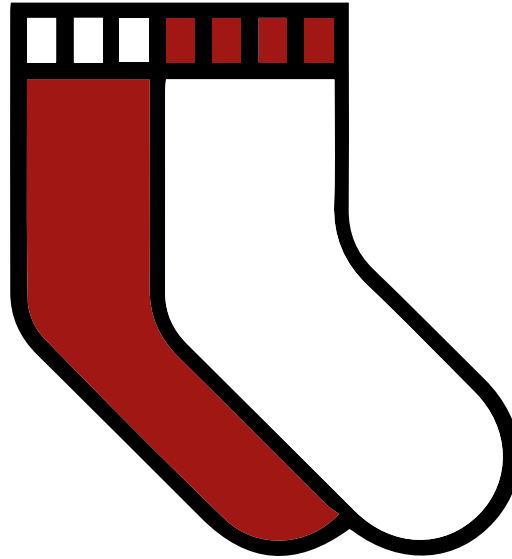
Sprawdź to. Jeden warunek – musisz mieć chęć i czas, żeby wykonać jak najwięcej rzutów. Gdy chcesz sprawdzić statystycznie częstość występowania poszczególnych zdarzeń elementarnych (tak matematycy nazywają np. pojedynczy rzut), musisz mieć odpowiednią próbę, czyli liczbę powtórzeń w tych samych warunkach. Nie ma gwarancji, że orzeł i reszka będą spadać na zmianę. Może być tak, że w pierwszych dziesięciu rzutach wypadnie orzeł, a potem kilka razy reszka. Zresztą układy mogą być dowolne, będą losowe, nikt tego nie przewidzi. Przy 100 rzutach możesz już dojść do względnej równowagi, ale niekoniecznie. Może próba 100 rzutów jest za mała? Dowiesz się tylko w praktyce, a i to nie da ci pewności.

## Przypadek?

Życie to seria przypadków. Gdyby tata nie spotkał mamy, ciebie by nie było. Mogło być jeszcze gorzej: gdyby babcia nie spotkała dziadka, nie było mamy, taty. Byłby ktoś inny albo nie byłoby nikogo. Za każdym razem, gdy decydujesz: skrócić w prawo czy w lewo, wyjść z domu teraz czy za 5 minut, pójść na lody czy do biblioteki, nie zastanawiasz się nad konsekwencjami. Nie wiadomo, co by było, gdyby było i nie ma co gdybać. Tego się nie da sprawdzić. Przypadek niesie w sobie nieskończony potencjał, nie ma co się tym zajmować na co dzień, bo można zwariować, ale warto mieć świadomość.

Poświęć jeden dzień (a może to za długo?) na analizę potencjału konkretnych przypadków

w twoim życiu. Jakie działania, decyzje niosą możliwość różnych rozstrzygnięć? Czy coś tak banalnego, jak wybór skarpetek, może mieć znaczenie? Czy to będzie ciekawe?



Przykład:

Wstajesz rano. Jest chłodno. Trzeba znaleźć skarpetki. Normalnie sięgasz do szuflady, wyciągasz parę i gotowe. A dzisiaj nie możesz skompletować, szukasz po całym domu, żeby jednak założyć parę, a nie wyglądać jak pajac. Znajdujesz, ale jest późno. Łapiesz kanapkę, tornister i lecisz na przystanek. Ups... autobus uciekł, widzisz jego tylne światła. Pech? Czekasz na następny, bo nie masz wyjścia. Nadjeżdża. Siadasz koło dziewczyny/chłopaka w twoim wieku. Zaczynacie rozmawiać o pechu, ona/on też ma takie doświadczenia. Tak dobrze wam się rozmawia, że postanawiacie jeszcze się spotkać. Właśnie tak poznałaś/poznałeś przyjaciółkę/przyjaciela na całe życie.

## Prawdopodobieństwo w biznesie

Jeszcze nie masz własnego biznesu, ale kto wie... Na razie jesteś klientką/klientem i każdą decyzją zakupową, w mikroskali, dostarczasz danych biznesmenom, panu z warzywniaka, pani w lodziarni, korporacjom. Jak to możliwe? Żeby zarobić, trzeba sprzedać towar, żeby sprzedać, trzeba go mieć. Żeby mieć, trzeba zamówić albo wyprodukować. Ale co? Trzeba wiedzieć. Najwięksi robią wielkie badania rynku, analizują trendy – wychodzi im, że w przyszłym sezonie modny będzie kolor zielony. Oznacza to, że największe prawdopodobieństwo zakupu będą miały ubrania w kolorze zielonym. Pięknie. Sprzedawca na targu obserwuje klientów i wie, że z większym prawdopodobieństwem sprzeda więcej pomidorów niż papryki, właścicielka pizzerii obserwuje klientów i zakłada, że prawdopodobnie wieczorem będzie najwięcej klientów, dlatego wieczorem zatrudnia dwóch kucharzy.

Takich przykładów jest bez liku. Znajdziesz własne?

## Coś pewnego?

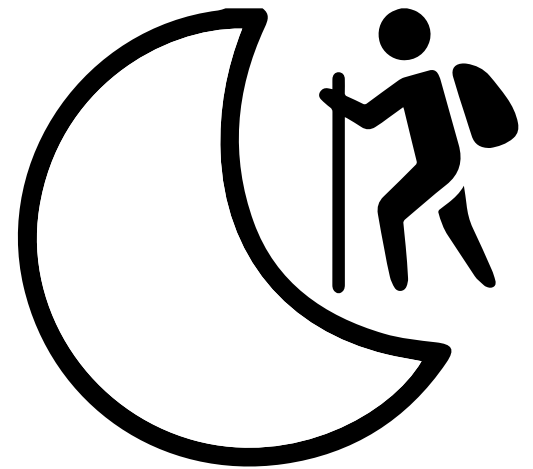
Są zdarzenia prawdopodobne na 100%, w matematycznym języku powiemy, że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi 1. Czyli są pewne, na tych zdarzeniach można polegać, nic nie ma na nie wpływu, nie są zależne od niczego. Czy to nie jest ciekawe, że wiele jest odwiecznych, że należą do świata natury?

Pomyśl, co takiego jest pewne na 100%?

Podpowiedzi:

- po nocy będzie dzień,
- po zimie nadejdzie wiosna,
- po burzy wyjrzy słońce,
- jesienią z drzew liściastych opadną liście (w naszej strefie klimatycznej),
- kolejne pomysły...

## Co jest niemożliwe?



To z kolei zdarzenie, o którym z pełnym przekonaniem możemy powiedzieć, że nie może się zdarzyć. Po pierwsze – na gruncie logiki każde zdarzenie przeciwne do zdarzenia pewnego jest niemożliwe. Sięgając do przykładów pewnych zdarzeń – niemożliwe jest, że po nocy nie będzie dnia, po zimie nie nadejdzie lato, po burzy nie wyjdzie słońce... Po drugie, są zdarzenia, które ogarniając świat naszym doświadczeniem, wiedząc to, co wiemy, musimy wykluczyć z grona możliwych. Są absurdalne w świecie niematematycznym, w matematycznym powiemy, że ich prawdopodobieństwo jest równe zero. Na przykład: Czy da się dojść na piechotę na księżyc? Każdy wie, że nie. Czy da się przeczytać wszystkie książki świata? Nie. Czy da się policzyć do nieskończoności? Nie. Pytanie, czy da się przepłynąć kajakiem przez Atlantycką? Czasami, gdy nie ma pewności, warto sprawdzić, a nuż jest choćby niewielkie prawdopodobieństwo zdarzenia, które wydaje nam się niemożliwe? Czasami coś wydaje się całkowicie nieprawdopodobne, dopóki się nie wydarzy. Tak było z wyczynem Aleksandra Doby, który jako pierwszy samotnie przepłynął kajakiem Atlantycką.

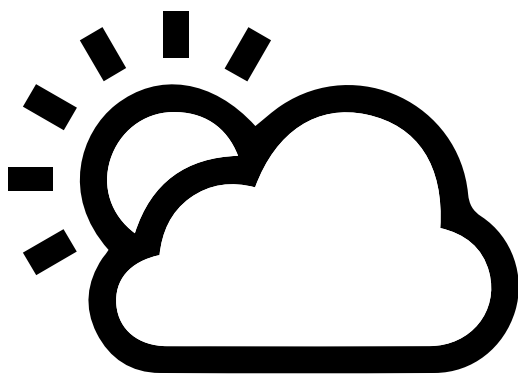
Poszukaj kolejnych przykładów. To mogą być ciekawe odkrycia.





## □ Gdybanie

Prawdopodobieństwo daje nadzieję i/lub ostrzega. Jeśli prognoza pogody mówi, że jutro na 90% spadnie deszcz, to znaczy, że prawdopodobnie jutro na 10% nie będzie padać. Będą tacy, których ta informacja ucieszy (np. rolnicy), i tacy, których zmartwi (np. kajakerze przed spływem). Prawdopodobieństwo opisuje dwie strony tego samego zagadnienia. W życiu często trudno podać konkret, przeważnie w praktyce przewidywanie to gdybanie.



Zwróć uwagę na codzienne sytuacje, w których szacujesz przyszłe zdarzenia, gdybasz, co będzie. Miłe i niemiłe, te, na które masz nadzieję, i które wolisz, żeby się nie sprawdziły. Na każdą sprawę da się tak spojrzeć, na niektóre sytuacje masz wpływ, możesz zbadać sprawę albo wpłynąć na rozwój wypadków (wybór kasy w supermarkecie), inne są niezależne od twoich mocy (zawody sportowe, Nagroda Nobla), jeszcze inne są czysto losowe (temperatura wody w Bałtyku). Wymyśl (zaobserwuj) takie sytuacje, na co jest większa szansa (zagrożenie):

- polski dostanie Nagrodę Nobla/ nie dostanie;
- twoja ulubiona drużyna wygra mecz z równorzędnym przeciwnikiem/przegra mecz;
- na pikniku dokuczliwie pogryzą cię komary (wiadomo, że będą komary i zawsze cię gryzą)/nie pogryzą cię;



- woda w Bałtyku w czasie twoich wakacji będzie na tyle ciepła, żeby można było się kąpać/woda będzie za zimna;
- twoja kolejka w supermarkecie okaże się najwolniejsza ze wszystkich, najszybsza;
- co jeszcze?

## □ Przypadkowy przypadek

Czy przypadek może być przypadkowy? A nie-przypadkowy przypadek? Kto odpowie na takie pytanie? Życie, matematyka, logika, a może filozofia?

Masz pomysł na przypadkowy i nieprzypadkowy przypadek? Czym się różnią te przypadki? Jeżeli jest różnica, może warto odróżniać jedno od drugich?

## □ Zadania na prawdopodobieństwo

Wiele zadań wymagających liczenia prawdopodobieństwa (będziesz je w przyszłości rozwiązywać setkami) dotyczy sytuacji czysto losowych: rzutów monetami, kośćmi, losowym wybieraniem kart, kulek...

Wymyślaj zadania związane z prawdopodobieństwem albo odkrywaj je w rzeczywistości. Jak oceniasz – z jakim prawdopodobieństwem pójdzie ci jak z płatka? Jakkolwiek oszacujesz, gdy będziesz mieć kłopot, poszukaj w różnych źródłach inspiracji do budowy takich zadań. Przykład?

Jesteś w lesie, parku. Znajdujesz patyk. Łamiesz go w dwóch przypadkowych miejscach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych kawałków da się ułożyć trójkąt?

## □ Zakład?

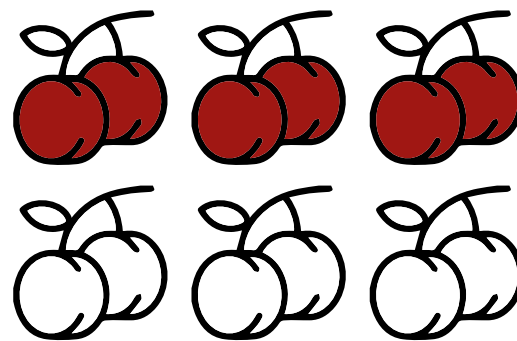


Czy jest na świecie człowiek, który nigdy o nic z nikim się nie założył? Raczej jest to bardzo mało prawdopodobne, choć nie jest niemożliwe. Dlatego z dużym prawdopodobieństwem można założyć, że wszyscy się zakładamy. O różne rzeczy – małe i większe, poważne i niepoważne. Dość niebezpiecznie zakładać się o najważniejsze, najcenniejsze rzeczy (np. o ulubionego pluszaka), bo można przegrać, i co? Każdy zakład polega na tym, że jedna strona wygrywa, druga przegrywa – jedna miała rację albo była bliżej stanu faktycznego. Żeby się założyć, trzeba mieć chętnego, trzeba wiedzieć, co jest przedmiotem zakładu, i o co się zakłada (można honorowo: o przekonanie). Zakładając się, każda ze stron ma przekonanie, że z dużym prawdopodobieństwem racja/wiedza/intuicja jest po jej stronie.

Jak będzie okazja, załóż się z kimś o coś, tak świadomie, przeprowadzając analizę zakładu na każdym kroku. Ustal, co sprawia, że uważasz, jak uważasz, z jakich powodów uznajesz, że masz duże szanse na wygranie zakładu. Dlaczego prawdopodobieństwo twojej racji jest większe niż przeciwnika? Może czasami za pochopnie się zakładamy? Może warto jeszcze się upewnić, co do podstaw naszej racji? Chociaż z drugiej strony, praktycznie patrząc, zakładamy się przeważnie spontanicznie. I może w tym urok zakładów?

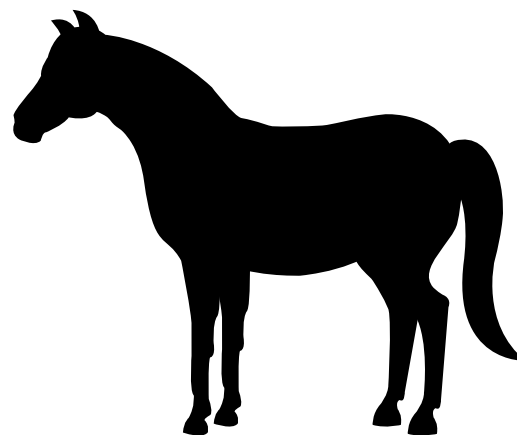
O co można się założyć (poza tym, że o wszystko):

- ile lat ma ulubiona aktorka?
- czy do carbonary dodaje się śmietanę?
- co biega szybciej tygrys czy gepard?
- czy w Augustowie mieszka więcej osób niż w Zakopanem?
- czy po burzy będzie tęcza?
- ile stopni ma woda w morzu?
- po ile będą śliwki na targu?



## □ Zakłady sportowe i inne

Zakład jest bardzo prostą metodą rozstrzygnięcia – kto lepiej przewidzi wynik czegoś, co ma się wydarzyć, czego nie sposób przewidzieć, mimo że są dane wskazujące, że ten, a nie tamten ma większe szanse wygrać. Najpopularniejsze są zakłady sportowe, ale też dotyczące wyniku wyborów. Można się założyć w domu, wśród znajomych, ale są też instytucje zajmujące się profesjonalnie przyjmowaniem zakładów. Kto pasjonuje się sportem, śledzi wyniki, rekordy, statystyki teoretycznie ma większe szanse na prawidłowe obstawienie wyniku. Ale wcale nie musi być tak, że ktoś, kto obstawia pierwszy raz w życiu, zrobi to gorzej od fachowców. I to jest prawdopodobieństwo, jest nadzieja. Gdy stawka jest np. 1:48, to raczej pewne, że wygra faworyt, na którego stawia tak znacząca większość, ale różnie bywa, czasami wygrywa „czarny koń” i to jest piękne w sporcie.



Zgadzasz się?

I tu znowu z dużym prawdopodobieństwem można założyć, że nie raz, nie dwa już brałaś/ brałeś udział w amatorskich zakładach sportowych. Wiesz, jak to jest. Kto wygra mecz? Czy nasza drużyna zdobędzie medal? Czy bohater



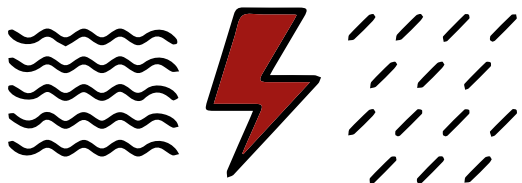


narodowy znów skoczy najdalej? Temat – pytanie, to pierwszy krok do zakładów.

Drugi krok – to przewidywanie i obstawianie wyniku. Będzie 2:3, a może 1:0? Przed meczem każdy wynik (w odpowiednich dla dyscypliny granicach) jest tak samo prawdopodobny. Następnym razem, gdy będą jakieś zawody sportowe, obstaw wynik. Możesz się z kimś założyć albo pobawić się na kartce – obstawisz dwa warianty, zobaczysz: wygra wynik z prawej czy z lewej. Gdy obstawiasz wynik przed rozgrywką, emocje rosną. W czasie albo po fakcie to nie ma sensu :). Sprawdź na sobie.

## Jaka będzie pogoda?

Kiedyś mówiono o starych góralach, że potrafią przepowiedzieć pogodę. Rolnicy też z przewidywaniem pogody radzą sobie lepiej niż mieszkańcy. Obserwują przyrodę i wyciągają wnioski. Chodzi o doświadczenie, uważność w obserwowaniu sygnałów dawanych przez naturę. Dziś, w czasach kosmicznych technologii, satelitów i meteorologicznych programów badawczych, każdy smartfon pokazuje prognozę pogody na najbliższe dni, godziny. Zawsze można zajrzeć i wiadomo, kiedy zdjąć pranie ze sznurka, bo będzie padać. Czy na pewno? Prognozy opadów podawane są z dokładnością określoną procentami. Deszcz o 16:00 – 40%, deszcz o 19:00 – 100%. Czyli co? Będzie padać czy nie? Nie wiadomo, ale gdy prawdopodobieństwo jest większe niż 50%, opady są bardziej prawdopodobne. I lepiej założyć kalosze.



Sprawdź na dostępnym smartfonie, czy podawane prawdopodobieństwo (określane w smartfonie jako procent) sprawdza się. Możesz założyć dzienniczek i notować – sprawdziło się, nie sprawdziło. To będzie świetny materiał statystyczny do badań nad skutecznością prognozy pogody.

## Zakłady domowe

Prawdopodobieństwo trafienia 6 w totolotka to prawie 1:14 milionów. Trudno to sobie wyobrazić. Na razie cię to nie dotyczy, bo dzieci raczej nie grają w gry losowe.

W celach edukacyjnych zrób domowego totolotka, na skalę mniejszą niż wybór z 49 liczb. Kilka wariantów zabawy, do której musisz namówić kilka osób:

- wybierz i zapisz na kartce, nie pokazując nikomu, 5 liczb z puli od 1 do 10. Poproś wszystkich o wybór i zapisanie swoich zestawów po 5 liczb każdy. Kto wytypował

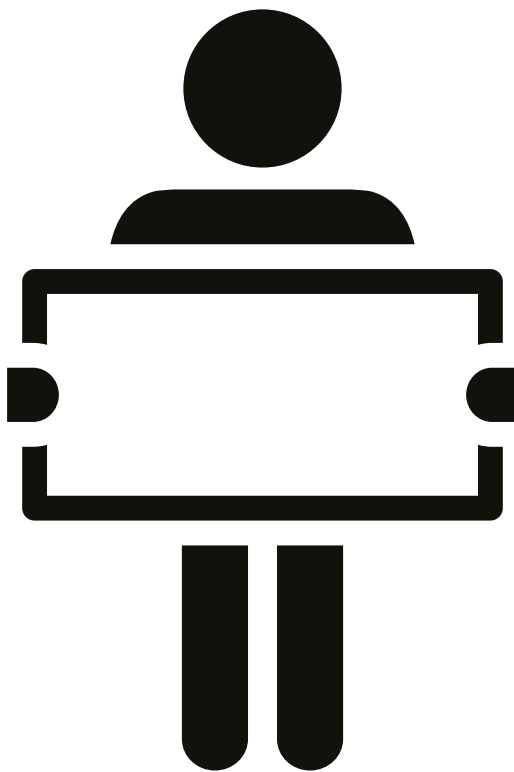
# ” *Bóg nie gra w kości*

## Albert Einstein

najwięcej liczb zgodnych z twoim wyborem? Może wspólnie policzycie prawdopodobieństwo trafienia?

- weź kilka banknotów. Każdy banknot ma numer serii. Poproś każdego o wytypowanie 3 liczb. Sprawdź, czy w numerze któregoś z banknotów są wszystkie 3 liczby.
- możecie zagrać w Lotto (Bingo), tę grę każdy chyba zna.

## Loteria towarzyska



Na organizację loterii publicznej (dostępnej dla wszystkich zainteresowanych) trzeba mieć koncesję, czyli specjalne pozwolenie od państwowego urzędu. W skali kraju organizowana jest na przykład loteria paragonowa, kupujesz cokolwiek, zgłaszasz numer paragonu, a nuż wylosujesz (ciekawe z jakim prawdopodobieństwem?) nagrodę pocieszenia, a może nagrodę główną? Ktoś wylosuje na pewno, więc szanse są. Wiele firm w celach marketingowych ogłasza loterie – zbierz trzy nakrętki, podaj numer paragonu, wytnij i wyślij 10 kodów kreskowych. Loteria tym się różni od konkursu, że liczy się udział i los, nikt nie ocenia jakości, wartości np. zgłoszonego na konkurs dzieła. W loteriach nagroda główna ma dużą wartość, np. samochód, by przyciągnąć jak najwięcej uczestników, zwykle jest też oszałamiająca liczba nagród pocieszenia (np. talon na balon).

Loterię o zasięgu domowym czy towarzyskim – dla zabawy – można organizować bez pytania kogokolwiek o zgodę. Najlepiej zorganizować loterię, gdy w jednym miejscu będzie więcej osób. To świetny pomysł na urozmaicenie urodzin czy innych imprez – loteria może polegać na tym, że goście losują różne zadania do wykonania np.: zaśpiewaj piosenkę, powiedz trudne zdanie, policz, ile nóg jest w tym pokoju. Kto, co wylosuje, musi wykonać. Los to los. Oczywiście można tematykę zawęzić do matematyki. Nagrodą może być cukierek, ręcznie wykonany rysunek, kokardka – cokolwiek, przecież chodzi o zabawę.

## Co autor miał na myśli

Odpowiedź na pytanie: co autor miał na myśli, jest zmurą uczniów od pokoleń. Bo kto wie? Z jakim prawdopodobieństwem możemy zakładać, co autor miał na myśli? I czy to ważne?

Spróbuj poznać myśl niemieckiego fizyka, autora teorii względności Alberta Einsteina, który powiedział: „Bóg nie gra w kości”. Jak myślisz, co autor miał na myśli? Może coś wymyślisz, na ochotnika.

## Gra w kości

Kości są niewyczerpaną inspiracją do badania prawdopodobieństwa. Można rzucać jedną kostką albo dwiema. Albo jeszcze większą liczbą. W podstawowej grze w kości rzuca się pięcioma, do trzech razy i dąży do osiągnięcia jak największej sumy oczek w kilkunastu konkurencjach. Pamiętaj, rzucając kości, nie masz gwarancji, ale prawdopodobieństwo pewnych układów jest większe niż innych.



Grasz w kości? Znasz grę w kości zwaną Yahtzee? Jest wiele odmian, być może w każdej rodzinie obowiązują domowe zasady i dobrze, bo nic nie





stoi na przeszkodzie, by grać, jak się chce, byłe reguły były znane przed rozgrywką. Grając, zorientujesz się, jakie posunięcia opłacają się bardziej, jakie mniej. Które układy kości wychodzą częściej, które rzadziej. A co najciekawsze? Wszystkie wyniki rzutów to los, kwestia szczęścia, ale to ty podejmujesz decyzję, na jaką kompozycję rzucasz. Czyli to gra nie tylko losowa, liczy się też taktyka. Zagraj w kości, im więcej rozgrywek rozegrasz (nie chodzi o jeden wieczór), tym więcej nabierzesz pokory dla losu.

## □ Prawdopodobieństwo w talii kart

Jak masz pod ręką talię kart, nie ma mowy o nudzie. Najpierw trzeba potasować karty. Są różne metody. Na początku nie jest łatwo, ale, jak we wszystkim, trzeba dojść do wprawy, a potem można dążyć do perfekcji. Im więcej razy potasujesz talię kart (albo jej część na początek), tym szybciej twoje palce nabiorą sprawności. Dobry zwyczaj: ja tasuję, ty przekładasz. I odwrotnie. Wtedy każdy gracz ma poczucie wpływu na rozkład kart, bo jedno przełożenie, zmiana miejsca jednej karty w 100%, czyli całkowicie zmienia układ kart. Co ma wspólnego tasowanie kart z prawdopodobieństwem? Tyle że każde rozdanie kart, a w jego konsekwencji rozgrywka, zależy od potasowania. Czy można potasować karty lepiej i gorzej? Nie. Każdy układ kart jest tak samo prawdopodobny, choć nie każdy gwarantuje wygraną z takim samym prawdopodobieństwem. Czy wiesz, że liczba wariantów rozdań kart z talii, w której są 52 karty, dla czterech graczy wynosi tyle, że trzeba grać bilion lat, a i tak nie byłoby gwarancji, że się trafi układ „zamówiony” – np. że każdy gracz dostaje wszystkie karty w jednym kolorze? Chyba nie warto czekać?



Odkryj urok (a może i magię) gier w karty – czysty los sprawia, jak się ułożą. Zawsze jest inaczej, zawsze jest ciekawie. No i warto poćwiczyć tasowanie.

## □ Coś nam się wydaje

Nasze myślenie często jest magiczne. Coś nam się wydaje, uważamy, że coś powinno się zdarzyć. To tak nie działa. Losu nie da się zaczarować, ale piękne momenty zdarzają się w naszym życiu. Ktoś wyrzuca z ręki pięć kości – na każdej pięć oczek! Wszyscy wydają okrzyk: WOW! Ktoś wyciąga cztery karty, a to same asy. Czy wiesz, że prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstek, wyciągnięcia asów jest takie samo, jak dowolnie wybrane inne konfiguracje? Dasz wiarę? Tak po prostu jest.

Pomyśl, czy ta zasada dotyczy też liczb losowanych w totolotku?

• czy ma znaczenie, jakie liczby skreślasz?

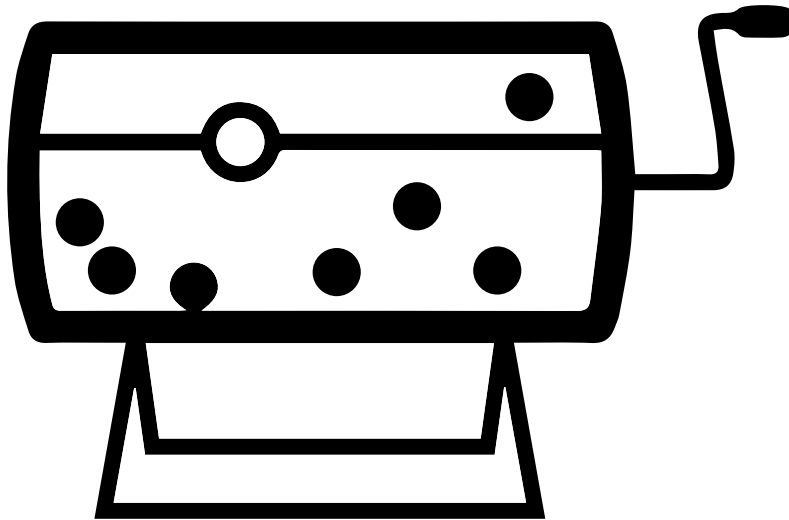


- bardziej prawdopodobne wydaje ci się, że wygrana padnie na wyglądający na przypadkowy zestaw liczb, np. 7, 16, 23, 35, 39, 47, czy na ciąg liczb kolejnych: 1, 2, 3, 4, 5, 6?
- większe prawdopodobieństwo wygrania jest, gdy zawsze obstawiasz te same liczby, czy gdy skreślasz na chybił trafił?

Dyscyplina dodatkowa – jak myślisz, czy to możliwe, żeby jedna osoba kilka razy trafiła główną wygraną?

## □ Swoje numery

Gra w totka polega na obstawieniu 6 liczb z 49.



Jak byś miała/miał wytypować sześć numerów w totolotka, jakie byłyby to numery (od 1 do 49)? Zapisz, zapamiętaj, może to los?

## □ Codzienne zmagania z prawdopodobieństwem

Na wyniki rzutu kością, monetą czy losowania karty z talii nikt ani nie ma wpływu. I trudno z tym dyskutować. Co będzie, to będzie. A jak sprawy mają się w innych sytuacjach, w których można podejrzewać (bo to nie może być przypadek!) nie tylko losowe zdarzenia? Jedno z praw Murphy'ego (nikt nie jest za młody, by je poznać i odnieść do siebie, nawet przedszkolak) mówi: „Jeśli istnieje prawdopodobieństwo, że coś może pójść nie tak, to na pewno pójdzie nie tak”, albo w innym brzmieniu: „Jeżeli coś może się nie udać, to się nie uda”.

Czy znasz takie sytuacje:



- ogonek do wybranej kasy posuwa się najwolniej,
- rękawiczki nie wiadomo gdzie giną,
- kanapka upada maśłem do ziemi,
- plama raczej zrobi się na czymś nowym niż starym.

Jak myślisz – czy to kwestia prawdopodobieństwa? Czy częściej zwracamy uwagę na sprawy, gdy coś pójdzie „nie tak”? Może to jednak statystyka? A może dobry pomysł na badania i w przyszłości Nagrodę Nobla? Kto wie?





# Procenty, czyli ile czegoś w czymś

Jeśli nie chcemy zgłębiać istoty cząstek elementarnych, to można przyjąć, że wszystko, absolutnie wszystko, z czegoś się składa, i na wszystko może składać się wiele elementów – niekoniecznie materialnych. Sam temat procentów też jest nomen omen złożony, wielowątkowy. Procenty, części, ułamki udzielają odpowiedzi w matematycznym języku na pytania: ile czegoś jest w czymś, z jakich części coś się składa, jak można podzielić coś na części, o ile czegoś jest mniej czy więcej, ile potencjału czegoś wykorzystujemy. 100% to całość, procent to jedna część ze stu (słowo pochodzi z języka łacińskiego „per centum”, czyli na sto). Procentami określa się sporo kwestii związanych z pieniędzmi – oszczędności lokuje się w banku na procent (bank wypłaca odsetki), kredyt bierze się na procent, wszystkie promocje związane są z obietnicami zniżek, np. nawet do 70%. Z mediów ciągle słyszymy o przewadze procentowej jednej partii nad drugą. Temat złożony i abstrakcyjny, ale nie jesteśmy bezradni. Z pomocą przychodzi technologia. Bo czy wyczerpująca się bateria telefonu lub smartfonu nie jest najbardziej praktyczną lekcją procentów? Sprzęty bez baterii nie żyją, wie to każde dziecko. Już trzylatek rozumie, bo doświadczył, co oznacza, że zostało 10% baterii – zaraz skończy się bajka. Zaczyna kontrolować sytuację – jak jest cały pasek, to spokojnie, jest pół, czyli 50%, zaczyna się niepokoić. Przy ostrzeżeniu o 10% wpada w nerwy: „Czy zdążę dokończyć oglądanie?”. To świetny pretekst do rozmowy o częściach, procentach. Możemy wszystko wytłumaczyć, bo dziecko odbiera temat emocjonalnie, jest nim żywo zainteresowane. Przygód z procentami na co dzień jest dużo więcej.

## □ O co chodzi?

W procentach liczba 100 to podstawa. Umiesz liczyć do stu? Umiesz, świetnie. Nie umiesz? Poproś kogoś o pomoc, szybko się nauczysz.

Weź czegoś sto sztuk – nie mniej, nie więcej, ma być równo 100. To w procentach warunek absolutnie konieczny! Punktem odniesienia zawsze jest 100! Niech to nie będą duże rzeczy, a raczej małe, żeby można było na nich operować, nimi manipulować, najlepiej na stole. Mogą być cukierki w papierkach, nakrętki, kamyczki, mogą być pestki słonecznika, dowolnie. Elementy mogą być takie same, ale też mogą się różnić – przeznaczeniem, kolorami, formą, wielkością. Będzie ciekawiej.

# 100%

1. Rozłóż elementy na stole – to twój zbiór wyjściowy – 100%. Całość.
2. Odłóż jeden dowolny element na bok. Jeden ze stu to właśnie jest 1% całości, czyli zbioru wszystkich rzeczy, które masz na stole. W pierwotnym zbiorze pozostało 99 elementów, czyli 99% wszystkich. Odkładaj kolejne elementy – z każdym przełożeniem kolejnego elementu zbiór odłożonych powiększa się, a zbiór wyjściowy zmniejsza. Teraz stanowią one odpowiednio: 2% i 98%, 3% i 97%, i tak dalej, aż do momentu, gdy przełożysz ostatni element, wtedy to zbiór odłożonych będzie stanowił 100%. Suma elementów w tych dwóch zbiorach cały czas pozostaje stała – 100.

3. Przy różnych elementach wybierz ze zbioru wyjściowego takie same. Załóżmy, że wśród 100 elementów (przedmiotów) masz: 16 nakrętek niebieskich, 12 nakrętek żółtych, 17 szyszek, 22 guziki zielone, 4 guziki czerwone, 11 cukierków, 18 kasztanów. Ile procent których elementów masz w zbiorze?

## □ Pod(ręczny) poligon

Jeden procent to jedna część ze 100. 100% to całość – jakkolwiek tę całość zdefiniujemy. Z całością, czyli ze 100% jest jak ze zbiorami – wszystko zależy od kryteriów. Jak się zorientować, na czym polegają procenty?

Możesz spróbować na rękach, a raczej na palcach. Rozpatrz trzy podejścia – zobaczysz, że jeden palec może mieć różny udział procentowy w całości, w zależności od tego, jak zdefiniujesz całość.

- Całością jest twoja jedna dłoń, czyli 5 palców. Jeden palec jest jednym z pięciu, czyli stanowi jedną piątą całości. Całość to 100%. Każdy palec stanowi więc jedną piątą 100%, czyli 20%.
- Całością są twoje dwie dłonie, czyli 10 palców. W takim ujęciu jeden palec jest jednym z dziesięciu, czyli stanowi jedną dziesiątą całości. Całość to 100%. Każdy palec to jedna dziesiąta 100%, czyli 10%.
- Całością są wszystkie twoje palce – u rąk i u nóg, czyli 20 palców. Teraz jeden palec jest jednym z dwudziestu, czyli stanowi jedną dwudziestą całości. Całość to 100%. Każdy palec daje jedną dwudziestą 100%, czyli 5%.

## □ Jak policzyć, ile to procent?

UWAGA! Tu będzie trochę liczenia. Zgodnie z obietnicą – żadnych wzorów, tylko metoda.

Rzadko w życiu mamy do czynienia ze zbiorami o liczbie elementów = 100. W takich przypadkach sprawa jest prosta. Ale jak ustalić procentową zawartość, gdy całość to np. 30, 47 elementów, albo 89? Trzeba umieć sobie poradzić. Do liczenia procentów przyda się więc praktyczna metoda przeliczania na bazie prostej PROPORCJI. Poproś kogoś, dla kogo proporcje są oczywiste, o pomoc. Zrobicie wspólnie kilka przykładów i zapamiętasz tę metodę. Układanie proporcji jest jak jazda na rowerze – raz się nauczysz i masz to na całe życie. Warto, bo metoda przydaje się częściej, niż można by pomyśleć, nie tylko do obliczania procentów (innych przykładów poszukaj w rozdziale o równoważności).

Taki przykład:

W szufladzie masz 30 par skarpetek. Wśród tych 30 par skarpetek jest 6 par zielonych. Chcesz wiedzieć, jaki procent stanowią zielone? Metodą rozwiązania jest ułożenie dwóch stosunków i porównanie ich ze sobą.







Ułóż więc proporcję, czyli równość dwóch stosunków. Zaczynij od podsumowania sytuacji: 30 par to całość, czyli 100%. 6 par zielonych skarpetek to poszukiwany procent całości. Nazwij go „x”. Jak wygląda proporcja: stosunek 6 par do 30 par ( $6 / 30$ ) jest równy stosunkowi x% do 100% ( $x / 100$ ). Zapisz to, jako równość tych dwóch stosunków:  $x / 100 = 6 / 30$

W starszych klasach na lekcjach matematyki dowiesz się, że x i 30 to wyrazy skrajne, a 6 i 100 to wyrazy środkowe proporcji. Poznasz twierdzenie mówiące o tym, że iloczyn (wynik mnożenia) wyrazów skrajnych jest zawsze taki sam jak iloczyn (wynik mnożenia) wyrazów środkowych. Teorię zostaw na później, teraz przyjmij, że:  $30 \cdot x = 6 \cdot 100$ .

I już jesteś blisko. Aby wyliczyć „x” wystarczy, że pomnożysz 6 razy 100 i podzielisz przez 30. Oto wynik: **20, czyli x = 20%**.

A zatem odpowiedź na twoje pytanie: zielonych skarpetek jest 20%! Jasne?

Co ciekawe, potwierdź w rodzinnym gronie, dorośli często nie pamiętają twierdzenia o wyrazach skrajnych i środkowych, ale doskonale wiedzą, że wystarczy ułożyć proporcję, a potem pomnożyć „na krzyż”. I tak posługują się wiedzą szkolną w dorosłym życiu.

Takie obliczenie możesz zrobić na różne sposoby, również po swojemu. Gdy dane są proste, tak jak w tym przykładzie, możesz np. policzyć inną metodą, która wykorzystuje fakt, że wielkości liczbowe i te same wielkości wyrażone w procentach są wprost proporcjonalne. Tego też będziesz się uczyć na lekcjach matematyki (i nie tylko). Teraz wypróbuj.

Wiesz, że 30 par to 100%, zatem 6 par to  $6/30$ , czyli  $1/5$  tego zbioru. W takim razie jest to  $1/5$  ze 100%. Ile? 20%. Jasne! Zgadza się niezależnie od metody.

Trudne? Wcale nie, ale trzeba poćwiczyć. Może odkryjesz patent, który pomoże ci jeszcze bardziej uprościć obliczenia? Może wybierzesz inną, swoją metodę?

## □ Procentowe przymiarki

Obliczać procentowo można niemal wszystko, byle zawsze ustalić, czym jest całość.

Spróbuj na różnych przykładach dla wprawy:

- jaki procent wszystkich książek stojących na trzeciej półce od góry stanowią książki o czerwonych grzbietach?
- jaki procent krzesel stojących w całym domu jest drewnianych (np. nie licząc taboretów albo licząc taborety)?
- jaki procent stanowi koszt produktu, którego cena wynosi 19 zł, w rachunku na 45 zł?
- jaki procent w twojej rodzinie – licząc np. najbliższą rodzinę, dziadków, rodzeństwo rodziców i ich dzieci – stanowią kobiety, a jaki mężczyźni?
- jaki procent sąsiadów w twoim bloku/kamienicy/na osiedlu ma widoczne anteny

# ” **Matematyka jest miarą wszystkiego**

## Arystoteles

satelitarne (to może łatwiej będzie ocenić „na oko”. Szacować procenty też możesz.)?

- jaki procent stanowi miesiąc, który ma 30 dni, w nieprzestępnym roku?
- jaki procent stanowi jeden kawałek pizzy, gdy podzielisz ją na 8 części?
- jaki procent stanowi powierzchnia twojego pokoju, w powierzchni całego mieszkania?
- i tak dalej...

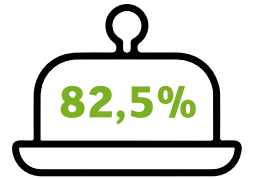
## □ Dzień z procentami

Od rana do wieczora, co chwilę słyszysz o procentach i częściach, od dziecka osławiasz się z takimi komunikatami, chociaż w szkole będziesz się o tym uczyć pewnie w V klasie. Ale życie to życie, jak tu uciec od procentów. Czy tak mógłby wyglądać twój dzień powszedni z procentami?



- Budzisz się i słyszysz, jak mama mówi: „Na 100% spóźnisz się na zbiórkę. Dziś jedziecie do muzeum”.
- W biegu wypijasz szklanekę mleka, kątem oka zauważasz, że ma 3,2% tłuszczu.
- W co się ubrać? Sprawdzasz w smartfonie prognozę pogody – wskazuje deszcz z 30% prawdopodobieństwem. Trzeba wziąć kurtkę.
- Przy okazji zauważasz, że bateria jest słabo naładowana – czytasz komunikat, że pozostało 10%. To niedobrze.
- Nie spóźniasz się na zbiórkę. Ok. Udało się. Czyli mama nie miała racji – pomyliła się w 100%.
- W autobusie sięgasz do plecaka po sok pomarańczowy – wielkie cyfry informują: 100% owoców. To twój ulubiony.
- Dojeżdżacie do muzeum. Na miejscu dobra wiadomość – dla zorganizowanych grup ulgowe bilety kosztują tylko 50% ceny. Ekstra, zostanie ci coś do skarbonki.
- W muzeum było super. Masz dzisiaj dobry dzień, do tego jedziecie całą rodziną do sklepu po nowe trampki. Wybierasz i znowu dobra wiadomość! Pan sprzedawca informuje, że od dziś rabat na buty sportowe to 60%. Macie szczęście, bo do wczoraj to było tylko 25%.
- Wracacie do domu. Na kolację pomagasz robić pyszny sos pomidorowy do makaro-

nu. Sięgasz po koncentrat pomidorowy. Na etykiecie informacja: 30%. Mama mówi, że to dobrze. Trochę oliwy, trochę masła (ma aż 82,5% tłuszczu, bo to prawdziwe masło). I jest gotowe.

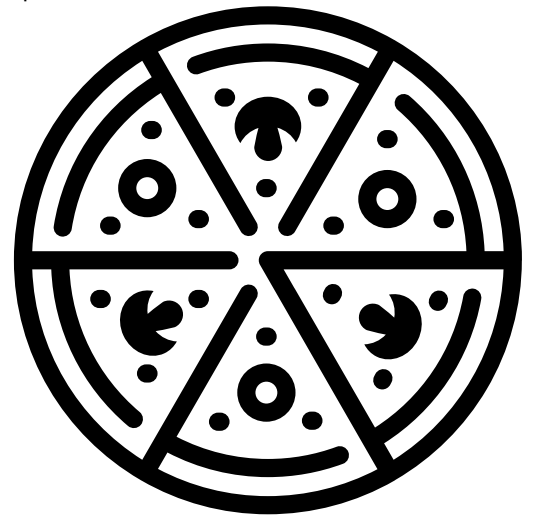


- Tata włącza telewizor i bez nadziei przepowiada: „Na 100% nie będzie nic ciekawego”. I okazuje się, że ma rację w 100%.

Sprawdź, czy to prawdopodobne. Na ile procent? Może spiszesz przebieg swojego prawdziwego dnia z procentami?

## □ Oczywista oczywistość

Pizza pochodzi z Włoch. Znasz ten smak na pewno. Urok jedzenia pizzy polega na jej dzieleniu – na kawałki. Czy zjesz sama/sam, czy też podzielisz się z współbiesiadnikami, to twoja decyzja. Tak czy inaczej, pizzę kroimy na trójkąty. Skądinąd wiemy, że to nie są trójkąty, tylko wycinki koła. Oryginalnie do dzielenia pizzy służy specjalne radełko, ale możesz ją pokroić nożem albo porwać na kawałki. Bez znaczenia dla matematyki – efekt będzie ten sam. Tylko uwaga! Zwróć uwagę na wielkość kawałków. Czy są równe? Tylko jeśli są takie same, liczenie proporcji ma sens, a dzielenie pizzy będzie sprawiedliwe.



Czyli co możesz z pizzą? Na ile części ją podzielisz? Dla ilu osób? A może zjesz całą? Zakładając, że pizzę w pizzerii firmowo podzielono na 10 równych części, jaka część będzie zjedzona, a jaka zostanie, gdy zjesz:





- 1 kawałek
- 2 kawałki
- 3 kawałki
- 4 kawałki
- 5 kawałków
- 6 kawałków
- 7 kawałków
- 8 kawałków
- 9 kawałków
- 10 kawałków

Jeśli pizzę pokroisz na 8 kawałków, to ile procent stanowi jeden kawałek? A jeśli będzie poćięta na 6 kawałków? Pizza jest wdzięcznym tematem do zgłębiania tematu części, procentów. Zgłębiaj. Tak samo nadaje się do tego tort, ale torty jemy rzadziej. Smacznego.

## □ Udziały w spółce

Czasami mamy coś z kimś na spółkę.

Załóżmy, że masz wspólny rower z bratem/siostrą/kolegą. Ile dni w tygodniu (z wyłączeniem weekendów, czyli w ciągu 5 dni) możesz korzystać z roweru, jeżeli masz:

- 20% udziałów – \_\_\_\_\_ dni
- 40% udziałów – \_\_\_\_\_ dni
- 60% udziałów – \_\_\_\_\_ dni
- 80% udziałów – \_\_\_\_\_ dni

Czy możliwe jest posiadanie 100% udziałów? Tak, tylko wtedy rower nie będzie na spółkę, ale wyłącznie twój. Oczywiście możesz go komuś pożyczyć.



Podobnie rzeczy mają się z prawem własności w biznesie – dorośli mają akcje, udziały w spółkach, bo tak formalnie w języku prawniczym nazywa się firmy.

## □ 100%, czyli sto procent

Sto procent, czyli całość, pełnia. Gdy mówimy, że coś jest na 100%, to znaczy, że jest pewne tak bardzo, jak to możliwe. I nie ma co się zarzekać, że np. na 150%, bo to niczego nie zmienia. 100% to maksimum. Jeśli na metce jest napisane, że koszulka jest w 100% z bawełny, oznacza to, że nie ma innych dodatków. Gdy widzimy informację: „100% sok z pomidorów”, mamy pewność, że w jego składzie nie ma np. soku z buraków ani dodatku cukru. 100% to gwarancja.

Szukaj takich przykładów. Co może być na 100%?

- 100% gwarancji...
- 100% zawartości...
- 100% składu...
- 100% ceny...
- 100% pewności...
- 100% naładowania...

## □ 0%, czyli...

Czyli nic? Czyli za darmo? Czyli w ogóle? Zero procent robi wrażenie. To chwyt wykorzystywany w promocjach w handlu. Często słyszymy, że coś sprzedawane jest na raty 0%, albo kredyt jest za 0%, albo pośrednik pomaga znaleźć klienta za 0% prowizji. Bywają też produkty spożywcze sprzedawane jako zdrowe – 0% tłuszczu, 0% cukru. Takie oferty zawsze należy sprawdzić, bo tak naprawdę propozycja może się okazać ani korzystna, ani zdrowa. Można też dostać 0% punktów za rozwiązanie quizu lub testu, czyli go nie rozwiązać, albo np. nikt nie zda egzaminu, czyli zda 0% do niego przystępujących. 0% to po prostu zero i już. Nie ma co nadużywać, bo tak jak nie mówimy, że przy stole siedzi zero osób, albo, że mamy do przebycia zero kilometrów, tak i 0% można pominąć.

# 0%

Zaprojektuj plakat, zaproponuj coś na domowy użytek, coś, co mogłoby być atrakcyjne, właśnie dlatego, że obiecasz zero. Co to może być:

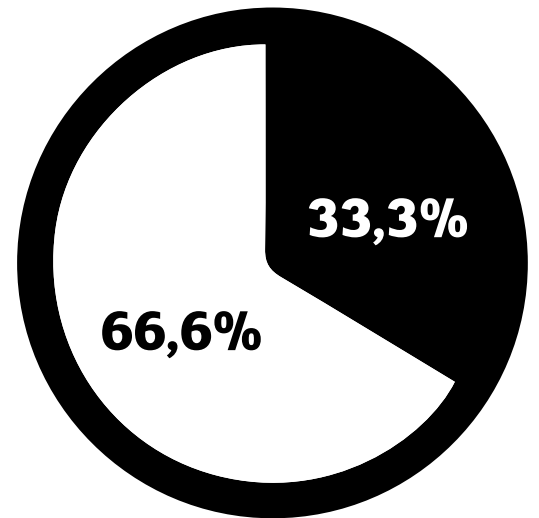
- 0% pustych kalorii w posiłkach
- 0% bałaganu w pokoju
- 0% spóźnień
- 0% brzydkich słów
- 0% oglądania telewizji w weekend
- coś jeszcze?

## □ Wykres kołowy

Na 100% czegokolwiek mogą składać się różne części albo całość może być jednorodna. Graficzne przedstawienie wyników może być odkryciem, ale i zaskoczeniem. Na wykresie możesz zobrazować różne tematy, tylko trzeba mieć dane. A dane możesz zebrać z własnego doświadczenia, z internetu, od innych osób albo przeprowadzić badania.

Dla przykładu przyjrzyj się, jak wygląda twój dzień (oczywiście inaczej dzień powszedni, inaczej weekend, inaczej wakacje) i zrób wykres kołowy swoich zajęć. Jasne, że doba, czyli 24 godziny to 100%. Jaką część doby śpisz, uczysz się, dojeżdżasz do

szkoły, bawisz się, jesz, czytasz itp.? Na każdą aktywność przypada określona część czasu. Gdybyś spała/spał całą dobę, to sen stanowiłby 100%. Ale śpiąc 8 godzin, na sen przypada (tylko czy aż?) 1/3 doby, czyli ok. 33,3% doby, a reszta zajęć?



Inne odkrywcze tematy (pamiętaj – składowe muszą dopełniać się do 100%):

- pożądaną skład pożywienia, zgodnie z wytycznymi Instytutu Żywności i Żywienia;
- obraz zwierząt posiadanych przez twoich kolegów i koleżanki. (Pamiętaj o dobrym, czyli jednoznacznym sformułowaniu możliwości odpowiedzi: np. ma psa, ma kota, ma inne zwierzę, ma więcej niż jedno zwierzę, nie ma zwierzęcia – wynik zależy od zadanych kryteriów);
- reprezentacja kolorów w przypadkowej próbie 100 samochodów osobowych kolejno przejeżdżających pod balkonem (zwróć uwagę na doprecyzowanie pytania);
- na co wydajesz miesięcznie kieszonkowe (jedną z kategorii powinno być: niewydawanie, czyli oszczędzanie);
- zestaw kolorów skarpetek w szufladzie;
- udział wszystkich pomieszczeń w ogólnej powierzchni mieszkania;
- zdanie członków rodziny na temat spędzenia następnych wakacji, np. nad morzem czy w górach (możliwe odpowiedzi: za morzem, za górami, jeszcze nie wiem, inne propozycje);
- ile procent książki już przeczytałeś/przeczytałaś.

## □ Uwaga – trzeba doładować!

Co łączy baterię w smartfonie, oliwę, paliwo w baku samochodu, pastę do zębów? Pewne rzeczy się wyczerpują. Najpierw ikonka baterii w smartfonie wskazuje 100% naładowania, mamy pełną butelkę oliwy, właśnie zatankowaliśmy samochód – do pełna, pierwszy raz wyciskamy pastę do zębów z nowej tubki. Nikt nie lubi być zaskoczony brakiem tego, co jest potrzebne – dlatego tak czy inaczej monitorujemy stan zasobów. Smartfon ma czytelną





ikonkę – widać, jak procent naładowania spada, w samochodzie jest wskaźnik i ostrzegawcze światelko, oliwę i pastę mamy na oku i widzimy, gdy się kończą.

Obserwuj zasoby poprzez procenty – liczone lub szacowane. Wiadomo, że na butelce oliwy czy paście do zębów nie ma, i pewnie nikt nie wpadnie na pomysł, żeby zrobić wskaźnik zużycia lub elektroniczny system ostrzegania, ale dobrze wiedzieć, ile czego jeszcze mamy. W codziennym życiu wystarczy refleksja: Uwaga, oliwa się kończy! Nie musisz ustalać procentów, ale dla wprawy – możesz. Nie daj się zaskoczyć.



## □ 100-procentowe absurdy

Z procentami trzeba uważać. No bo jak rozumieć na przykład takie deklaracje:

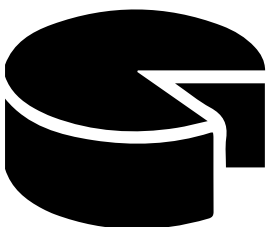
100% taniej niż było. Czyli ile?

- Zjedz na obiad o 100% więcej. Aż strach pomyśleć.
- Schudnij o 100%. Co z ciebie zostanie?
- Spadek produkcji o 100%. Czyli produkuje się cokolwiek czy już nic?
- Cena pralki spadnie o 100%. Czyli pralka będzie gratis?

Wymyślaj dalej. Co jest niemożliwe?

## □ Dużo czy mało?

To zależy. Na przykład 3% to raz dużo, innym razem mało. Żeby umieć ocenić, trzeba mieć punkt odniesienia i wiedzę, a przynajmniej rozeznanie.



Przeanalizuj procenty na przykładzie zawartości tłuszczu w nabiale. Zobaczysz, że w niektórych produktach jest 0% tłuszczu, w innych 2%, 3,2%, 12%, 18%, 32%, 60%, 82,5%, 99,8%. Każdy produkt ma swoje zastosowanie. Na jogurcie 0% nie usmażysz naleśników, z mleka 3,2% nie zrobisz bitej śmietany, a żywiąc się żółtym serem o zawartości tłuszczu 60%, raczej trudno będzie schudnąć. Coś za coś, coś po coś.

## □ Czytanie etykiet

Na producentach żywności spoczywa obowiązek informowania klientów o składzie produktów. Czy wiesz, że odsetek otyłości polskich dzieci jest największy w Europie? Według ostatnich badań otyłość wśród polskiej młodzieży rośnie.

Zadanie dla całej rodziny – czytajcie etykiety i wybierajcie produkty najlepsze, najzdrowsze. Co to znaczy? Im bardziej naturalne (100%), bez sztucznych dodatków (0%), im więcej wartości odżywczych (100%), a mniej pustych kalorii (0%), tym lepiej.

## □ A większość?

50 na 50 oznacza: po równo. To równowaga idealna, jak na wadze, gdy na obu szalkach są odważniki o takim samym ciężarze (Nie wiesz, o co chodzi? Spytaj starszych opowiedzą, jak kiedyś ważyło się towary). Na wadze wystarczy piórko, żeby przeważyć. Czasami, gdy w grę wchodzi procenty (wyniki wszelkich wyborów i głosowań np. referendum), o wygranej decyduje choćby minimalna przewaga, chyba że wcześniej ustanowione były inne reguły.



Wyobraź sobie czteroosobową rodzinę, która w głosowaniu ma podjąć jakąkolwiek decyzję, np. czy na obiad będzie ryż, czy makaron. Ma zdecydować większość. Co zrobić, gdy dwie osoby zagłosują za makaronem, a dwie wybiorą ryż?

Przychodzą ci na myśl inne sytuacje, gdy o czymś decyduje większość?

## □ Jak się nie rozczarować?

Sieci handlowe, sklepy internetowe, producenci kuszą klientów, obiecując zniżki, deklarując

większą wydajność. Bardzo przydają im się do tego procenty. Można się nauczyć rozszyfrowywać „drugie dno”.



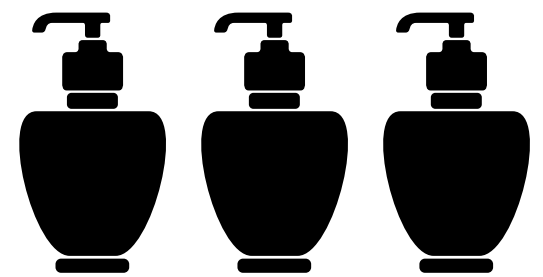
Nie chcesz wpaść w pułapkę? Czytaj oferty ze zrozumieniem. Pamiętaj, że komunikaty są formułowane tak, by skusić jak najwięcej klientów. Nie daj się. Kupuj świadomie. Sprawdź na przykładach jak to działa.

Dwie oferty specjalne:

- Sklep z odzieżą ogłasza sezonową wyprzedaż: Rabaty do 70%!
- Reklama płynu do zmywania naczyń: Do 30% umytych talerzy więcej!

Już sobie wyobrażasz, o ile taniej kupisz szorty, o ile więcej naczyń zmyjesz jedną butelką płynu. Co oznacza jedno i drugie?

- Sklep z odzieżą ogłasza sezonową wyprzedaż: być może jedna para skarpetek sprzedawana jest z rabatem 70%. Na całą resztę asortymentu przecena może być mniej korzystna.
- Reklama płynu do zmywania naczyń: w magicznym słówku „do” zawiera się tajemnica – nawet 1% więcej zawiera się w zakresie do 30%.





# Proporcja, podziały, harmonia, estetyka, czyli szczegóły robią różnicę

Są pojęcia, które wymagają precyzji. Proporcja to według słownika języka polskiego wzajemny stosunek dwóch lub więcej wielkości, czyli określenie, jak się ma coś, do czegoś. Długość do wysokości, szerokość do głębokości, jedna wielkość do drugiej, część do całości lub relacja części do siebie. Patrzymy na dowolne obiekty i podświadomie oceniamy (nawet bez zastanowienia) – to ma dobre proporcje, to jest dziwne, tu nie wiadomo, o co chodzi. Nie oznacza to, że dyskwalifikujemy coś ze względu na nietypowe proporcje (tak skreślilibyśmy żyrafę, bo w klasycznym kanonie ma zdecydowanie za długą szyję), ale zauważamy harmonię, albo jej brak. Jak się okazuje (a to odkrycie jest magiczne), kluczem do harmonii jest jedna liczba, inna niż inne, niepowtarzalna, niekończąca się i niezawodna – złota liczba. Z jej źródeł wywodzą się złoty podział (inaczej złote cięcie, złoty stosunek), złota spirala, złoty kąt, złoty kwadrat, złoty trójkąt, nazywane również boskimi. To klucze do rozwiązania wielu zagadek natury, zrozumienia zamysłów artystów, malarzy, rzeźbiarzy, architektów od starożytności do dziś, do spojrzenia na ludzkie ciało oczami Leonarda da Vinci. Proporcje i proporcjonalność mają też wymiar przyziemny, praktyczny – korzystając z reguł codziennie, nieustannie coś przeliczamy, wyliczamy, porównujemy, zestawiamy.

## □ Temat do przemyślenia

Pitagoras, grecki mędrzec, filozof i matematyk, który żył około 500 lat p.n.e., rozważał:

**” Co jest najmądrzejsze? Liczba.  
Co jest najpiękniejsze? Harmonia.  
Czym jest cały świat? Liczbą i harmonią**

Pitagoras

Czy w kilku słowach zawarł to, co ważne? Czy komuś z nas przyszłoby do głowy takie myślenie o świecie? Matematyka to siostra filozofii. Pomyśl o tym – matematycznie i filozoficznie.

## □ I stopień wtajemniczenia – kod natury

Prawie tysiąc lat temu we Włoszech, w mieście Piza, żył matematyk o nazwisku Fibonacciego. Miał otwarty umysł i rozległe zainteresowania. Wiele zrobił dla rozwoju matematyki, ale najbardziej znany jest jako autor ciągu liczb naturalnych, które, jak się okazuje, stanowią bezprecedensowy KOD natury. A wszystko zaczęło się od obserwacji Fibonacciego dotyczących rozmnażania się królików (zainteresujesz się, to bez problemu dotrzesz do źródeł). Co to za liczby: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181... i tak w nieskończoność

Zainteresuj się tym ciągiem, a otrzesz się o magię. Wejdz na kolejne stopnie wtajemniczenia, co krok, dostaniesz dowody na geniusz natury. Najpierw popatrz na liczby i jak w teście MENSA, znajdź klucz do logiki ciągu (by nie psuć sobie przyjemności odkrywczy, nie patrz na dół strony – tam jest odpowiedź).

Rozpoczynając od trzeciej liczby w ciągu każda kolejna jest sumą dwóch poprzednich.

Znasz już sposób tworzenia kolejnych wyrazów ciągu?

- policz, jakie będą kolejne liczby i wypisz (tyle, na jak długo starczy ci zapału),
- daj to zadanie do rozwiązania rodzinie, bliskim. Pewnie mało kto wie cokolwiek na ten temat. A może się zdziwisz?

## □ II stopień wtajemniczenia – złota liczba

Liczby to liczby, ale w tych jest zawarta magia – złota proporcja. Nie wierzysz?

Sprawdź. Trzeba będzie dzielić. Najszybciej pójdzie przy pomocy kalkulatora, ale oczywiście możesz dzielnie ćwiczyć na papierze. Im więcej działań wykonasz, tym wyraźniej zobaczysz, o co chodzi. Naprawdę warto, bo to robi wrażenie!

Uwaga: im większe liczby wybierzesz do działań, wynik dzielenia (czyli ich stosunek) będzie bliższy wartości złotej liczby. Nie zniechęć się przy dzieleniu liczb z początku ciągu. To nie błąd! Dziel dalej. I nie próbuj podzielić 1 przez 0 ;).

Dla każdej pary kolejnych liczb z ciągu wykonaj dwa działania. Weźmy na przykład liczby 233 i 377:

- Większą liczbę podziel przez mniejszą (sprawdź, przekonasz się, że wszystkie wyniki są zbliżone do 1,618, już to jest fenomenem), czyli w naszym przykładzie:  $377:233 = 1,618$ ;
- Mniejszą liczbę podziel przez większą (sprawdź, przekonasz się, wszystkie wyniki dzielenia są zbliżone do 0,618, to też fenomen), czyli w naszym przykładzie:  $233:377 = 0,618$ ;

Zapisz wyniki w dwóch kolumnach. Zobacysz, to się narzuca, że wyniki dzielenia każdej większej przez poprzedzającą ją mniejszą, czyli ich stosunek, są bardzo bliskie sobie i wynoszą około albo równo 1,618\*, a każdej mniejszej przez następującą po niej większą wynosi około albo równo 0,618. 1,618 to właśnie złota liczba  $\phi^{**}$ , kolejny klucz, czyli stopień wtajemniczenia.

Ale to jeszcze nie wszystko. Do tego (sprawdź) 0,618 jest odwrotnością złotej liczby, czyli jeśli 1 podzielimy przez 0,618, dostaniemy złotą liczbę  $\phi$ .





I to jeszcze nie koniec. Obie liczby: 1,618 i 0,618 (jak łatwo zauważyć) mają identyczne części po przecinku. Z dokładnością do „nieskończoności”. Tego nie da się powtórzyć na innych liczbach. Dasz wiarę? Magia? Sprawdź.

\* co celów poglądowych wystarczy, że zapiszesz wyniki dzielenia z dokładnością do 3 cyfr po przecinku. To będzie przybliżenie. Jednak warto wiedzieć, że liczba  $\phi$  ma nieskończone rozwinięcie, nigdy się nie kończy. Przybliżenie do 30 cyfr po przecinku prezentuje się tak: 1,618033988749894848204586834365... A ile z takim przybliżeniem wynosi odwrotność  $\phi$ ? Jasne, że 0,618033988749894848204586834365...

\*\* W matematyce niektórym stałym wartościom liczbowym nadawane są zwyczajowe nazwy. Złota liczba ma symbol  $\phi$  (czytamy jako „fi”). Jak myślisz, czy może to mieć związek z nazwiskiem jej odkrywcy Fibonacciego? (są różne teorie)

### □ III stopień wtajemniczenia – złoty stosunek

Złota liczba, czyli  $\phi$ , równa w przybliżeniu 1,618, jest kluczem do boskiego podziału, boskiej proporcji, tak przez wieki architekci, malarze nazywali ten stosunek długości. Liczne dowody na doskonałość tego podziału daje natura, nieskończenie wiele badacze odkrywają w dziełach architektury, w sztuce tworzonej przez wieki. Ślady złotego stosunku znajdujemy nawet w konstrukcji piramid w Gizie. Czy funkcjonował on już w świadomości starożytnych Egipcjan, czy też projektowali oni na oko, intuicyjnie? Leonardo da Vinci wykonał studium anatomiczne, znane jako „Człowiek witruwiański”. Co się okazało? Proporcje ludzkiego ciała, twarzy mają związek ze złotym stosunkiem.

Narysuj, zbuduj coś, co będzie odpowiadało złotemu stosunkowi. Na początek może to być podział odcinka w takim stosunku albo prostokąt o bokach pozostających w złotym stosunku. Jak myślisz, jak nazywa się taki podział odcinka? A jak nazywać taki prostokąt? (Oczywiście to złoty podział odcinka i złoty prostokąt).

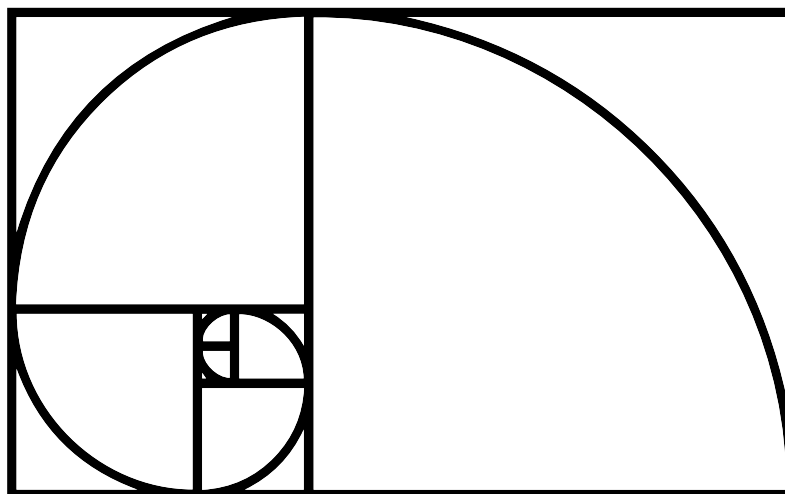
### □ IV stopień wtajemniczenia – złota spirala

Teraz pora połączyć ciąg liczb z rysunkiem. Czy ciąg liczb może być podstawą spirali? Może. Czy to się w głowie mieści?

Własnoręcznie stwórz spiralę, która będzie się rozwijać w nieskończoność. Przekonasz się, jak szybko kartka okaże się za mała. Wykreślanie spirali nie jest trudne. Narysuj kolejne kwadraty, a potem wykreśl spiralę i przekonaj się, że ciąg to nie przypadek. Rysowanie kwadratów o zadanych bokach nie stwarza problemów, poniżej masz instrukcję, szybko złapiesz, jak to działa. Wykreślanie spirali zacznij od najmniejszego kwadratu – potem połączysz łukiem dwa przeciwległe kąty – lewy dolny z prawym górnym. I tak dalej. Spirala będzie gotowa. A zatem:

- Weź dużą kartkę, długą linijkę i coś do pisania/rysowania.
- Wypisz liczby ciągu Fibonacciego. Nie bierz pod uwagę zera. Zacznij od jedynki.
- Centralnie na kartce narysuj kwadrat o boku 1 cm, a nad nim kolejny o boku 1 cm (jednostką nie musi być centymetr, ale tak jest wygodnie). Te dwa kwadraty odpowiadają dwóm pierwszym liczbom ciągu.
- Następnie 2. Po lewej stronie prostokąta dorysuj kwadrat o boku 2. Zgadza się?
- Poniżej kwadrat o boku 3. I już masz trójkę z głowy.
- Po prawej stronie doklej kwadrat o boku 5. Pasuje?
- Teraz kolej na 8. Na górze rysuj kwadrat o boku 8. Jak ulał.

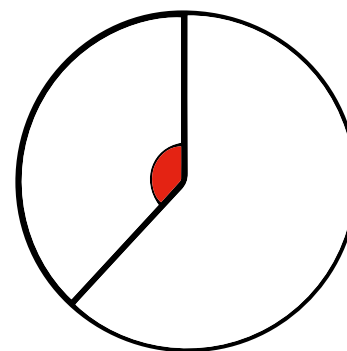
- A teraz z lewej kwadrat o długości boków 13. Jest, czyli nie ma niespodzianki?
- I tak dalej, ile zmieści się na kartce, a jak zabraknie kartki, możesz przenieść się z rozrysowywaniem kolejnych liczb ciągu do wyobraźni, na chodnik... W nieskończoność.



Już wiesz, jak wygląda spirala. Czy coś ci przypomina? Z czymś się kojarzy?

### □ V stopień wtajemniczenia – złoty kąt

Złote reguły działają uniwersalnie, więc czy mogłoby nie być złotego kąta? Jest! Okrąg można podzielić w złotym stosunku, wtedy otrzymamy kąty tak, jak (czy to przypadek?) obserwujemy w świecie przyrody – kolejne załazki, pędy, listki wyrastają pod złotym kątem, dzięki temu (to zostało naukowo zbadane) zapewniają sobie najlepsze warunki wzrostu, rozwoju, dostępu do światła. Mówi się o najbardziej efektywnym „upakowaniu”. Znowu natura daje dowód swojej genialności.



Obejrzyj roślinki pod kątem złotego kąta.

### □ Dalsze stopnie wtajemniczenia

Kto wie, może są kolejne kroki wtajemniczenia? Strach pomyśleć.

Masz wizję? Może masz intuicję? Może okaże się, że masz rację?

### □ Reklama zegarków

Złoty kąt przenosi nas ze świata przyrody do świata reklamy. Zegarki jako dobro luksusowe bywają często reklamowane. Muszą prezentować się kusząco. I co się okazuje? Prawie zawsze godzina, którą wskazują gwiazdy reklamy, to 10:10. Nie dzieje się tak przypadkiem.

Narysuj albo zobacz na cyferblacie zegarka tę godzinę. Zbadaj, jaki to kąt. Czy jest bliski złotego kąta? Czy to pójście na łatwiznę i taki wybór tłumaczy decyzje agencji reklamowych? A może zaproponujesz inne wytłumaczenie? Pewnie tego nie wiesz, ale być może się dowiesz, że instruktorzy podczas szkolenia na prawo jaz-

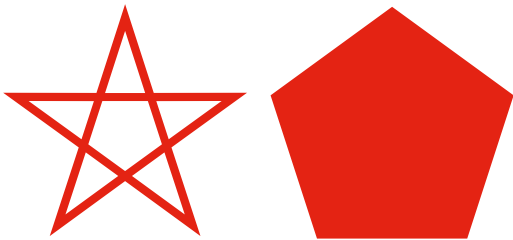




dy zalecają: proszę trzymać ręce na kierownicy na...? Oczywiście – na 10:10. Może więc nie chodzi o matematyczne wartości, lecz bezpieczeństwa, zaufanie? Jak sądzisz?

## □ Tajemnice pięciokąta

Są różne klasyczne kształty (nie wspominając o fraktalach i innych fantazjach) – trójkąty, prostokąty, wśród wielokątów wyróżnia się pięciokąt foremny. Co go wyróżnia? Złota proporcja! W pięciokącie foremnym stosunek przekątnej (linia łącząca dwa wierzchołki) do boku jest złotą liczbą! A gdyby tak przedłużyć boki pięciokąta foremnego? Powstanie dziesięciokąt wklęsły, gwiazda pięciopromienna, zwana też pentagramem lub gwiazdą pitagorejską (pitagorejczycy widzieli w nim symbol doskonałości i przyjęli za swój znak). W pentagramie też ukryte są złote podziały. Przyjrzyj się dobrze, ciekawe ile takich proporcji wypatrzysz.



Geometryczne wykreślanie pięciokąta foremnego zostaw sobie na później, na razie spróbuj odręcznie narysować ten piękny kształt. Pamiętaj, boki mają być równe. Podoba ci się? Innym kolorem narysuj przekątne – pięć odcinków – każdy wierzchołek połącz z dwoma naprzeciwległymi wierzchołkami. Co powstało wewnątrz pięciokąta? Pentagram. A co widzisz wewnątrz pentagramu?

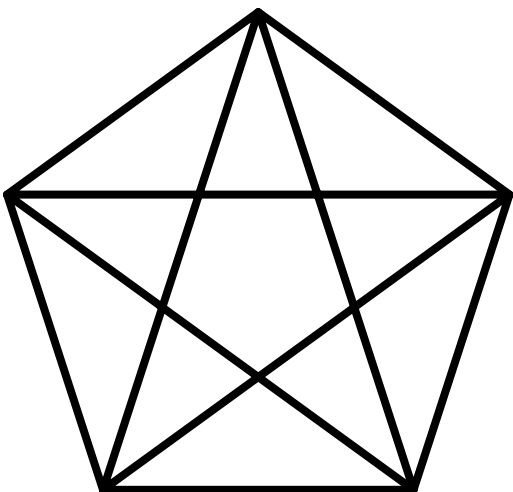
A teraz przedłuż boki pięciokąta tak, by linie przecięły się na zewnątrz pięciokąta. Co powstało? Pentagram!

Połącz teraz wszystkie wierzchołki. Co powstało? Pięciokąt!!!

I tak możesz w nieskończoność. Wewnątrz i na zewnątrz pięciokąta. Znowu magia?

## □ Własnymi rękami

Zobacz na własne oczy, jak wyglądają te magiczne figury – pięciokąt foremny i pentagram.



Wytnij wstążkę z papieru – to musi być dłuższy kawałek (np. ok. 20 cm długości, 2 cm szerokości), musi mieć równoległe boki. Efekt będzie zależał od precyzji. Teraz „zawiąż” węzeł na wstążce. Spłaszcz go. Już widzisz pięciokąt? A teraz przetnij jeden z końców na drugą stronę (dolna krawędź ma się pokrywać z dolnym bokiem pięciokąta). Spójrz pod światło. Co widzisz? Krawędzie narysowały idealny kształt gwiazdy pitagorejskiej. Nie wyszło doskonale? Powtórz, naprawdę warto.

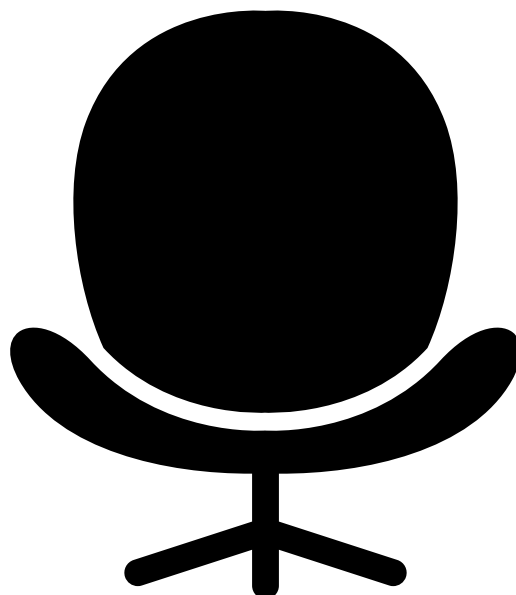
## □ Piękno i milimetry

Czy wiesz, że brzydotę od piękna dzieli milimetry? To kwestia proporcji. Ktoś ma piękną twarz, ale wydaje się, że nos jest za duży, na ścianie wisi piękny obraz, ale rama wydaje się za cienka, widzisz nowy model samochodu i wydaje ci się trochę za wąski, za wysoki. Ludzkie oko, ewolucyjnie, ma zdolność do oceny proporcji. Stąd często coś wydaje nam się nie takie, jak być powinno, choć każdy z nas inaczej widzi i inaczej postrzega świat.

Daj sobie prawo do oceny, obserwuj świat pod tym kątem. Czy estetyka ma dla ciebie znaczenie? Zorganizuj rodzinną dyskusję na temat, co się komu podoba i dlaczego, wbrew temu, że o gustach się nie dyskutuje.

## □ Audyt mieszkania

W każdym domu jest mnóstwo sprzętów, mebli. Każda rzecz ma historię, przeznaczenie, pełni funkcję. Przeważnie rzeczy bez historii (z którymi nie czujemy więzi emocjonalnej) i niepotrzebne trafiają na śmietnik lub na portal OLX. Każda rzecz ma też proporcje.



Popatrz na rzeczy w swoim otoczeniu. Jak określasz ich proporcje? Czy są harmonijne? Gdy coś ci nie gra, pomyśl, co jest nie tak? Czy ta rzecz jest za szeroka, za wysoka, za krótka w stosunku do innych wymiarów? Nie chodzi o skracanie nóg stołu, ale żeby zauważać proporcje. Czasami można zaradzić nieinwazyjnie.

Np. na za głębokiej kanapie wystarczy położyć poduszki, na za niskiej szafce postawić wysoki wazon, z boku zbyt wąskiego okna powiesić firanki...

## □ Poszukiwany, poszukiwana

Przyjmijmy, że proporcja związana ze złotym stosunkiem boków jest najpopularniejsza. Tak zakładając, może każdy ma w swoim otoczeniu, w zasięgu wzroku, coś, jakiś przedmiot, konstrukcje o takich właściwościach?



Rozejrzyj się. Wytypuj najbardziej prawdopodobnych kandydatów: stół, obraz, podział okna, dywan, regał, gazeta. Zmierz boki, odległości, podziel i zobacz, jaki będzie wynik dzielenia. Czy blisko 1,618? Gdy już „złapiesz” tę proporcję, bezbłędnie będziesz ją zauważać, bez mierzenia. Kwestia wyczucia.

## □ Inne znaczenie

Czasami słyszysz pytanie: w jakich proporcjach (w jakiej proporcji) dodać coś do czegoś, wymieszać coś z czymś? To język potoczny, odrywamy się od złotych podziałów. Gdy chodzi o stosunek czegoś do czegoś, posługujemy się procentami, częściami, miarkami. Najłatwiej to zrozumieć na kuchennym gruncie: przygotowujemy zalewę do ogórków, łącząc 1 część 10% octu z 9 częściami wody; do biszkoptu bierzemy jajka, mąkę, cukier wagowo w takich samych proporcjach; gotujemy konfitury – potrzebujemy pół kilograma cukru na kilogram owoców. A jak zrobić sałatkę owocową? Wybieramy dowolne owoce w dowolnej ilości. Tak też można!

W czym – w jakich działaniach – masz do czynienia z proporcją? To mogą być materialne byty i filozoficzne (np. w jakich proporcjach myślisz o niebieskich migdałach i o tym, co trzeba zrobić).

## □ Próby i przymiarki

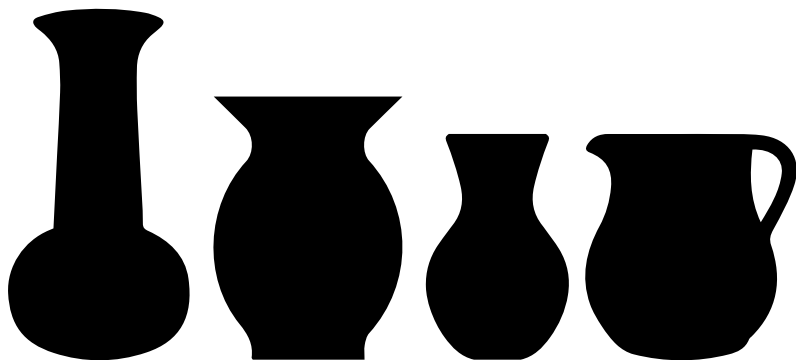
Wiele rzeczy wokół nas może być harmonijnych (mieć dobre proporcje) albo nie. Często to zależy od ciebie. Przykład: przynosisz do domu bukiet kwiatów zerwanych na łące. Są piękne, pięknie pachną, pięknie będą się prezentować w wazonie na stole. Trzeba je wstawić do wody.





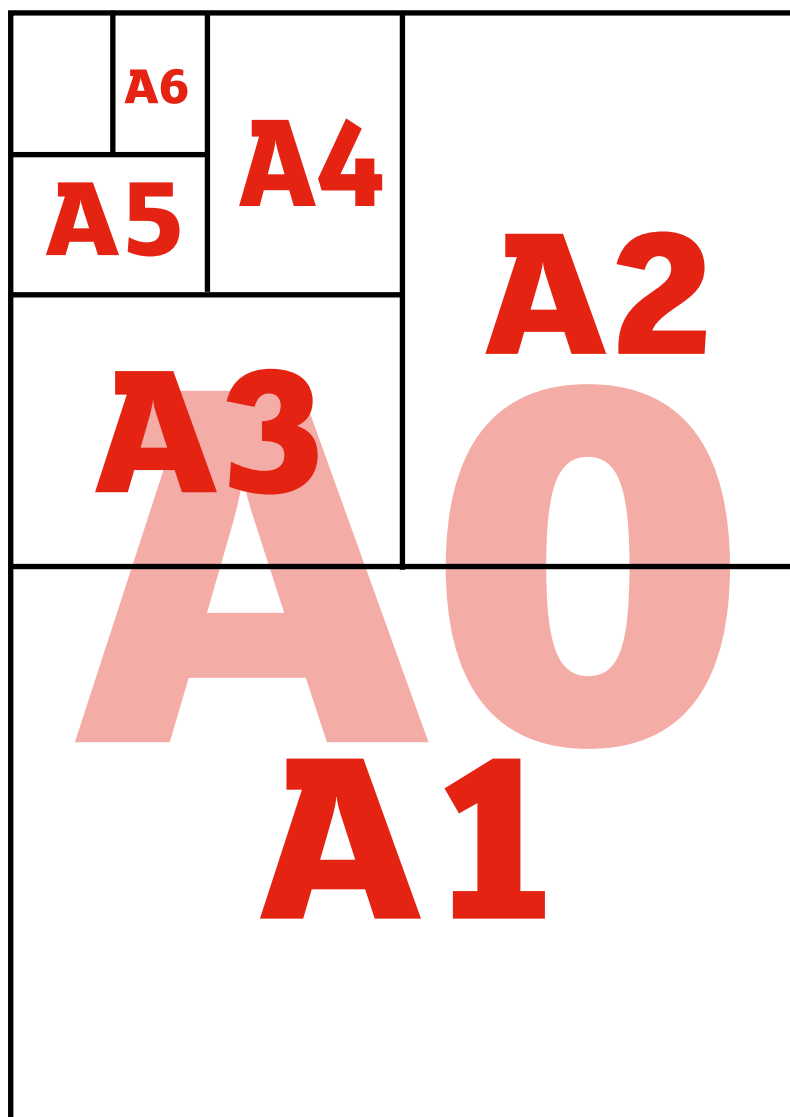
Który wazon wybrać? Nie powinien być ani za mały, ani za duży, nie za wysoki, ani za niski. Musi pasować do bukietu. Wazon i kwiaty powinny tworzyć zgraną parę.

Otwórz się na temat harmonijnego doboru. Zobaczysz, jakie znaczenie ma wyczucie proporcji. Nawet decyzja o wyborze garnka do gotowania kartofli też ociera się o harmonię, polegającą na dopasowaniu.



Zbierzesz bukiet, rozejrzyj się po domowych zasobach. Przymierz bukiet do różnych naczyń i wybierz to, które wyda ci się najbardziej akurat. Jak się prezentuje?

### Tajemnicze formaty papieru



A4 to najpopularniejszy format papieru, pasuje do domowej drukarki, nadaje się do rysowania. Znasz ten format? Znasz, prawdopodobnie dla ciebie to po prostu kartka. Na świecie standaryzuje się różne rzeczy, wymiary. I cały świat przyjął wspólny standard szeregujący formaty papieru. Największy arkusz – A0 – ma dokładnie 1 metr kwadratowy powierzchni. To był punkt wyjścia do standaryzacji. Każdy mniejszy format otrzymuje się, składając większy arkusz na pół. A0 do A1, A1 do A2, A2 do A3, A3 do A4 – to typowa kartka, i tak dalej. Najmniejszym formatem w szeregu

jest A10. Do pakowania i przesyłania dokumentów służą koperty produkowane w formatach B i C. Zachowując proporcje, mają większe wymiary, dzięki czemu nawet grubsze pliki kartek szeregu A mieszczą się w nich swobodnie. Książki i gazety wydawane są w różnych formatach, standardowych i fantazyjnych. W formatach książek już nie ma standardów, pełna dowolność, chociaż są mniej i bardziej oryginalne formaty.

W każdym domu znajdują się kartki, koperty różnych formatów, mogą być używane, niepotrzebne. Pobaw się, porównując je, ćwicz kreatywność.

Weź jak największą kartkę papieru – czy to A3, czy A4? Spytaj kogoś dorosłego, będzie wiedział, albo sprawdź wymiary w internecie. Zapamiętaj odpowiadające oznaczenie, potem złóż na pół wzdłuż krótszego boku, czyli dłuższy bok na pół (znowu zapamiętaj oznaczenie), potem jeszcze raz. I jeszcze raz, jeśli się da. Jaki najmniejszy format uda ci się uzyskać? Złóż kartkę A4 tak, by powstał kwadrat. Pobaw się, może dojdiesz do jakichś odkrywczych matematycznie wniosków? (poszukaj związku między przekątną kwadratu a dłuższym bokiem)

Wiesz, jak wygląda najzwyczajniejsza kartka do rysowania. Weź kilka takich kartek. Złóż każdą na pół. Składając tak kolejne kartki, możesz stworzyć profesjonalną publikację – album, tomik wierszy, książkę kucharską. Wystarczy zszyć w grzbiecie albo zrobić dziurki, przewlec tasiemkę i już gotowe. Nie zapomnij zapisać treści :).

Książki drukowane są w drukarni, drukarnia zamawia papier w papierni. Można zamówić papier w dowolnym formacie, decyzja należy do wydawcy. Spójrz, jakie formaty książek masz na półce. Znajdź najmniejszą i największą. Ile razy największa jest większa od najmniejszej? Jak myślisz, czy ta książka jest duża? Może jest największa? W jakim stosunku mają się do siebie długości jej boków?

Papier może mieć różną gramaturę – do różnych celów stosuje się papier grubszy lub cieńszy. Bywa, że papier jest spulchniany, czyli tak jakby nadmuchany powietrzem, w efekcie jest grubszy, ale lżejszy niż gdyby nie był spulchniony. Wagę papieru podaje się w gramach na metr kwadratowy. Sprawdź, ile waży ryza papieru o gramaturze np. 80 g/m<sup>2</sup>. Możesz zważyć albo policzyć. Pamiętaj! Arkusz A0 ma powierzchnię 1 m<sup>2</sup>. To ułatwia obliczenie.

### Proporcja a ekrany

Wymiary telewizorów i ekranów smartfonów podaje się w calach – 7”, 42” to długość przekątnej ekranu, a cal to stara miara równa szerokości kciuka dorosłego mężczyzny, czyli 2,54 cm. Jaki jest stosunek boków? Zawsze trzeba sprawdzić albo policzyć, bo może być różny. Klasyczny format ekranu telewizora to 4:3, czyli 1:1,33; bardziej nowoczesny, pozwalający oglądać filmy to 16:9, czyli 1:1,77; hollywoodzki standard ekranów filmowych to z kolei 1:2,39. Złoty stosunek – wiadomo: 1:1,618. Trudno się w tym połapać. Co jest najpiękniejsze? Co jest najlepsze?

Jak myślisz, może najlepiej dopasować proporcję do konkretnego zastosowania? Może nie ma jednej miary, jednej metody? Tak czy inaczej, patrząc na jakiś ekran – wielki czy mały – staraj się oszacować jego format – długość boków, przekątną, stosunek boków. Dojdiesz do wprawy.





# Równoważność, czyli co jest czemu równe

Codziennie wykonujemy działania na liczbach. Każdy, od małego. Podstawą działań jest równość, czyli równoważność. Są ślady, świadczą o tym odkrycia archeologiczne, że już dwa tysiące lat temu Babilończycy swobodnie operowali działaniami arytmetycznymi: odejmowali, dodawali, dzielili, mnożyli. Arytmetyka, bo tak nazywa się nauka o podstawowych działaniach na danych wartościach, była podstawą handlu, stąd sprawności związane z wymianą towarów przed wiekami dały bazę do rozwoju matematyki. Podstawowym pojęciem arytmetyki jest równość: coś jest równe czemuś. Najlepszą ilustracją równości jest waga w równowadze. Cokolwiek położymy na obu szalkach, ich waga musi się zrównoważyć. W matematyce wagą są równania. Czasami mamy do czynienia z pełną wiedzą o porównywanych wyrażeniach, czasem niektóre dane nie są znane, są niewiadomymi. Wtedy do gry wkracza algebra. Za ojca algebry uznaje się Muhammeda ben Musę Alhwarazmiego (al-Chuwarizmi), żyjącego w IX wieku w Bagdadzie autora pierwszego podręcznika matematycznego „Al gebr w'al-mukabalah”. Mieszkańcy Bliskiego Wschodu, czerpiąc ze źródeł matematyki greckiej i hinduskiej, rozwinęli algebrę („al gebr”), ta nauka była im po prostu potrzebna do życia. Matematyk perski zwierzył się, że ograniczył swoje zainteresowanie „do tego, co ludzie codziennie potrzebują przy spadkobranium, zapisach testamentowych, podziałach majątkowych, procesach sądowych oraz przy handlu i przy wszelkich innych sprawach pieniężnych”. Samo życie.

## Znaki arytmetyki

Czy już znasz te znaki: „+”, „-”, „x” albo „•”, „/” albo „:”? Symbolizują podstawowe działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Jest jeszcze znak równości – „=”, podstawa arytmetyki, całej matematyki. Co ciekawe przez wieki radzono sobie bez niego. Dwie strony równania łączono słowem wyrażającym równość. Dopiero w XVI w. Znany nam znak, w postaci dwóch równoległych kresek, zaproponował walijski matematyk Robert Recorde. Najwyraźniej znużyła go konieczność ciągłego powtarzania słów „równa się”, „jest równe”. I przyjął się. Dlaczego wybrał taki znak? Uznał, że nie ma nic bardziej równego niż dwie równoległe kreski (odcinki) tej samej długości. Miał rację?



Jak myślisz, jakie mogłyby być uzasadnienia dla takiej, nie innej, postaci znaków symbolizujących cztery podstawowe działania arytmetyczne?

- +
- -
- X (albo •)
- / (albo :)

## Dodawanie

Dodawanie, czyli sumowanie, znasz od zawsze. W podstawowym zakresie jest naturalne, intuicyjne. Już dziecko w wózku liczy – jeden paluszek, drugi paluszek, trzeci... O, zobacz, ptaszek odleciał i drugi... Ile masz lat? Trzy i pół! To już wyższa matematyka.

Jak ci się wydaje, czy dodawanie jest najłatwiejsze z czterech podstawowych działań?

Obserwuj i rejestruj, kiedy co do czego dodajemy.  
Kiedy dodajemy? Co dodajemy? To przykłady:

- kiedy czegoś przybywa (w misce leżą trzy jabłka, a ktoś dołożył kolejne trzy, na konto wpłynęła pensja, spadł deszcz – przybyło wody w Wiśle, do klasy dołączyli nowi uczniowie i uczennice)
  - kiedy coś wzrasta (od rana temperatura wzrosła o 5 stopni, dziecko urosło 2 centymetry przez wakacje, cena masła jest wyższa o 7 zł za kilogram, niż w zeszłym miesiącu)
  - kiedy coś łączymy z czymś (np. liczbę oczek na dwóch kostkach do gry, kilo mąki i kilo cukru na ciasto, sumujemy odległość dwóch odcinków trasy)
  - kiedy liczymy kolejne elementy (jeden palec, dwa palce..., jedno drzewo, drugie drzewo...)
- Masz jeszcze inne pomysły?



## Banalna prawda?

Czy zawsze  $2 + 2 = 4$ ? W matematyce nie ma odstępstw. W języku potocznym użycie zdania „Jak dwa razy dwa jest cztery” podkreśla oczywistość czegoś, o czym się mówi. Filozofia też nie podważa tego wyniku. Tak po prostu jest. To równanie niepodważalne.

Podfilozofuj. Co by było, gdyby  $2 + 2 = 5$ ? Albo 3, albo 10? Nie ograniczaj swoich fantazji żadną przyziemną myślą. Pewnie nie jeden matematyk, filozof głowił się nad tym „banalnym” równaniem. Gdyby mi się udało obalić tę równość... Ktoś, komu by się udało, na pewno przeszedłby do historii :).

Czy w życiu czasami zdarzają się sytuacje, gdy dwa plus dwa to jednak więcej niż cztery (oczywiście w przenośni)? Co to mogłoby być?

## Co się nie sumuje?

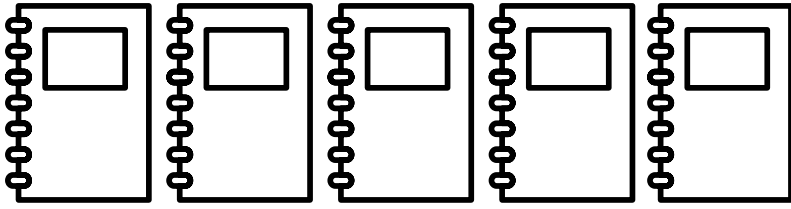
Mnóstwo rzeczy możemy dodawać. Arytmetyka działa na liczbach, każdą do każdej można dodać. I nie badamy sensu ich sumowania. Liczby to







liczby. W codziennych rachunkach ma sens dodawanie tego samego do tego samego. Jeśli chcielibyśmy dodać dwa samochody do trzech truskawek, to trudno byłoby stwierdzić, co otrzymamy w wyniku takiego dodawania :).

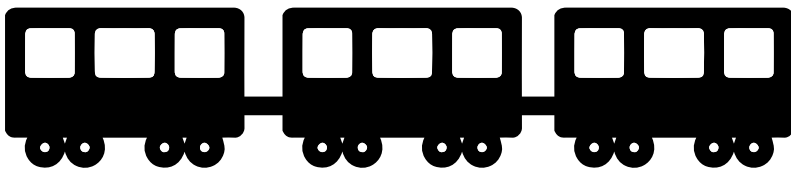


Zwróć uwagę co, do czego dodajesz. Jeśli masz w tornistrze 5 zeszytów i 3 książki, to możesz powiedzieć, że masz 8 rzeczy. Możesz też zsumować ich wagę. Ale po co miałybyś/miałbyś sumować ich liczbę stron? Można, nie ma przeszkód, ale czy taki rachunek ma praktyczny sens?

Wymyśl inne przykłady, czego nie ma sensu dodawać.

## □ Odejmowanie

Działanie odwrotne do dodawania. Odejmowanie też znasz od dziecka. Masz 5 cukierków. Zjesz jeden. Ile zostało? Mniej. Intuicyjnie to czujesz. Cieszysz się na wakacje. Całe lato przed tobą, ale każdego dnia ubywa jeden dzień. Wiesz, że wakacyjnych dni ubywa. Na stole patera ze śliwkami. Każda zjedzona przybliży cię do pustej miski. Miło dostać kieszonkowe, ale każda decyzja zakupowa uszczupla stan posiadania. Nie ma na to rady. Działając na liczbach, wszystko możesz dodać i odjąć – jeśli do jakiejś liczby np. do 5 dodasz 2, to suma wyniesie 7, jeśli zechcesz wrócić do liczby 5, wystarczy od 7 odjąć dopiero co dodaną 2 i znowu masz 5. W życiu nie jest tak prosto, bo przecież nie odzyskamy dni, które już minęły.



Obserwuj i rejestruj, kiedy co od czego odejmujesz.

Kiedy odejmujemy? Co odejmujemy? To przykłady:

- kiedy czegoś ubywa (w misce leżą trzy jabłka, a ktoś zjadł jedno, na konto wpłynęła pensja, a trzeba było naprawić samochód, od dawna nie spadł deszcz, więc ubyło wody w Wiśle)
- kiedy coś spada, maleje (od rana temperatura spadła o 5 stopni, ktoś schudł 5 kg, cena sałaty spadła w sezonie o 50 gr)
- kiedy coś odłączamy, odkładamy (w garnku jest 5 kg bigosu, odkładamy dla babci 2 kg, pociąg miał 5 wagonów, na stacji X odłączono 2 wagony)
- kiedy sprawdzamy, ile zostało (do urodzin został miesiąc, codziennie ten czas się skraca)

Masz jeszcze inne pomysły?

## □ Mnożenie

**Teza 1, nie do obalenia:** tabliczka mnożenia przydaje się w życiu. Nie trzeba w to wierzyć, żeby się przekonać, na każdym kroku wyzwania.

**Teza 2, nie do obalenia:** tabliczka mnożenia zgadza się, za każdym razem. Nie da się znaleźć dowodu, że coś się nie zgadza.

Mnożenie warto wyćwiczyć, bez pomocy kalkulatora w smartfonie. Metody są różne – można nauczyć się na pamięć, pomagać sobie palcami, kupić liczydła i ćwiczyć jak 100 lat temu nasi przodkowie. Tylko ćwiczenie da wyniki i na pewno się przyda.

Mnożeniem możesz się bawić w wielu sytuacjach. Zorganizuj grę towarzyską polegającą na wymyślaniu pytań i wykonywaniu działań (takie

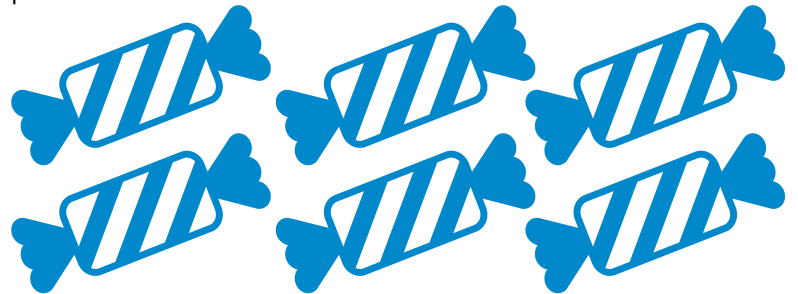
krótkie zadania z treścią, tym razem wyłącznie na mnożenie). Wciągnij całą rodzinę, zajmiecie się tą grą przy przygotowywaniu posiłków, w czasie jazdy samochodem, na dobranoc:

- Ile trzeba kupić jabłek, jeśli robimy zakupy na tydzień, a każdy z domowników codziennie zjada jedno jabłko?
- Ile stron książki przeczytasz w miesiąc, jeśli codziennie czytasz 12 stron?
- Ile oddechów zrobisz w godzinę, jeśli w ciągu minuty oddychasz 20 razy?
- Ile jest  $7 \times 8$ ?
- Jaką dużą powierzchnię ma twój prostokątny pokój, jeśli jego długość to 3 m, a szerokość 4 m?
- Twój krok ma 50 cm. Jaką odległość pokonasz, robiąc 200 kroków?
- Jeżeli samochód spala 10 litrów benzyny na 100 kilometrów, ile litrów spali, pokonując trasę długości 500 kilometrów? Ile będzie kosztowała podróż, jeśli litr benzyny kosztuje 5 zł?
- Jaką długość ma odcinek złożony z 30 patyczków, jeżeli jeden patyczek ma 3 cm?
- Itd. Bez końca.

## □ Dzielenie

To odwrotność mnożenia. Dzielisz: rozmieniasz banknot dwudziestozłoty na cztery pięciozłotówki. Mnożysz – masz cztery pięciozłotówki, czyli razem masz 20 złotych. Dzielisz: kilogram borówek amerykańskich po równo na 4 miseczki, każda po 250 g. Mnożysz: masz cztery miseczki borówek amerykańskich, każda po 250 g, zsypujesz je do dużej miski i masz równo kilogram. Tak to działa. Ale jest wyjątek: nie dzielimy przez zero, właśnie dlatego, że to przestaje działać.

Czy masz wypracowane metody dzielenia? Poćwicz na jakichś drobnych przedmiotach.



Na przykładzie cukierków: masz 18 cukierków i dwójkę przyjaciół do obdzielenia (nie zapomnij o sobie). Metody dzielenia są różne – jeden spojrzy i już wie, inny będzie rozdawać, np. po jednym cukierku do wyczerpania zapasu, ktoś może działać metodą prób i błędów. Każda metoda dobra, byle było sprawiedliwie, a wynik zgadzał się arytmetycznie.

## □ Dzielenie z resztą

Z dzieleniem jest komplikacja, można sobie z nią poradzić, ale trzeba być przygotowanym na taką sytuację. Czasem spotkasz się z trudniejszymi przypadkami, gdy nie da się podzielić czegoś równo. Masz wtedy do czynienia z dzieleniem z resztą.

Co zrobisz, gdy:

- do podziału na troje masz 10 cukierków?
- zostały 4 kawałki ciasta, a jest trzech chętnych na dodatkę?
- masz 20 naklejek i chcesz je podzielić na 6 osób?
- Itd. Bez końca.



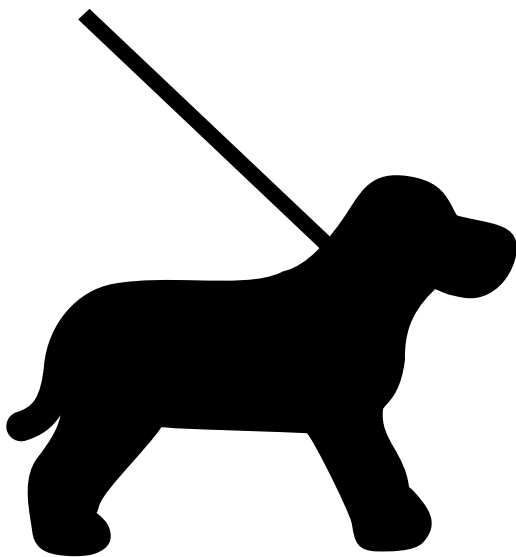


# ” U podstaw praw rządzących światem znajduje się symetria

Richard Feynman

## Dzielenie metafizyczne

Matematykę od metafizyki sporo dzieli (nomen omen – zauważ, jak słowo „dzielić” jest popularne w języku). Metafizycznie, poetycko, pięknie mówimy: żeby mnożyć, trzeba dzielić. Na przykład dzieląc się wiedzą, mnożymy mądrość. Można dokonywać podziału (według różnych kryteriów) – pokoi, funkcji, obowiązków, książek... Można dzielić się z innymi i można dzielić konkretnie, zgodnie z matematycznymi regułami. Codziennie coś dzielisz, dzielą twoi opiekunowie. Po równo albo według jakiegoś klucza, np. według wieku, według zasług, według potrzeb.



To twoje zadanie na jeden dzień. Budzisz się rano i od razu rejestrujesz (możesz zapisywać, to się zdziwisz, ile tego było) wszystkie sytuacje, kiedy coś się dzieli – matematycznie i metafizycznie.

- korzystanie z łazienki (korzystają z niej wszyscy)
- wspólna tuba pasty do zębów (jedna dla całej rodziny)
- krojenie chleba na kromki dla każdego (w zależności od apetytu)
- rozmowa o ciekawych rzeczach (dzielisz się spostrzeżeniami)
- wyrzucasz śmieci (dzielicie się obowiązkami)
- wyprowadzanie psa na spacer (ktoś rano, ktoś potem)
- nakładanie porcji na talerz (każdemu, ile chce)
- dzielenie melona na części (pewnie kawałki powinny być równe)

- przeglądanie jednej gazety (kilka osób z niej korzysta)
- oglądanie filmu (podzielone na części blokami reklamowymi)
- działasz na trzy fronty (bierzesz udział w rodzinnej rozmowie, zerkasz na ekran telewizora, myślisz o niebieskich migdałach – dzielisz swoją uwagę)

## Sprawiedliwa metoda

Czy po równo oznacza sprawiedliwie? Można dyskutować. To ciekawy temat. W życiu są sytuacje, że nie da się czegoś idealnie równo podzielić. Wtedy na ratunek przychodzi nie matematyczna, ale najsprawiedliwsza metoda: ja dzielę, ty wybierasz. Jedna kajzerka ma starczyć dla dwóch osób. Ty dzielisz bułkę, druga osoba wybiera swoją część.

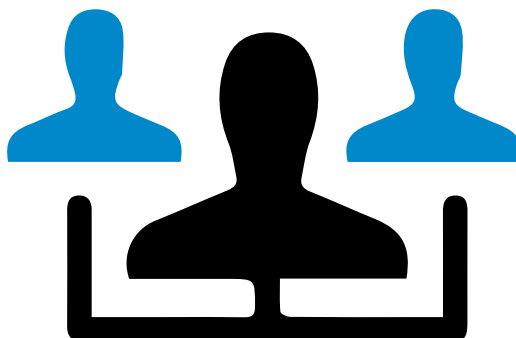
Zastosuj przy najbliższej okazji, cokolwiek będzie trzeba podzielić.

Pytanie za dodatkowe punkty – jak podzielić coś sprawiedliwie (według podobnej zasady), gdy są trzy chętne osoby? Pokombinuj, może się przydać.

## Dzielenie w wymiarze społecznym

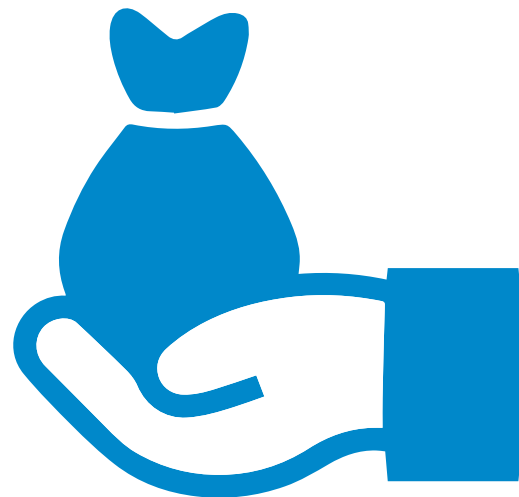
Świat się zmienia. Coraz więcej jest inicjatyw polegających na tym, że grupa ludzi wspólnie inwestuje, na przykład kupują samolot albo dom na wakacje, rower i wspólnie z tego dobra korzystają. Są też inicjatywy polegające na tym, że tworzą się społeczności dzielące się dobrami. To dzielenie nie w znaczeniu arytmetycznym, ale społecznym.

Może otworzysz się na takie współdziałanie przez współdzielenie?



## Ważne i poważne słowo

Filantrop to ktoś, kto dzieli się swoim majątkiem z innymi, potrzebującymi.



Czy znasz kogoś, kto dzieli się majątkiem? Jeśli spotkasz kogoś takiego w przyszłości, podziękuj jej/jemu.

## Pomyśl liczbę

Matematyka jest nieomylna. Tu się musi wszystko zgadzać, niezależnie, czy działamy na znanych liczbach i szukamy wyniku, czy mamy do rozwiązania równanie z jakąś niewiadomą. Gdy mamy niewiadomą, którą chcemy poznać, odpowiednio, nawet wielokrotnie przekształcamy równanie, by obliczyć wynik. Zgodnie z potrzebą skorzystamy z jednego, kilku lub wszystkich czterech podstawowych działań (ważne: musimy pamiętać o kolejności działań!).

Sprawdź, proponując komuś zabawę w odgadywanie pomyślanej liczby. Ktoś wymyśla, ty odgadujesz. A potem możecie się zamienić. Niech ta osoba pomyśli jakąś liczbę. Ktoś nie ma pomysłu? Zaproponuj: to może być jej wiek albo numer mieszkania, numer wybranego miesiąca, numer buta. W sumie cokolwiek byle nie była to za duża liczba, bo pewnie będzie kłopot z liczeniem.

Zwróć uwagę, że do akcji wkracza algebra, czyli równanie z niewiadomą. Nie wiesz, nie czytasz w myślach, jaką liczbę ktoś ma na myśli. Ale tak ułożyłaś/ułożyłeś równanie, że po zredukowaniu dojdiesz do rozwiązania tajemnicy – w mig, bezbłędnie podasz liczbę pomyślaną przez drugą osobę.





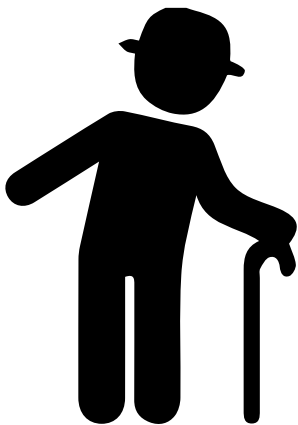
Najpierw ułóż równanie, a potem proś o wykonywanie działań. Na przykład takich:

- pomnóż pomyślaną liczbę razy trzy
- dodaj do wyniku 9
- odejmij podwojoną pomyślaną liczbę
- odejmij 5
- podaj wynik. Musi się zgadzać.

Teraz wskazówka dla ciebie: odejmij od podanego wyniku 4. I już wiesz. Wow! Zgadza się.

## □ Ile to jest?

Matematyka działa na liczbach, w życiowych sytuacjach często chcemy dowiedzieć się, ile wynosi „coś”. Czym jest „coś”? Może być cokolwiek, wystarczy, że da się to policzyć. Czyli arytmetyka nie jest rozwiązaniem dylematu „co na siebie włożyć” ani nie odpowie na pytanie „jaki mamy dziś dzień?”, ani nie doradzi, gdzie kupić rower, jaki film warto obejrzeć. Ale odpowie na pytania: „jakie pole powierzchni ma boisko, którego wymiary znamy”, „ile trzeba kupić ziemniaków, żeby wystarczyło dla czteroosobowej rodziny na cały tydzień, jeżeli wszyscy jedzą ziemniaki raz dziennie, codziennie, a każdy zjada ich 200 g na jeden posiłek”, „na ile części trzeba podzielić pizzę, żeby każda z 5 osób dostała tyle samo kawałków”, „ile lat ma dziadek, jeśli wiadomo, że jest starszy od mamy o 30 lat i wiadomo, ile lat ma mama”. Takich zadań, pytań zadajemy nieskończenie wiele. Te codzienne wydają się całkiem proste (choć bywają też bardziej skomplikowane do rozwiązania).



Zauważaj arytmetykę w życiu codziennym. Może zdziwisz się, ile równań na co dzień rozwiązujemy, nawet o tym nie myśląc. Wszystkie relacje równoważności, które wymagają dodawania, odejmowania, mnożenia czy dzielenia, są arytmetyką.

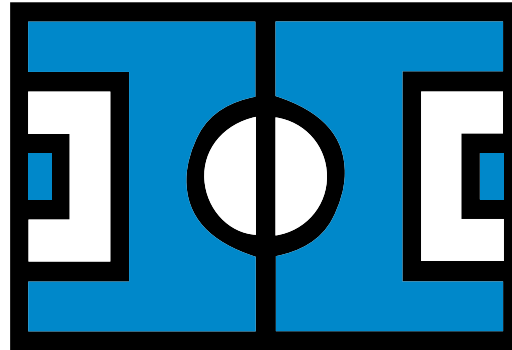
## □ Brak danych

Równanie to nic innego jak dwie szalki wagi, które muszą być w równowadze. Jak ustalisz, ile waży jabłko, jeśli nie masz odważników (ani nic innego o podanej masie)? Możesz tylko oszacować. Jeśli na szalkach leżą przedmioty, które waży tyle samo, to waga jest w równowadze. Jeśli nie ma równowagi, trzeba coś dodać, coś odjąć. Podobnie z równaniem: to, co po lewej stronie równania musi się równać temu, co po prawej. Gwarantuje to znak „=”. Gdy w równaniu będzie jakaś nieznaną wielkość (niewiadoma), a chcesz rozwiązać równanie, musisz wyznaczyć

taką wartość nieznaną wielkości, dla której naprawdę lewa strona równania jest równa prawej. Szukaną wartością może być ciężar, długość, liczba czegoś, koszt. Zawsze musisz mieć dane, które pozwolą obliczyć, poznać niewiadomą.

Pomyśl, czy dałoby się znaleźć niewiadomą, gdyby nie było informacji (danych)? Bez problemu ułożysz równania, pytanie, czy znajdziesz odpowiedź. Spróbuj:

- czy ustalisz, jakie pole powierzchni ma boisko, jeśli nie znasz jego wymiarów?
- czy dowiesz się, ile lat ma dziadek (w ten sposób, bo możemy go zapytać albo spojrzeć w dowód), jeśli nie wiesz, ile lat jest starszy od mamy albo ile lat ma mama?



Nie ustalisz, nie dowiesz się, nie policzysz. Musisz mieć dane. Dane to podstawa. Zapamiętaj to, przyda się nie raz.

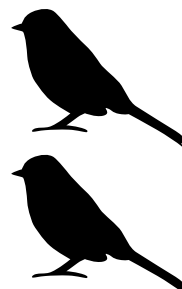
## □ Zmora czy zabawa?

Nie da się przejść przez szkolny kurs matematyki bez rozwiązywania zadań z treścią. Wielu uczniów ich nie lubi. Dlaczego? Twoi koledzy wyjaśniają:

- bo są za proste,
- bo są schematyczne,
- trzeba je rozwiązywać nie po swojemu, a po szkolnemu, zgodnie z ustalonym algorytmem,
- bo trzeba wypisywać „dane” i „szukane”, a nie po prostu udzielić odpowiedzi.

Szkoda, bo można różnie podejść do każdego tematu – jeden lepiej zrozumie, jak sobie coś narysuje, innemu pomoże metoda szacowania, ktoś wybierze taktykę prób i błędów. Zadania mogą być zachętą do twórczego myślenia, do podążania własnymi drogami, a nie zmorą, męczarnią. Wszystko zależy od podejścia. Nie skreślaj takich zadań! Ale uważaj na pułapki. Nie daj się nabrać na takie zadania: „Na statku znajduje się 30 owiec i 16 kóz. Ile lat ma kapitan?”.

Chyba najbardziej znane zadanie z treścią brzmi tak: „Na drzewie siedziało 30 wróbli, większość, poza sześcioma, odleciała. Ile wróbli pozostało na drzewie?”.



Jaka jest twoja odpowiedź? Zadaj zadanie dorosłemu. Ciekawe, jakie będą odpowiedzi.

## □ Mistrz zadań

Każdy może być mistrzem znajdowania odpowiedzi na zadania z treścią. Ale mistrzem nad mistrzami jest ktoś, kto potrafi budować oryginalne zadania.



Wymyślaj pytania, zadania. Niech będą ciekawe, odkrywcze, praktyczne i śmieszne. Z życia wzięte i abstrakcyjne. Pamiętaj o wystarczającej liczbie danych i o logice.

## □ Matematyka czy czarna magia?

Matematyka jest otwarta na sztuczki, niektóre mają tysiącletnią historię. Jest ich naprawdę wiele, wystarczy poszukać inspiracji. Poćwicz i zaimponuj swoją wiedzą, mocą magiczną.

Oto jedno z nich:



Zaczynaj od sztuczki z mnożeniem przez magiczną liczbę 1001, zwaną liczbą Szeherazydy. Zanim zrobisz wrażenie na innych, wypróbuj na kilku przykładach: mnoż dowolne liczby trzycyfrowe przez 1001. Zawsze dostaniesz wynik łatwy do policzenia bez mnożenia, np.:

$$777 \times 1001 = 777\ 777$$

$$102 \times 1001 = 102\ 102$$

$$987 \times 1001 = \dots$$

Jak myślisz, ile? Magia? Nie, matematyka. Spróbuj, przekonaj się na dowolnych liczbach. Potem rzucisz audytorium na kolana.





# Sport, czyli szybciej, wyżej, silniej

Uprawiamy sport, bo sport to zdrowie. Lubimy oglądać go – na żywo i relacje telewizyjne – bo budzi emocje, ekscytują nas rekordy, rozgrzewają spekulacje. Kto wygra? Kto będzie pierwszy na mecie? Kto pobije rekord? Kto zachwyci stylem, techniką? Mamy swoich bohaterów i im kibicujemy, choć pamiętamy, że ważniejszy jest udział niż zwycięstwo, a zasada fair play jest najwyższą wartością. Można uprawiać sport amatorsko albo trenować zawodniczo, albo tylko śledzić sukcesy zawodników. W każdym razie ocieramy się o matematykę, bo prawie wszystko, co opisuje sportowe wyniki, to matematyka. Każda konkurencja sportowa ma logikę rywalizacji, dynamikę rozgrywek, historie wyników. Nie mielibyśmy pełnego obrazu zmagania sportowych bez precyzyjnych pomiarów, tabel wyników, rankingów czy zakładów, czyli bez matematyki. Inny jej aspekt w sporcie to wiedza o technikach i analiza biegów, rzutów, skoków, pływania, toru lotu... Matematyka jest nieodzowna w konstrukcji obiektów sportowych, modelowaniu sprzętów sportowych najnowszej generacji, strojów o kosmicznych właściwościach.

## Zbiory dyscyplin sportowych

Tradycja olimpijska czerpie ze starożytnej Grecji, ale motto olimpijskie znane jest w wersji łacińskiej: CITIUS-ALTIUS-FORTIUS, czyli szybciej, wyżej, silniej. Pytanie, czy te trzy kryteria wystarczają do klasyfikacji dyscyplin olimpijskich?

Przyjmij, za klasyczną deklaracją, że są trzy zbiory: SZYBCIEJ, WYŻEJ, SILNIEJ. Spróbuj przyporządkować do każdego z nich dyscypliny olimpijskie. Ambitniej, gdy będziesz klasyfikować dyscypliny z pamięci, ale możesz posłużyć się poniższą ściągawką. Czy wszystkie dyscypliny da się przyporządkować do tych kryteriów? Jeśli zostanie ci nieprzydzielona grupa, postaraj się dobrać kolejne kryterium/kryteria. Ciekawe, ile ostatecznie zbiorów stworzysz? Gdy uznasz za słuszne, możesz jedną dyscyplinę przydzielić do dwóch zbiorów, tak powstaną części wspólne zbiorów.



- Badminton
- Biatlon
- Biegi długodystansowe
- Biegi krótkie
- Biegi z przeszkodami
- Bobsleje
- Boks
- Curling

- Dziesięciobój
- Gimnastyka artystyczna
- Gimnastyka sportowa
- Hokej
- Hokej na trawie
- Jeździectwo
- Judo
- Kajakarstwo
- Kajakarstwo górskie
- Kitesurfing
- Kolarstwo
- Koszykówka
- Łucznictwo
- Łyżwiarstwo figurowe
- Łyżwiarstwo szybkie
- Narciarstwo alpejskie
- Narciarstwo klasyczne
- Pięciobój nowoczesny
- Piłka nożna
- Piłka ręczna
- Piłka wodna
- Pływanie
- Pływanie synchroniczne
- Podnoszenie ciężarów
- Rzuty
- Short track
- Siatkówka
- Siatkówka plażowa
- Siedmiobój
- Skeleton
- Skok w dal i trójskok
- Skok wzwyż i o tyczce
- Skoki do wody
- Skoki na trampolinie
- Skoki narciarskie
- Snowboarding
- Snowboard
- Strzelectwo

- Szermierka
- Taekwondo
- Tenis stołowy
- Tenis ziemny
- Triathlon
- Windsurfing
- Wioślarstwo
- Zapasy
- Żeglarsstwo
- Żużel

Sportów olimpijskich przybywa. Do tej listy możesz dodawać dowolne konkurencje, nieolimpijskie też, bo każdy sport jest równie dobry.

## Ciekawostki okołosportowe

W sporcie nie tylko sportowcy biją rekordy. Wiele obiektów (a właściwie ich właściciele) rywalizuje w konkurencji naj-... To też ciekawa strona sportu, pełna ciekawostek.



Znasz, to dobrze, nie znasz, to poznaj rekordy i ciekawostki o obiektach, na których rozgrywane są zawody w różnych dyscyplinach, gdzie odbywają się mecze. Jedne informacje przy-





dadzą ci się mniej, inne bardziej, ale na pewno zrobisz krok w kierunku sportowej erudycji. Nawet informacja o wysokości, na jakiej wisi kosz do koszykówki, może okazać się interesująca. Ciekawe, czy doskoczysz?

- Ilu kibiców może pomieścić największy na świecie stadion piłkarski? Czy to więcej, czy też mniej osób, niż mieszka w twoim mieście, dzielnicy?
- Ile metrów ma basen, tak zwany olimpijski? Ile metrów ma basen, w którym pływasz?
- Czy są różne wielkości skoczni? Jakiej są ich wielkości? Która jest największa?
- Z jakiej największej wysokości skoczkowie skaczą do wody?
- Jakiej długości muszą być tory wioślarskie, kajakowe?
- Jakiej są wymiary ringu bokserskiego?
- Jak zbudowany jest sztuczny tor dla kajaków górskich?
- Na jakiej wysokości wisi kosz do koszykówki?
- Do jakiej prędkości zawodnicy rozpędzają się na najnowocześniejszych torach skeletoowych, bobslejowych, saneczkowych?
- Jak są wyprofilowane tory na stadionach kolarskich?
- Czy lodowisko do hokeja jest większe niż boisko piłkarskie?
- Na jakich dystansach rozgrywane są biegi lekkoatletyczne?

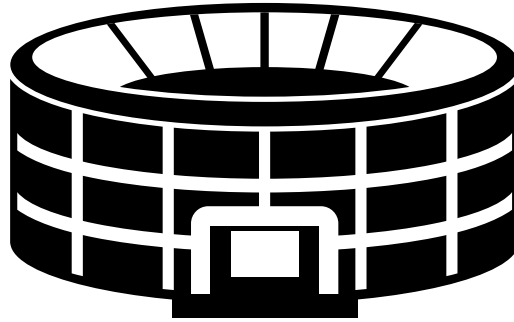


I tak dalej dla każdego obiektu, dla każdego wyposażenia, dla każdej dyscypliny. Albo dla wybranych.

## □ Kształty stadionów

Już starożytni Grecy organizowali zawody sportowe, pierwsze odbyły się w 776 r. p.n.e., czyli blisko 2800 lat temu. Co cztery lata (tak jest też dzisiaj) odbywały się igrzyska lekkoatletyczne, jak byśmy dziś powiedzieli. Pierwszą konkurencją był bieg na dystansie 600 stóp, czyli na odległość prawie 200 metrów. Taka odległość zwana była „stadionem”. Starożytne miejsce rozgrywania zawodów sportowych to była po prostu bieżnia i amfiteatr z miejscami dla widzów. Z czasem, jak przybywało konkurencji, funkcje stadionu rozszerzały się. Dziś stadiony, jako areny zmagani sportowych, mają różne formy, służą różnym celom, nie tylko sportowym. Niektóre obiekty są ekstremalne –

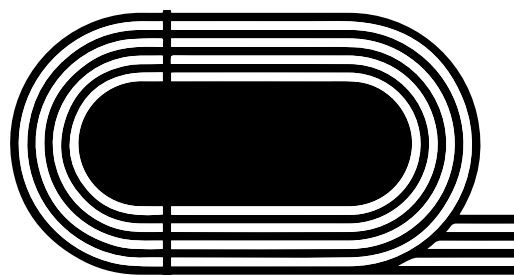
w Katarze, gdzie odbędą się mistrzostwa świata w piłkę nożną, zaprojektowano gigantyczne, klimatyzowane stadiony – inaczej piłkarze nie daliby rady grać w temperaturze ponad 40°C. Kto bogatemu zabroni?



Czy w twoim mieście, miejscowości jest stadion? Może „Orlik”? Czy znasz ten obiekt? Podejź, zobacz z bliska jak wygląda. Jakie sporty mogą być tam uprawiane? Spójrz na ten obiekt matematycznym okiem. Jakie figury zauważasz?

## □ Geometria na stadionie lekkoatletycznym

Człowiek od zarania gonił za zwierzyną, polował na dzikiego zwierza, czyli biegał, skakał, rzucał kamieniem, zastrzonym kijem. Od naturalnych dyscyplin rozpoczęła się przygoda ludzkości ze sportem – pierwszą konkurencją na starogreckiej olimpiadzie był bieg krótki, potem rozgrywano też konkurencje w rzucie dyskiem, skoku wzwyż. Lekkoatletyka to wspólna nazwa dla wielu dyscyplin sportowych wywodzących się z naturalnego ruchu, przy użyciu naturalnych akcesoriów, dziś zastąpionych już przez technologiczne rozwiązania. Skoki przez przeszkodę zastąpił bieg przez płotki, rzut kamieniem – rzut kulą czy dyskiem, rzut kijem – rzut oszczepem, w biegach na różne dystanse człowiek wciąż zmagają się sam ze sobą.



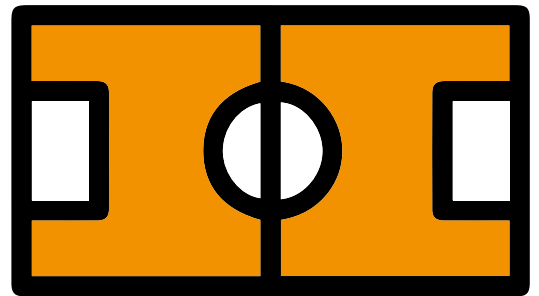
Przyjrzyj się, jak wygląda współczesny stadion lekkoatletyczny. Zobacz, ile tam kształtów geometrycznych, jak są wzajemnie ułożone, jakie role odgrywają. W czasie jednych zawodów stadion gości sportowców startujących w licznych konkurencjach – jedni biegają, inni skaczą, jeszcze inni rzucają. Stąd konieczność harmonijnego i bezpiecznego pomieszczenia i połączenia różnych funkcji.

- Czy wiesz, do czego, do jakich konkurencji służą poszczególne elementy?
- Jak daleko człowiek jest w stanie rzucić kulą, oszczepem, dyskiem (jak długie muszą być pola, gdzie lądują?)

- Ile metrów mają tory do biegu i czy wszystkie są tej samej długości?
- Na jakich dystansach rozgrywane są biegi? Jaki dystans pokonuje się po prostej, a od jakiego biegacza biegają po łukach?
- Jak niweluje się różnice w długości poszczególnych torów?
- Dlaczego linie odległości na torach rzutów mają kształt kolisty?
- Z którego miejsca na trybunach widać najlepiej?

## □ Skan boiska

Boiska specjalistyczne, na których rozgrywane są gry zespołowe, korty tenisowe, lodowiska do hokeja też są ciekawe – na każdym z tych obiektów jest wiele linii, pól, pełniących określone w regulaminach role.



Żeby się zorientować, o co chodzi w grze i na boisku, na korcie, trzeba poznać regulamin. Dziwnie się kibicuje, gdy nie wiadomo, co się dzieje, dlaczego decyzje sędziego są takie, a nie inne. Jeżeli masz ulubioną dyscyplinę, zainteresuj się i pogłęb wiedzę. O co pytać? Odpowiednio do dyscypliny:

- ile metrów powierzchni ma boisko,
- jaka jest jego długość i szerokość (ewentualnie ile to kroków w przybliżeniu),
- jaka jest wielkość bramek (długość, szerokość, wysokość), na jakiej wysokości zawieszona jest siatka, kosze (ewentualnie możesz te wielkości przymierzyć do swoich możliwości),
- jakie figury geometryczne są wyrysowane na powierzchni i czemu służą (punkty, linie, trójkąty, okręgi, prostokąty...),
- jaka jest odległość między liniami funkcyj-

”**Chodzi o to, żeby strzelić jedną bramkę więcej od przeciwnika**

Kazimierz Górski

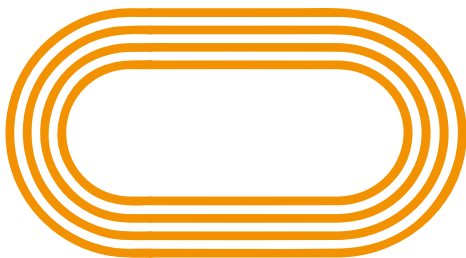




- nymi, na trwałe naniesionymi na boisko,
- jaka jest odległość od punktu, z którego wykonuje się rzuty karne, do bramki,
- jaką odległość średnio pokonują zawodnicy w czasie meczu,
- itd.

## □ Równe szanse

Bieżnia na stadionie to owalny pas okalający boisko, 8 równoległych torów, po których biega biegacze, ale... każdy tor ma inną długość. Wewnętrzny jest najkrótszy, ma długość 400 metrów. To trochę komplikuje. Co z tym zrobić? Nie ma problemu nie do rozwiązania – szczególnie gdy odwołamy się do matematyki, geometrii.



Czy wiesz, jak rozwiązany został problem długości toru, by wszyscy biegacze mieli do pokonania równy dystans? Najpierw pomyśl. Może jakiś dobry pomysł wpadnie ci do głowy? Może wykorzystasz kawałki tasiemki, sznurka, żeby zrobić domowy model stadionu i bieżni, i wpaść na pomysł? Zawsze możesz obejrzeć zawody lekkoatletyczne, chodzi o biegi na 400, 800 metrów. Popatrz. Wnioski potwierdź na tasiemkach. Już będziesz wiedzieć, jak to działa. Przy okazji zawodów:

- zauważ, na jakich maksymalnie dystansach lekkoatleci biega prosto, każdy po swoim torze,
- zorientuj się, jak jest rozwiązany problem startu z torów o różnej długości na średnich dystansach,
- a co zauważysz na starcie biegów na dłuższe dystanse?

## □ Specyfika skoków

Skoki są naturalną formą aktywności człowieka, dzieci podskakują non stop, z wiekiem skaczemy coraz rzadziej. Mówimy o skoku na głęboką wodę, o skoku na kasę, o podskokach z radości. Ciekawostką jest, że smutny człowiek nie jest w stanie podskoczyć. Gdy zobaczysz, że ktoś jest smutny, poproś, żeby podskoczył, od razu się uśmiechnie. Sprawdź ;).

Przypomnij sobie wszystkie skoki w dyscyplinach sportowych. Nie zapomnij też o wyskokach, podskokach, na przykład w grach zespołowych, łyżwiarstwie figurowym, gimnastyce. Podglądaj mistrzów, zobacz, jak te skoki są różne, jakie odmienne mają tory lotu ciała.



Skoki dla przykładu:

- do wody
- na nartach, na snowboardzie
- do kosza, do siatki
- w dał, wzwyz, o tycze
- na łyżwach
- podskoki z radości i inne...

## □ Tajemnice biegu

Czy teza, że najpopularniejszym sportem uprawianym przez miliony jest bieganie, czyli jogging, mogłaby być prawdziwa? Być może, wystarczy się rozejrzeć, by zobaczyć, że bieganie naprawdę jest bardzo popularne. W wydaniu amatorskim można po prostu podbiec do autobusu albo biegać na poważnie, regularnie, z wiedzą o technice biegu, w dobrze dobranym obuwiu, zbierając dane o biegu (są urządzenia, które mierzą mnóstwo parametrów i przekazują informacje o biegu i parametrach biegacza). Zawodowcy specjalizują się w biegach – jedni biegają na krótkie dystanse, to sprinterzy, inni są najlepsi na średnich dystansach, jeszcze inni na długich, to długodystansowcy, wśród nich maratończycy (biegają na dystansie 42 195 metrów). Dla wielu amatorów przebiegnięcie maratonu jest wyzwaniem i celem życia. Biegać można przez bez względu na wiek, przez cały rok, przy każdej pogodzie, po plaży, po górach, po mieście, a zimą można też biegać na nartach, na łyżwach. Co kto lubi, co komu wychodzi. Biegi mają miłośników i tajemnice.



Co sprawia, że jedni biegają szybciej (sprinterzy), a inni mają większą wytrzymałość (długodystansowcy)? Pomyśl o tym matematycznie. Co ma znaczenie?

Do rozważenia:

- budowa ciała
- waga zawodnika

- długość kroku
- siła odbicia
- symetryczna, wahadłowa praca rąk?
- coś jeszcze?

## □ Anatomia rzutu

Każde dziecko, rzucając cokolwiek, wcześniej lub później zadziwia się: „Ale śmiesznie, cokolwiek rzucę, spadnie na ziemię”. Taka jest istota rzutu – wszystko spada na ziemię. To grawitacja. Pytanie: jak daleko spadnie? Jaki będzie tor rzutu? Od czego to zależy? Kiedyś przyjdzie czas na naukową anatomie rzutu – zajmiesz się tym tematem na lekcjach fizyki. A na razie, wiele się dowiesz, domyślisz, ćwicząc rzuty.

Wykorzystaj sytuacje, gdy rzucasz piłką. To też sport. Do kosza, w zabawie z psem, w grze w zbiłką, do kolegi na plaży, piłką palantową, piłką do żonglerki, gdy kulą zbijasz kręgle czy grasz w bule (świetna gra rodzinna, namów rodzinę na rozgrywki), gdy grasz w tenisa lub ping-ponga. Za każdym razem twój rzut jest inny. Inny masz cel, nadajesz piłce inny tor. Poobserwuj tor lotu piłek. Poszukaj zależności między siłą rzutu, kierunkiem (kątem, pod jakim wyrzucasz piłkę) a odległością, na którą doleci i torem jej lotu. Zbierzesz fascynujące dane i na pewno wyciągniesz prawidłowe wnioski.

## □ Liga liczy

Wiele dyscyplin sportowych ma swoje „ligi”. „Liga” to grupa drużyn zakwalifikowanych do sportowej rywalizacji w określonych grupach. Piłka nożna jest sportem narodowym, każdy się interesuje, a jak nie – jego strata. Cały sezon to obliczenia – kto wygrał, kto przegrał, kto ma ile punktów, komu ile brakuje, kto ma najwięcej i jest mistrzem, kto ma najmniej i spada z ligi. Czasami życie stawia kibiców przed karkołomnymi szacunkami – jeśli drużyna A przegra z B co najmniej 2 bramkami, a C zremisuje z D, to być może drużyna E zachowa jeszcze na coś szanse. Za mecz wygrany – 3 punkty, za remis 1. Porażka za 0 punktów. Do tego mnożenie – bramki na wyjeździe liczy się za dwie. Trzeba liczyć. Profesjonalne tabele dostępne są przez internet, ale może prawdziwy kibic kontrolnie powinien prowadzić własne rachunki?

W ramach ćwiczenia zaproponuj rodzinne zrobienie tabeli konkretnych rozgrywek. Czy to będą rozgrywki piłkarskie? Liga polska, angielska, hiszpańska... A może impreza międzynarodowa, np. kolejne Euro albo mundial? Nie lubisz piłki nożnej? Wybierz sport, który najbardziej lubisz i sprawdź, jaka forma notowania wyników obowiązuje w tej dyscyplinie.





## □ Drzewko rozgrywek

Rozgrywki gier zespołowych odbywają się na różnych zasadach, najczęściej w systemie każdy z każdym lub w systemie pucharowym albo mieszanym. Na przykład: rozgrywki ligowe w piłkę nożną odbywają się na zasadzie każdy z każdym (w dodatku podwójnie: mecz i rewanż), ale cykl rozgrywek Euro czy mundial odbywa się w systemie mieszanym, w dwóch etapach – najpierw w eliminacjach każdy z każdym, a potem turniej właściwy w systemie pucharowym. System pucharowy jest wygodny, gdy jest wiele drużyn albo zawodników, a zawody trzeba przeprowadzić szybko. Zasada jest prosta – najpierw zawodnicy, drużyny są rozstawieni, czyli każdy dostaje swój numer (tak też organizowane są rozgrywki tenisowe). Potem grają w parach wynikających z rozstawienia, które obrazuje jasna, logiczna ścieżka rozgrywek zwana drzewkiem albo drabinką.

Narysuj drzewko rozgrywek. Niech to będzie na początek 16 drużyn, zawodników. Wprawisz się w robieniu drabinki, lepiej zorientujesz się w systemie, w przyszłości lepiej ogarniesz logikę takich rozgrywek. Po drodze odpowiesz sobie na kilka pytań:

- czy w tym systemie musi być parzysta liczba drużyn/zawodników?
  - jaka jest minimalna liczba drużyn/zawodników, żeby można było rozegrać rozgrywki?
  - czy każda parzysta liczba drużyn/zawodników jest odpowiednia?
  - co zrobić, gdy drużyn/zawodników nie ma do pary?
  - co zrobić, gdy drużyn/zawodników jest za mało, aby na starcie wypełnić drabinkę?
  - na jakim etapie mówimy o ćwierć finałach, półfinałach, finale?
- Być może jeszcze jakaś kwestia zwróci twoją uwagę. Szukaj odpowiedzi.

## □ Piłka jako temat

Każde dziecko ma, miało piłkę w rękę, niejedną, do różnych celów. Jest dużo konkurencji sportowych, w których piłka jest niezbędna – w poszczególnych dyscyplinach wykorzystuje się różne piłki. Wystarczy przejść między półkami w supermarkecie sportowym, żeby zobaczyć, jak bogata jest oferta piłek, i nie chodzi o kolory, ale o przeznaczenie.



Dla rozgrzewki zbierz wszystkie piłki, które masz w domu. Jak chcesz, wykonaj trudniejszą pracę – wypisz, narysuj, przeanalizuj specyfikę jak największej liczby piłek używanych w sporcie. Ciekawe, ile różnych piłek odkryjesz?

Czy wszystkie mają podobny kształt? Jakie mają kształty? Czy są jakieś nietypowe?

Jak są wykonane? (to jest zadanie na wskroś matematyczne)

Uszereguj je według wielkości, ale możesz ułożyć je według dowolnej reguły.

„**Piłka jest okrągła, a bramki są dwie**”

Kazimierz Górski

Zważ swoje piłki. Ile ważą? Gdy dotrzesz do informacji o wadze profesjonalnych piłek, możesz je uszeregować, a przy okazji np. policzyć, o ile cięższa jest najcięższa od najlżejszej.

## □ Statystyki

Statystyki nie wygrają za nikogo meczu ani nie dodadzą sił sprinterowi. Ale we współczesnym profesjonalnym sporcie wszystko się liczy – dosłownie, wszystko jest policzone. Każdy klub sportowy bez względu na dyscyplinę sportu zatrudnia analityków, którzy analizują wyniki swoich sportowców, kandydatów na zawodników, konkurentów, mistrzów. Realizatorzy transmisji telewizyjnych dbają, żeby widzowie nie tylko śledzili zmagania sportowe, ale mieli jak najwięcej danych dodatkowych – która drużyna ile czasu miała piłkę, z jaką prędkością tenisista serwuje piłkę, z jaką prędkością narciarz pokonał odcinek zjazdu, ile kroków stawia skoczek w dal na rozbiegu, jaki był czas reakcji żużlowca na starcie. Ogólnodostępne serwisy internetowe i aplikacje dostarczają mnóstwo zebranych i pogrupowanych danych, gotowych do analiz i gotowych analiz. Nikt tego nie ogarnie, ale prawdziwi kibice starają się być na bieżąco. A trenerzy mają tajne źródła i archiwa, na podstawie których budują strategie, taktyki zawodów.

Masz ulubioną dyscyplinę, drużynę, zawodnika, klub, imprezę sportową (np. turniej Wielkiego Szlema w tenisie, Turniej Czterech Skoczni)? Dotrzyj do statystyk, to nie będzie trudne. Popatrz, jakie są tematyczne zestawienia, co się porównuje, jakie są wyniki. Przed jednym czuj się ostrzeżona/ostrzeżony – śledzenie statystyk wciąga.

## □ Rodzinne rekordy sportowe

Czy macie jakąś ulubioną rodzinną dyscyplinę sportu, aktywność fizyczną, którą uprawiają wszyscy domownicy? Co to jest? A może każdy lubi coś innego? Czy macie swoje rekordy?

Popytaj rodziców, dziadków, w jakich sportach byli najlepsi, gdy byli młodzi, może pamiętają, jakie były ich rekordy w młodości? Może ustalicie domową listę rankingową z rekordami?

## □ Wiele w jednym

Czyli gra w bule, gra dla każdego – od pięcioletka do stulatka. Gra, która ma same zalety: można zagrać bez przygotowania (często debiutanci osiągają zaskakująco dobre rezultaty), rozwija celność, jest pretekstem do spotkania towarzyskiego i wspólnego spędzania czasu, niepostrzeżenie wciąga w świat taktyki i strategii, no i jest nieustającym polem do popisu dla matematycznych sprawności. Gra najpopularniejsza jest we Francji, szczególnie w Prowansji, gdzie na placykach w każdym miasteczku popołudniami zbierają się sąsiedzi, by wspólnie spędzić czas, grając i rozmawiając. Gra w bule czeka na wpisanie do grona dyscyplin olimpijskich.





Zostań rodzinnym, towarzyskim animatorem (to ktoś, kto inicjuje i prowadzi działania sportowe, kulturalne) i zachęć grono do gry w bule. Potrzebne są specjalne kule, ale łatwo je kupić w sklepach sportowych. Gra polega na rzucaniu metalowymi kulami do małej kulki zwanej świnką. Kto po ostatnim rzucie ma bułę najbliższą świnki, zdobywa punkt lub punkty. Szczegółowe zasady gry znajdziesz w internecie.

Co matematycznego trzeba/można robić w czasie każdej rozgrywki w bule?

- ćwiczyć wyczucie odległości, rzucając świnkę na określoną odległość – świnka nie może być za blisko ani za daleko (między 6 a 12 metrów),
- ćwiczyć w praktyce rozumienie i przewidywanie toru lotu metodą prób i błędów, w różnym terenie, w odmiennych sytuacjach,
- ćwiczyć trafianie w punkt, a jest do czego dążyć, bo mistrzowie wybijania trafiają z odległości ponad 6 metrów bułę w bułę nawet 996 razy na 1000 rzutów. Czyli mają prawie 100% skuteczności.
- doskonalić technikę rzutu, wybierając optymalną siłę, kierunek, kąt i technikę,
- szacować prawdopodobieństwo sukcesu wybranej taktyki (to czasami jest naprawdę poważne wyzwanie),
- kontrolować odległość bul od świnki i ustalać, która kula jest najbliższa świnki (można szacować, oceniać geometrycznie, mierzyć odległość różnymi przyrządami, np. miarką),
- liczyć punkty swoje i przeciwnika,
- grając w dwu- lub trzyosobowych zespołach, współpracować, mając przekonanie, że wspólne działanie to nie matematyka, tutaj 1+1 to więcej niż 2, a 1+1+1 to więcej niż 3.

## □ Szachy, brydż, bilard

Dla tych, którzy nie lubią się ruszać, jest dobra nowina: sport można też uprawiać, nie wstając od stołu, grając przy stole (ale tym razem nie chodzi o grę w ping-ponga ani o tenis stołowy, ani o piłkarzyki). Jakie to dyscypliny? Jest kilka propozycji, np. szachy, brydż, bilard, każda gra inna, a wszystkie mocno związane z matematyką.



To tylko propozycja – jak będzie okazja, spróbuj zagrać w każdą z nich, a nuż któraś przypadnie ci do serca najbardziej, chociaż możesz być mistrzem we wszystkich. Grasz, bawisz się, rywalizujesz, a przy okazji ćwiczysz komórki mózgowie. Logiczne myślenie, przewidywanie następnego kroku przeciwnika (albo wielu kroków), budujesz scenariusze, rozważasz opcje, podejmujesz ryzyko. Grając w bilard, ćwiczysz pewność ręki i z czasem dochodzisz do perfekcji w idealnym uderzeniu bil. Mistrzowie zaczęli w twoim wieku!

## □ Kąty odbicia w sporcie

Jedną z podstawowych reguł fizyki jest twierdzenie: „Kąt padania równa się kątowi odbicia”. To nie jest takie proste i w praktyce bywa różnie.

Czy wiesz, które dyscypliny sportowe bazują na kątach odbicia od powierzchni, od bandy, od innej piłki? Zwróć uwagę na odbicia piłki lub innych kształtów biorących udział w grze – w różnych sportach, w różnych środowiskach, różnie. Popatrz pod tym kątem (nomen omen) – jak zachowuje się piłka (lotka, krążek, kula)?

- gry zespołowe: koszykówka, siatkówka, piłka nożna, piłka ręczna, piłka wodna...
- tenis ziemny, tenis stołowy,
- badminton,
- curling, bule,
- hokej na lodzie, na trawie.

## □ Symbol olimpijski

Każdy wie, że symbolem olimpijskim są koła. Pięć kół, każde w innym kolorze.



Przyjrzyj się, jak się przeplatają. To rodzaj węzła.

Pytanie dodatkowe, niezwiązane z matematyką: Czy wiesz, co symbolizują koła olimpijskie?

## □ Tablice wyników

Co dyscyplina, to inna tablica wyników. Kiedyś wyniki były zapisywane kredą na tablicy albo przekładało się tabliczki, by wynik był widoczny dla wszystkich. Sędziowie podnosili tabliczki z odpowiednimi notami. Dziś wszystko odbywa się elektronicznie, nawet najbardziej skomplikowane obliczenia (np. w skokach narciarskich) są podawane w mgnieniu oka i niepodważalne.







Przy okazji zwróć uwagę na tablice z wynikami znajdujące się na miejscu zmagani sportowych, na oprawę graficzną transmisji – paski, informacje, statystyki. Niektóre relacje są naprawdę niesamowite. Realizatorzy podają międzyczasy z kosmiczną dokładnością (bobsleje), grafy kroków zawodników (np. w tenisie), wykresy porównują torę nart na stoku zjazdowym, kamery oddają sytuację biegaczy na mecie, specjalne urządzenia w powiększeniu i w zwolnionym tempie pokazują, gdzie upadła piłka. Czasami chodzi o milimetry, ułamki sekund. Na tym polega współczesny sport. Wygląda na to, że matematyka rządzi.

## ☐ Zakłady sportowe

Sport polega na emocjach – kto wygra, kto przegra. Zanim nie wybrzmi ostatni gwizdek, zanim ostatni zawodnik nie dotrze do mety, nic nie jest pewne. W każdej dyscyplinie są rankingi, budowane na podstawie dotychczasowych wyników – ale w sporcie nic nie jest na 100 procent. Faworyt może się potknąć, może pojawić się tak zwany „czarny koń”, czyli zawodnik, który wygrywa, mimo że nikt na niego nie stawiał. I to jest urok, piękno sportu. Emocje rosną, gdy kibice obstawiają zwycięstwo – kto tego nie lubi? Ktoś stawia na wygraną zawodnika A, inny na B. Wygrywa C. Ktoś obstawia wynik meczu: 2:0, inny 1:1, mecz kończy się rezultatem 3:2. Ktoś wygrywa, ktoś przegrywa. To kwestia statystyki i prawdopodobieństwa. Teoretycznie im więcej ktoś wie o sportowcach, o dyscyplinie, tym ma większe szanse na trafienie, ale to teoria. Głośno było o sukcesach ośmiornicy, która nad podziw trafnie typowała zwycięzców kolejnych meczów piłkarskich rozgrywanych na najwyższym światowym poziomie. Przypadek? Los?



Przy okazji sportowych zmagani zaproponuj domowe zakłady. Niech każdy z domowników obstawi wynik, zgłosi, kto jej/jego zdaniem wygra w zawodach. Nagrodą może być uścisk dłoni, pyszne ciasto dla zwycięzcy, najważniejsza będzie satysfakcja. Bezcenne uczucie.

## ☐ Co się liczy?

Ile dyscyplin, tyle systemów liczenia ostatecznego wyniku. I znowu, co się przydaje? Matematyka. Raz to będzie pojedynczy wynik albo

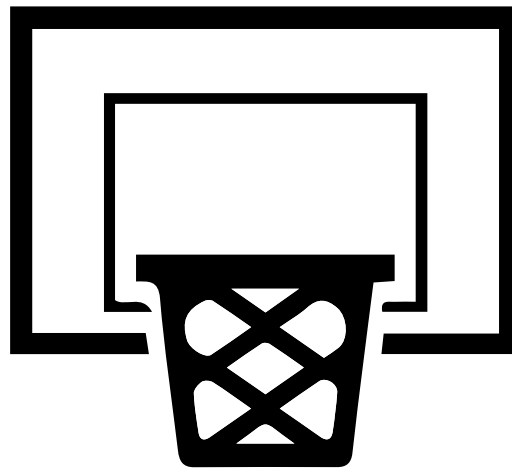
suma kilku, może być suma, ale bez wartości skrajnych, innym razem średnia wyników albo punkty dodawane za każde pozytywne wydarzenie lub odejmowane za błąd. W wielu dyscyplinach liczy się po prostu kto szybciej, wyżej, celniej. Oczywiście na końcu wszystko zawsze sprowadza się do przyznania trzech miejsc medalowych: miejsce 1 – złoty medal, miejsce 2 – srebrny medal, miejsce 3 – brązowy medal. Najgorsze miejsce? 4. Było blisko, ale sportowiec nie wejdzie na podium. Szkoda.

Naprawdę trzeba być fanką/fanem sportu, żeby znać się na wszystkich dyscyplinach. Ciekawe, czy wiesz (zaproś rodzinę do wspólnej zabawy), z jakimi dyscyplinami można powiązać takie wyniki (na różnym etapie meczów, zawodów)?

- 1:0
- 3:2
- 15:40
- 28:32
- 7:2
- 23:25
- 11:13

## ☐ Celność rzutów

Ćwiczysz komórki mózgowe, ale czasem trzeba się ruszyć, przy okazji możesz się czegoś nauczyć.



Zmierz się z zadaniem naukowym, ale wymagającym ruchu, najlepiej na świeżym powietrzu. Zgromadź kilka różnych piłek – o różnej wielkości, różnej wadze, wykorzystaj to, co masz (mogą też być szyszki, kłębek skarpetek, rolka papieru toaletowego). Wyznacz cel – to może być kółko narysowane na ziemi, obręcz, kosz na śmieci, sztuczna torba. Rzucaj do celu i obserwuj.

## ☐ Rekordy Naj...

Nie ma mowy o sporcie bez rekordów. To chyba najbardziej naturalna dla rekordów dziedzina życia, bo w sporcie zawodowym wszystko robi się nie tylko po to, by pokonywać swoją słabość czy być lepszym od innych zawodników, ale by bić rekordy. Pamiętaj motto olimpij-

skie: citius-altius-fortius, czyli szybciej-wyżej-silniej. To bazowe kryteria, ale o zwycięstwie decydują też inne czynniki, w różnych dyscyplinach kryterium może być też: celniej, dalej, zręcznie, pięknie, trudniej (są dyscypliny, w których sędziowie przyznają oceny za wartość artystyczną i techniczną).

Poszukaj rekordów. Nie musisz być ekspertem w każdej dziedzinie, ale o ulubionej warto wiedzieć więcej. Możesz zebrać dane i zrobić rodzinną zgaduj-zgadulę. Ciekawe, kto okaże się mistrzem wiedzy o wynikach i rekordach sportowych?

## ☐ Symetria w sportach

Symetria ciała sportowca jest istotna, ale sporty uprawiają też sportowcy niepełnosprawni, dla których organizowane są równie ważne i emocjonujące zawody. Pokonywanie własnych słabości i osiąganie wybitnych wyników budzi najwyższy podziw.

Zastanów się, w których sportach symetria ciała jest kluczowa, w których ma mniejsze znaczenie?

## ☐ Liczby w sporcie

Nie brak konkurencji sportowych, które wiążą się z liczbami, w przeróżny sposób.

W sportowej atmosferze zaproponuj zabawy:

- zrób rodzinny konkurs, kto wypisze najwięcej skojarzeń sportu z liczbami. Skojarzenia mogą być rozmaite z różnych dyscyplin.
- zrób quiz z nagrodami, zadawaj pytania o liczby w sporcie (np. w jakiej dyscyplinie występuje dwójka podwójna, ilu zawodniczek/zawodników może być w jednym momencie na boisku w meczu siatkówki, ile metrów ma dystans pokonywany w biegu maratońskim, turniej ilu skocznicy rozgrywany jest co roku w okolicach Nowego Roku, jakie dyscypliny wchodzi w skład triathlonu, ile metrów ma basen olimpijski, ile zawodników jednej drużyny biegnie w sztafecie 4 x 100 metrów, jaki dystans ma bieg z przeszkodami, ile waży kula...).

Mniej zainteresowani sportem domownicy mogą stawiać opór, musisz to zrozumieć, widocznie mają inne zainteresowania.

25 6  
8 2 11



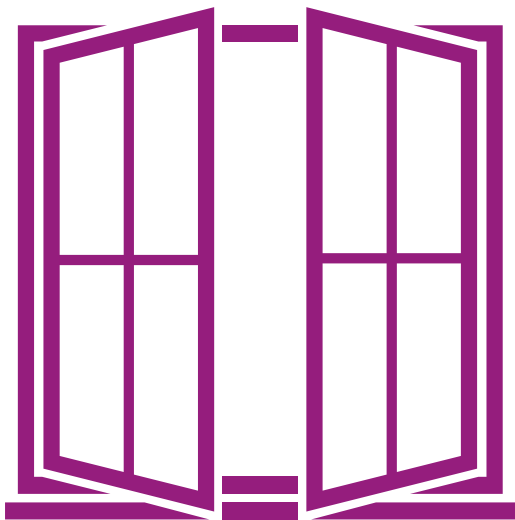


# Sztuka – inspiracja, natchnienie i... praktyczne patenty

Czy są dwie dziedziny równie odległe jak matematyka i sztuka? Matematyka, zakodowana we wszechświecie, logiczna, nieuznająca odstępstw, ma swoje żelazne reguły, niezawodne, niepodważalne, uniwersalne. Nie było człowieka, była matematyka. Światem odwiecznie rządzą prawa natury, zgodne z regułami matematycznymi, które ludzie odkrywają krok po kroku, badają, opisują. I wszystko się zgadza! Czym jest sztuka? Nie ma ścisłej definicji, nie da się ująć w ramy, prościej sformułować oczekiwania: ma zachwycać, wzruszać, wstrząsać. Taka jej istota. Sztuka to dzieło ludzkiej twórczości, bez ludzi nie istnieje i jest niezbędną potrzebą człowieka. Rodzi się w ludzkiej wyobraźni, daje upust ekspresji. Szalona, wymykająca się schematom, wolna, nieokiełznana. Co je łączy? Piękno! Co ciekawe i mało znane – w starożytności i średniowieczu logika, arytmetyka, geometria były studiowane jako jedne z siedmiu sztuk wyzwolonych, wraz z gramatyką, retoryką, astronomią i muzyką. Sięgając więc do mądrości przodków, można by postawić tezę: matematyka to sztuka. Kto to wie? Pewność mają matematycy, którzy w swoim gronie ekscytują się pięknem matematyki, pięknem dowodów.

## □ Co widzisz przez okno

Żyjemy wśród budowli, zaprojektowanych przez architektów, po ulicach jeżdżą samochody, których formy wyszły spod ręki projektantów, jesteśmy otoczeni meblami, chodzimy w ubraniach, czytamy książki – te wszystkie przedmioty zostały zaprojektowane. Architektura, wzornictwo przemysłowe to rzemiosło, ale też sztuka. A może odwrotnie?



Wyrzyj przez okno, rozejrzyj się po mieszkaniu (ale to pomysł na ciągłą i baczłą obserwację otaczającego świata, gdziekolwiek będziesz). Zadaj sobie pytanie: Co widzisz?

- Czy masz luźne skojarzenia z matematyką?
- Coś ci przywiodła na myśl kształty, kąty, proste, bryły, proporcje?
- Czy to, co widzisz, podoba ci się? Dlaczego tak? Dlaczego nie?
- Czy to, co widzisz, uważasz za piękne? Dlaczego tak? Dlaczego nie?
- Czy jest harmonijne? Dlaczego tak? Dlaczego nie?

” **Zgłębiaj naukę, która jest sztuką, i sztukę, która jest nauką**

Leonardo da Vinci

## □ Wycucie i ocena

Z dziełami ponadczasowymi z reguły jest tak, że podobają się wszystkim (jak zawsze trzeba pamiętać o rozkładzie normalnym i krzywej Gaussa, czyli wiadomo, że statystycznie znajdują się tacy, którzy będą mieli odmienne zdanie). Większość dzieł minionych epok uznajemy za piękne. O gustach – wiadomo, nie dyskutuje się. Każdemu może podobać się coś innego, ale są cechy obiektów, które sprawiają, że niezależnie od gustu ludzkie oko postrzega je obiektywnie jako atrakcyjne. Czy to piramida w Gizie, kartka papieru czy długość spodni – są obiektywnie harmonijne albo nieharmonijne w formie.

Żeby odpowiedzieć na pytania – co mi się podoba, co uważam za piękne, co jest harmonijne – nie musisz mieć żadnego wykształcenia, wiedzy o teorii sztuki. Chodzi o twoje odczucia, one są ważne bez względu na to, ile masz lat. Patrzysz i oceniasz. Masz nauczyć się patrzeć i nie bać się oceniać. Z czasem będziesz w stanie uzasadnić swoją opinię, poznasz kanon piękna, klasyki, wyrobisz sobie zdanie. Ale już dziś, na-

wet jeśli masz niewiele lat, możesz szukać we wszystkim złotego stosunku, czyli tej szczególnej pięknej i harmonijnej proporcji, podziału.

## □ Złoty podział

Jeżeli coś jest uznane od wieków za najpiękniejszą proporcję, to jak twórcy, artyści sprzed wieków mogli zignorować ten fakt? Nie mogli. Sztuka i estetyka tworzą nierozzerwalną parę, zatem złote proporcje dla ówczesnych twórców były gwarancją piękna i harmonii. Tajemnicą pozostanie, czy sięgali po złoty podział świadomie, czy podpowiadała im to intuicja. Bez znaczenia, ważne, że podążali bezpieczną drogą, ich dzieła są ponadczasowe, bronią się do dziś piękną i harmonijną formą. A jak jest z powstającymi współcześnie obiektami?

Naucz się skanować wszystko pod kątem (chodzi o przenośnię) złotego podziału. Coś ci się podoba? Coś się nie podoba? Przeanalizuj, czy trzyma złote proporcje, czy też nie. To będą





twoje badania, z których wyniknie wniosek – czy zgadzasz się, że złoty podział gwarantuje harmonię i piękno, czy raczej niekoniecznie. Jakie są metody?

- Gdy możesz zmierzyć wymiary, np. książki, obrazu, odległość między jakimiś elementami – zmierz i podziel zgodnie z regułą. Jeśli stosunek wyniesie około 1,618 lub 0,618 (zależy, jak ustalisz stosunek), jesteś w domu. Masz to.
- Gdy coś jest duże, znajduje się daleko, pozostaje ci szacunek na oko, tu wyczucie będzie niezbędne. Możesz odmierzać złoty stosunek na rozstawionych palcach – robisz kąt prosty między kciukiem i palcem wskazującym. Wcześniej zaznacz i zapamiętaj, gdzie kończą się odcinki odpowiadające złotemu podziałowi. I już masz złoty przyrząd zawsze przy sobie.

## I ty jesteś twórcą?

Sztuki plastyczne to rzeźba, malarstwo, rysunek, design i inne dzieła ludzkiej ręki. Podziwiamy je, oglądając reprodukcje, zdjęcia w albumach, oryginały w muzeach. Myślimy o sztuce: sztuka to dzieła wybitnych artystów. Ale sztuką mogą być też własne prace w szufladach i bazgroły w zeszytach. Wielcy także zaczęli od szkiców i domowych przyrządów. Zanim świat dowiedział się o ich geniuszu, nikt o nich nie słyszał, a niejedni przymierał głodem.



Jak myślisz – masz talent plastyczny? Kto ma talent muzyczny, śpiewa, gra, bo mu naturalnie gra w duszy. Z talentem plastycznym może być podobnie. Jeśli rysujesz, malujesz, na czym się da, tworzysz formy przestrzenne, z czego się da, to może sygnał – „Mam talent!”. Zatrzymaj się na chwilę i pomyśl o sobie jako o twórczyni/twórcy. Jeżeli masz smykałkę do sztuk plastycznych, co to jest? Co najbardziej lubisz? Co cię najbardziej angażuje? Zapisz, jaka to dziedzina: .....

Teraz uważaj – jeżeli twoją mocną stroną jest projektowanie brył architektonicznych, form przemysłowych (rakieta kosmiczna to też forma przemysłowa, i czajnik, i but), od dziś zacznij zaprzyjaźniać się z matematyką – bez niej nie zrobisz kroku dalej.

## Z wizytą w galerii (sztuki)

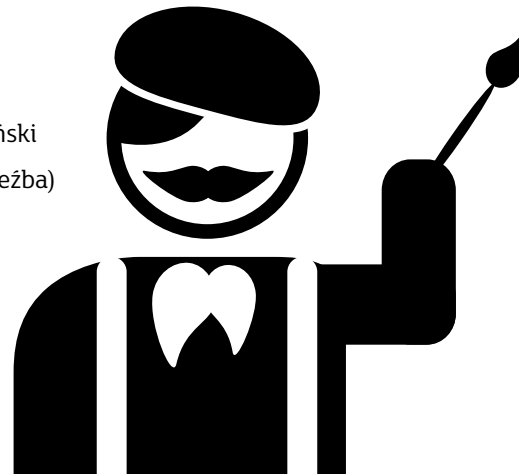
Co można namalować? Wszystko. Jedni specjalizują się w portretach, inni w pejzażach, jeszcze innych fascynuje martwa natura. Kiedyś malarstwo oddawało jedynie rzeczywistość, obecnie możemy cieszyć oczy abstrakcją, która czerpie z matematyki, geometrii pełnymi garściami.

Czy wiesz, jaki rodzaj, styl, kierunek, a jest ich wiele, malarstwa (ale też innych sztuk plastycznych) do ciebie przemawia? Zaproponuj rozmowę, wspólne oglądanie albumów, wirtualną wizytę w wybranym muzeum. Gdyby ktoś się dziwił, co to za pomysł, dzieci się tym nie zajmują, upierają się, że nie ma granicy wieku! Każdy, bez względu na to, ile ma lat, patrzy

na coś i ma zdanie. Sztuka nie jest wyłącznie dla dorosłych. Młoda osoba może nie mieć dość wiedzy, by uzasadnić swoją opinię, ale w sumie czy to konieczne? Zbadaj, na co patrzysz z przyjemnością, jakie kolory, formy, linie cieszą twoje oczy. Szukaj ulubionego artysty, dowiesz się z czasem, jaki kierunek reprezentuje. W trakcie poszukiwań zwróć uwagę na motywy matematyczne – kształt, płaszczyzna, kolor, perspektywa.

Kilka rekomendacji współczesnych twórców, dla których geometria była inspiracją:

- Piet Mondrian
- Jackson Pollock
- Władysław Strzemiński
- Katarzyna Kobro (rzeźba)
- Jo Niemeyer
- Paul Klee
- Georges Braque
- Wassily Kandinsky
- Mark Rothko
- Salvador Dali
- Pablo Picasso



## Symetria w architekturze

Większość budynków ma oś symetrii. Nie wszystkie, ale przeważająca większość. Poczynając od rzymskich akweduktów, przez łuki triumfalne, katedry, budynki ze wszystkich kolejnych epok, bez względu na wielkość i przeznaczenie, raczej mają wejście na środku, czyli na osi (w klasycznej architekturze wejście ma oprawę kolumnową, to portyk). W praktyce, znalezienie symetrycznego budynku to nie sztuka. To co jest sztuką?



Postaraj się znaleźć – na żywo lub na ilustracji, bo w twojej okolicy może to być niemożliwe – budynek o nietypowej, niesymetrycznej bryle. Coś, co wymyka się schematom. Nie jest typową kostką, domem jednorodzinnym, zwykłym blokiem, czyli prostopadłościanem. Ciekawe, jaką pełni funkcję (kościół, stadion, sala koncertowa)? Odpowiedz na pytanie, czy ci się podoba.

A może wyobrazisz sobie jakąś szaloną niesymetryczną formę. Jaką mogłaby mieć funkcję?

**„ Matematyk, jak malarz lub poeta, tworzy rozmaite desenie. Jeśli jego są bardziej trwałe od innych, to dlatego, że wykonane są z idei**





## ☐ Matematyka a emocje

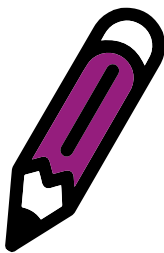
Czy matematyk ma emocje? Czy artysta może tworzyć bez emocji? A co z dziećmi? Mają budzić emocje, mają wzruszać, poruszać. Jak patrzemy na obraz matki karmiącej niemowlę, dzieci odprowadzające wzrokiem odlatujące żurawie, bukiet polnych kwiatów – pewnie większość z nas się wzruszy. A patrząc na kompozycję geometryczną, np. piramidę z kolorowych brył? Czy matematyczne motywy mogą się podobać, mogą dostarczać emocji? A może budzą inne refleksje?

Znajdź jakiś geometryczny obraz i zastanów się, jak to na Ciebie działa. Może coś zobaczysz, może poczujesz, może pomyślisz? Na pewno, pytanie co?

## ☐ Własny wzór

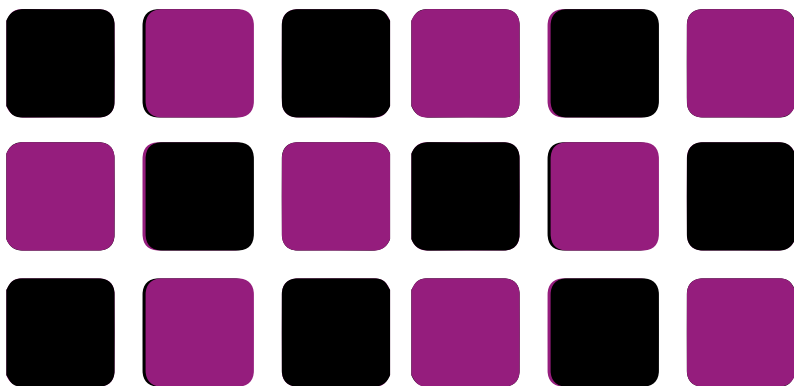
Można na kartce narysować coś, cokolwiek – kwiatek, kota, kwadrat, dom z ogrodem. To będzie wzór zamknięty – jeden obiekt albo kompozycja. Ale można zaprojektować wzór otwarty – możliwy do powtarzania, w nieskończoność. Przykładem są nadruki na tkaninach, wzory tapet, papierów do pakowania prezentów. Znamy to. Najprostsze – gwiazdki, paski, krata, łączka... Wszystko zależy od inwencji twórcy.

Weź kartkę i spróbuj zaprojektować jakiś wzór otwarty. Zdecyduj, jak duża będzie kartka, czym będziesz rysować, malować. Możesz też skorzystać z pieczętek (zrobisz je bez problemu z połówek surowych ziemniaków). Pieczątki bardzo dobrze sprawdzają się w takich projektach. Wiesz dlaczego? Bo są powtarzalne.



## ☐ Parkietaż

To słowo raczej nie pojawia się w codziennym języku, ale parkietaże spotykamy na każdym kroku. I to dosłownie, niż myślisz (parkietażami są wszelkie kompozycje kostek chodnikowych). Z czym się kojarzy to słowo? Jeżeli już, to ze słowem „parkiet”, choć mało kto dziś tak nazywa drewnianą podłogę z deszczułek. Chodzi o metodę układania powtarzalnych elementów, by pokryć całą powierzchnię. Znamy nieskończenie wiele przykładów – każda ściana, podłoga w łazience, w kuchni, klatki schodowe, halle dostarczają przykładów ułożenia płytek ceramicznych, czyli glazury lub terakoty. Jedne są mniej, inne bardziej fantazyjne. Najprostszy jest układ w szachownicę – kwadraty ułożone obok siebie, poza tym jest nieskończenie wiele różnych układów, wariantów kolorystycznych. Polskie chodniki, place, dziedzińce opanowała betonowa kostka, czy to się komuś podoba, czy nie, to też parkietaż.



Masz zadanie – gdziekolwiek zobaczysz ścianę, podłogę ułożoną w powtarzalny wzór, przyjrzyj się. Gdy zaczniesz zwracać uwagę na takie detale, odkryjesz bezmiar rozmaitych kompozycji, kształtów, wielkości elementów, różnych układów kolorystycznych. Dostrzeżesz, że niektóre powierzchnie pokryte są takimi samymi regularnymi kształtami, inne składają się z kilku wzorów, wielkości elementów. Świat już nie będzie taki jak wcześniej.

## ☐ Dorobek artystyczny

Rzemieślnicy od wieków tworzyli geometryczne wzory, kompozycje. Oko cieszą posadzki kościołów, meczetów, mozaiki naścienne i podłogowe, kobierce. Dekoracje powstawały na podstawie powtórzenia motywów, bawiono się obrotami, symetrią. Są imponujące, dech zapiera, gdy im się przyjrzeć, trudno nie docenić kunsztu, maestrii od pomysłu do wykonania. A przecież nie było internetu, nie było precyzyjnych szlifierek ani laserowych noży. Wiele wzorów przetrwało do dziś i możemy je podziwiać głównie w rejonie basenu Morza Śródziemnego, w krajach kultury arabskiej.

Warto wybrać się choćby w wirtualną podróż i obejrzeć bezmiar klasycznych wzorów wypracowanych latami przez mistrzów. Gigantyczny zbiór prawdziwych i pięknych dowodów na matematyczne związki ze sztuką zawiera księga „Ornament. Wielka kolekcja” wyd. Arkady. Znajdź, uciesz oczy, docenisz wyobraźnię twórców, wysłedzisz matematyczne wątki, może coś zainspiruje Cię twórczo.

## ☐ Krajowe obserwacje

Kunst i finezja dzieł sprzed wieków, którym współczesne rzemiosło mogłoby nie dorównać, przeszły do historii. Ale i dziś żyjemy w świecie powtarzalnych wzorów. Wszechobecna kostka brukowa, pomijając wątpliwą wartość estetyczną, może być tematem ciekawych obserwacji.

Spójrz, co masz pod nogami. Chodzisz po betonowym bruku, zauważ, ile różnych fasonów kostki depczesz, ile różnych układów można z niej ułożyć. Może zrobisz swoistą fotogalerię, przegląd parkietażu trotuarowego? Z różnych kształtów, jednolitych i łączonych. Popatrz pod nogi!

## ☐ Matematyczny aspekt

Wybrać glazurę czy terakotę i zdecydować, jak ułożyć płytki, to miłe i proste zadanie. Decydując o wyglądzie łazienki, można nie przeczuwać, że to zagadnienie zgoła matematyczne. Matematycy nie byłoby sobą, gdyby nie drążyli tematu. Ponad wszelką wątpliwość ustalili,



że jedynie z trzech wielokątów foremnych można ułożyć nieskończoną, jednorodną (cała płaszczyzna z identycznych elementów jednego kształtu) płaszczyznę – to trójkąty równoboczne, kwadraty i sześciokąty foremne. To parkietaże platońskie, nazwane tak od nazwiska greckiego filozofa. Z pięciokątów foremnych nie da się, za to jest nieskończona ilość wielokątów niefornych, którymi można pokryć płaszczyznę.

Zrób własny parkietaż. Z czegoś. Nie chodzi o idealny parkietaż, lecz o przymiarkę. Może wymyślisz nowy układ? Gdy chcesz mieć przyjemność z niezakończonego tworzenia, nie zaglądaj do internetu. Gdy zajrzysz, twoja wyobraźnia zostanie przytłoczona dorobkiem ludzkości. Tam jest ocean wzorów. Z czego można zrobić parkietaż? Wytnij z papieru dłuższe prostokąty (to będą twoje klepki) i spróbuj ułożyć jak najwięcej wzorów parkietu. Możesz bawić się też innymi kształtami, wycinać, składać z karteczek z bloczku, z kolorowych papierów, z monet o różnej wielkości, możesz rysować na papierze, złożyć ze ścinków materiału (wyjdzie patchwork), układać z puzzli, kostek domina.



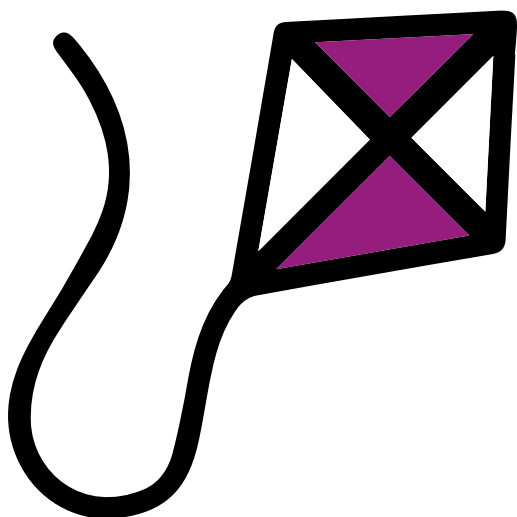


# ” Piękno polega na harmonii między częściami i między nimi a całością

Albrecht Dürer

## □ Latawce i strzałki

Brytyjski fizyk i matematyk sir Roger Penrose ma wybitne zasługi dla parkietaży. Odkrył, że płaszczyznę można pokryć dwoma rodzajami kafelków, tak zwanymi „latawcami” i „strzałkami”, bo ich kształty przypominają te obiekty.



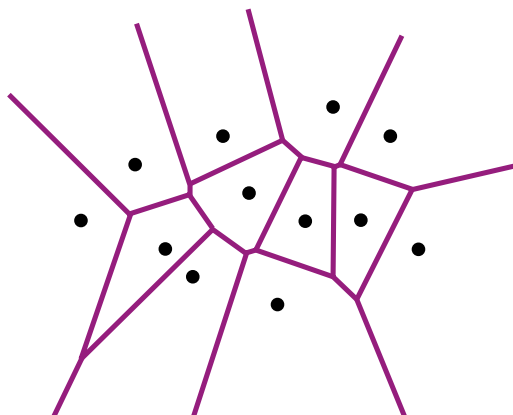
I znów przekierowanie do internetu. Zobacz, jakie kształty mają „latawce”, jakie „strzałki”. Może uda ci się wyciąć z bloczku kartek do notatek takie formy i pobawić się (albo z rodziną), układając z nich różne kształty? To świetna zabawa i lekcja dopasowania kątów. Dla inspiracji, a warto, bo układanki Penrose’a są naprawdę magiczne, zobacz, jak wyglądają np. pięciokątne parkietaże Penrose’a. Popatrz, jak to działa. Jak kafelki dopasowują się do siebie i uzupełniają nawzajem, poszukaj, ile jest osi symetrii tych kompozycji. Można się wkręcić.

## □ Praktyczny diagram i abstrakcja w jednym

Teraz mniej sztuki, więcej praktyki. Gdy potrzebujesz czegoś banalnego, idziesz do sklepu, który jest bliżej czy dalej? No właśnie. To jest jedno z praktycznych zagadnień, które pomaga rozstrzygnąć diagram Woronoja, ukraińskiego matematyka, który na początku XX wieku opisał to zagadnienie matematycznie.

Zrób to, co Woronoj.

- Weź kartkę.
- W przypadkowych miejscach raczej chaotycznie, nieregularnie narysuj na niej punkty (powinno być minimum 10, ale dla efektu lepiej, gdy będzie ich więcej).
- Teraz połącz odcinkami punkty sąsiadujące ze sobą (te linie narysuj bardzo delikatnie – mają znaczenie techniczne, pomocnicze).
- Podziel te odcinki na pół.
- Przez każdy punkt wyznaczający równą odległość między sąsiadującymi punktami poprowadź linię prostą do odcinka łączącego te punkty. To linie ograniczające komórki, wielokąty, które zaraz zobaczysz. Na ich przecięciu utworzą się wierzchołki wielokątów.
- Mocniejszą kreską pociągnij krawędzie komórek (wielokątów) – zauważ, że mają bardzo różne, nieregularne kształty. Dla każdego układu punktów układ będzie inny.
- Zrobisz to dla wszystkich punktów – otrzymasz diagram, dzielący kartkę na tyle komórek (nieregularnych wielokątów), ile punktów. Każdy punkt będzie leżał wewnątrz „swojego” wielokąta, a wszystkie pozostałe punkty znajdujące się wewnątrz tego wielokąta będą miały do tego „swojego” punktu bliżej niż do innych punktów, które były narysowane na początku.



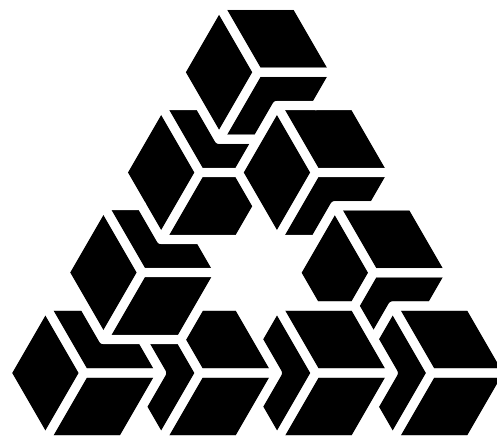
- To właśnie model, który nawiązuje do praktycznego wyboru – „Do którego sklepu mam bliżej?”. Nie wiesz, jak się do tego zabrać – zajrzyj do internetu. Możesz dia-

gram nanieść na plan okolicy (punktami będą np. sklepy) i już wiesz, do którego masz bliżej.

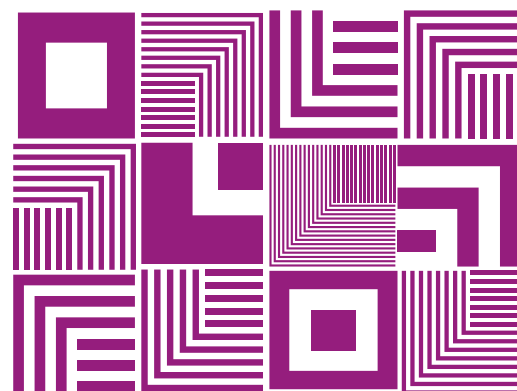
- Gdy pokolorujesz komórki (wielokąty), dostaniesz atrakcyjną abstrakcję gotową do powieszenia na ścianie. Możesz bawić się w nieskończoność, dodając kolejne punkty, zmieniając ich układy.

## □ Zabawa i sztuka

Holenderski malarz i grafik Maurits Cornelis Escher (znany jako MC Escher), żyjący w XX wieku, miał niezwykłą wyobraźnię. Zafascynowany mozaikami, jakie oglądał w Alhambrze, zaczął eksperymentować z przekształcaniami geometrycznymi obrazów, z symetrią, obrotami, przesunięciami, z zestawieniami identycznych figur. Nie da się opisać tego, co jest na jego grafikach, to trzeba zobaczyć. Ulegamy iluzji, patrząc na jego prace, nie możemy być pewni, co widzimy, autor zastawia pułapki logiczne, bawi się naszą wyobraźnią. W każdym jego dziele inspiracje matematyką rzucają się w oczy, są na pierwszym planie.



Zobacz koniecznie, reprodukcje i filmy na YouTube. Robią wrażenie. Zwróć uwagę na różne wątki:



- Złudzenia optyczne, np. czy ci ludzie wchodzą, czy schodzą?
- Nieskończoność, te same motywy coraz mniejsze i mniejsze dążą do nieskończoności, znikają na brzegu obrazu (ale domyślamy się, że znikają tylko z naszych oczu).
- Dopełnienia, np. zastanawiamy się, to ryba czy ptak?
- Przekształcenia – te same obrazy, figury obrócone wypełniają powierzchnię.





## □ Liczby jako dzieło sztuki

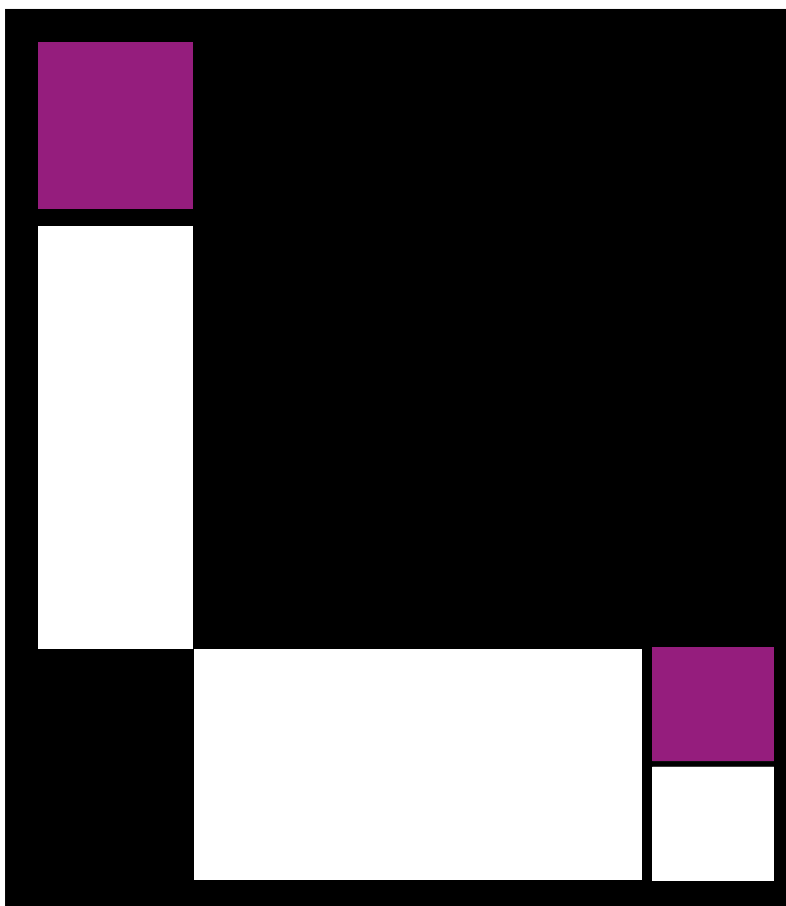
Roman Opałka, polski malarz tworzący w XX wieku, wybrał sobie nietypowe muzy do portretowania – liczby. Nie cyfry, ale liczby. Kolejne od 1 do nieskończoności. Kolejne malowane liczby odliczały czas, marzeniem artysty było dojście do siedmiu siódemek, czyli liczby 7 777 777, siedem milionów siedemset siedemdziesiąt siedem tysięcy siedemset siedemdziesiąt siedem. Uf. Według wyliczeń malarza te liczby byłyby całkowicie niewidoczne, byłyby namalowane białą farbą na białym tle, zgodnie z koncepcją malowania coraz jaśniejszych liter na coraz jaśniejszym tle. Liczby i towarzyszące im nagrania, bo autor wymawiał i nagrywał każdą malowaną liczbę, miały w zamyśle twórcy być zapisem chwil upływającego czasu. Malarz nie skończył dzieła, ostatnia namalowana przez niego liczba to 5 590 000. Jeden z jego obrazów z cyklu Opałka 1965/1-nieskończoności, sprzedany na aukcji Sotheby's w Londynie, jest najdroższym obrazem polskiej sztuki współczesnej.

7 777 777  
5 590 000

Znajdź w internecie obrazy mistrza Opałki. Przyjrzyj się. Czujesz upływ czasu? Ciekawe, jaka będzie twoja pierwsza myśl? Jak podoba ci się ten pomysł? Może to będzie inspiracja?

## □ Geometria jako dekoracja

Kompozycje holenderskiego malarza Pieta Mondriana (żył na przełomie XIX i XX wieku), który był ojcem kierunku bazującego na abstrakcji geometrycznej, są bajecznie proste. Trzy kolory, układ prostokątów i czarnych linii. A jednak jest w nich tyle magii, że świat się zachwyił i nadal czerpie z jego idei. Kto raz zobaczył, na czym polegają jego kompozycje, odnajdzie je zawsze, we wszystkim, co czerpie z tej inspiracji. A w tym stylu projektowane są tkaniny, buty, zeszyty, porcelana.



Zaprojektuj kompozycję w tym stylu. Wytnij z kolorowego papieru całość albo poszczególne elementy. Naklej na piankę lub na tekturę. Powieś w pokoju albo daj komuś w prezencie. To będzie 100-procentowa geometryczna ekspresja.

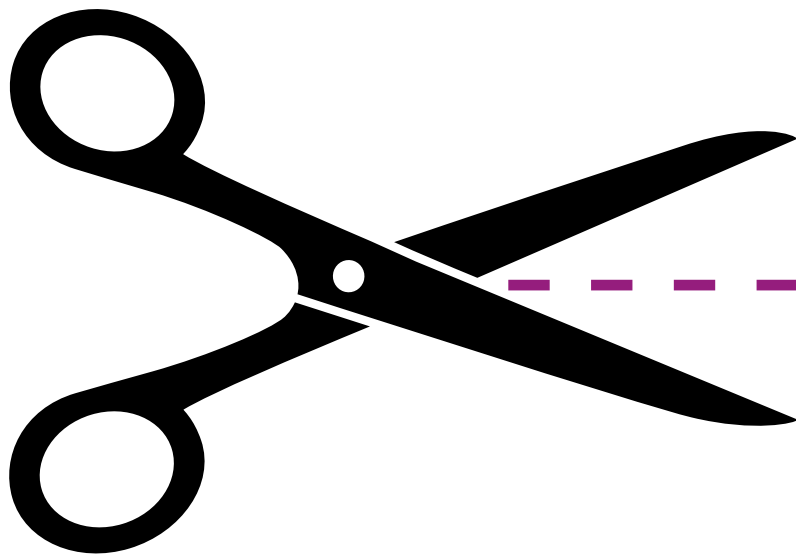
## □ Na tropie motywów

Jednym z dzieł uznawanych za matematyczne jest miedzioryt „Melancholia I” Albrechta Dürera z XVI wieku. Roi się tu od wątków związanych z przeróżnymi aspektami matematyki.

Poszukaj dzieła mistrza w internecie, powiększ i znajdź jak najwięcej matematycznych szczegółów. Ciekawe, ile wyszukasz. Możesz mieć też metafizyczne skojarzenia. Spodobało się? Trop motywy matematyczne, geometryczne w dziełach innych wielkich mistrzów.

## □ Koronkowa symetria

Właściwością wycinanek jest symetria, w dodatku mają (mogą mieć) wiele osi symetrii.



Weź serwetkę, bibułkę, cienki papier. Najlepiej w formie kwadratu, złoż na pół, jeszcze na pół, i tak dalej, dopóki dasz radę – ważne, żeby zawsze był wspólny czubek – w efekcie powstanie coś w formie trójkąta. Zaokrąglaj brzeg – dzięki temu z kwadratu wyjdzie zgrabne koło. Nożyczkami wytnij kilka niewielkich dziurek na brzegach i rozłóż. Otrzymasz idealnie symetryczną wycinankę. Ile ma osi symetrii?

A teraz możesz znaleźć i przeanalizować, jak wyglądają profesjonalnie wykonane wycinanki ludowe. Podobnie symetryczne są serwetki robione na szydełku, koronki z Koniakowa, ale to już inna sprawność, inne rzemiosło.

## □ Design

Projektanci wzornictwa przemysłowego tworzą nowe formy. Dla nich ważne są dwie strony: forma i funkcjonalność. Jedno i drugie ma ścisły związek z matematyką, geometrią. Forma nie powinna dominować funkcji, jeśli przeznaczeniem jest nie tylko dekoracja, ale i użyteczność. Użyteczność nie może lekceważyć formy, bo będzie po prostu brzydko. Co jest potrzebne? Harmonia.

Zaprojektuj nową formę użytkową. Cokolwiek to będzie, niech ma interesującą, oryginalną, nowatorską formę, kształt (nie ma sensu projektować czegoś, co już jest). Nie zapomnij o funkcjonalności, chyba że przyjmiesz konwencję, iż bezużyteczność nie ma znaczenia. To też ciekawa droga kreatywności.

- Możesz narysować projekt, czyli zrobić wizualizację.





# ” *Matematyka zawiera w sobie nie tylko prawdę, ale i najwyższe piękno – piękno chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby*

**Bertrand Russell**

- Krok dalej – możesz zrobić model trójwymiarowy w dowolnej skali, z dowolnych materiałów.
- A może dasz radę zrobić profesjonalny prototyp?
- Zadanie na długie wieczory. Spróbuj komuś zaprezentować swój projekt. Trzymamy kciuki za powodzenie. Pamiętaj – liczy się kształt. Może przyda się wiedza o złotej proporcji?

## □ **Złoty podział i geniusz**

Leonardo da Vinci. Kto o nim nie słyszał? Geniusz, wizjoner, artysta, inżynier, filozof, wyprzedził swoją epokę. „Człowiek renesansu”, czyli człowiek wielu talentów, zainteresowań. Być może był najwybitniejszą postacią świata? Tropiciele i pasjonaci złotego podziału szukają jego śladów wszędzie, gdzie się da – w dziełach starożytnych mistrzów i we współczesnej architekturze, sztuce. W dziełach Leonarda też znajdują nawiązania, a ponieważ mistrz stworzył szczegółowy opis zasad złotej proporcji, prawdopodobnie nie są to zbieżności przypadkowe.

Popatrz na obraz *Mony Lisy* (Luwr). Gdzie dostrzeżesz ślady złotej proporcji? Przyjrzyj się twarzy, którą możesz ująć w prostokąt, poszukaj złotych trójkątów, przeanalizuj kompozycję w pionie, może nałożysz na jej postać (zaczynając od nosa) kwadraty o bokach równych kolejnym liczbom z ciągu Fibonacciego (zajrzyj do rozdziału o proporcji), poszukaj wskazówek w internecie.



## □ **Człowiek witruwiański**

Leonardo da Vinci, zgłębiając tajemnice świata, przyrody, ludzkiego ciała, tworząc wizje prekursorskich na tamte czasy maszyn i urządzeń, musiał być za pan brat z matematyką. Do dziś zachowało się zaskakująco wiele jego prac, rysunków, przekrojów, opisów. Jednym z bardziej znanych dzieł jest szkic, studium anatomiczne tak zwanego „Człowieka witruwiańskiego”. Leonardo nawiązał do wcześniejszych prac rzymskiego architekta Witruwiusza, żyjącego w I w. p.n.e., który jako pierwszy zajął się proporcjami ludzkiego ciała i powiązał je z porządkiem architektonicznym. „Człowiek witruwiański” to sylwetka mężczyzny wpisana w okrąg i kwadrat. Jest uznawany za kanon piękna i proporcji, ale pamiętajmy, że to nie wzorzec metra, bo w naturze nie ma ideałów.

Masz zadania:

1. Koniecznie zobacz ten rysunek.
2. Sprawdź, czy na twoim przykładzie zgadzają się proporcje:
  - zasięg rozpostartych rąk równy jest wzrostowi,
  - wzrost równy jest 8 długościom dłoni, 6 stopom, 8 wysokościami twarzy.
3. Sprawdź, czy gdy leżysz na plecach z rozłożonymi rękami i nogami, można opisać cię okręgiem? (To ćwiczenie doskonale wychodzi na śniegu, każdy wie, bo chyba każdy choć raz w życiu robił „orzełka?”).
4. Jeśli zechcesz wydrukować ten szkic, możesz pobrać różne stosunki, zależności. Do jakich wyników dojdiesz?
5. Może znajdziesz jeszcze inne inspiracje?

## □ **Wenus i Apollo**

Chodzi o słynne starożytne rzeźby i złoty podział. Wenus z Milo i Apollo Belwederski są bardzo przystojni, ich budowa jest proporcjonalna. I co się okazuje? Proporcje ich ciał odpowiadają złotemu podziałowi, ich pępki dzielą postaci dokładnie w stosunku 1,618. Obie rzeźby symbolizują starożytne postrzeganie piękna jako symetrii i proporcji, ale pamiętajmy, że dla Greków warunkiem doskonałości było również piękno duchowe, moralne, prawda i dobro. Patrzyli na człowieka holistycznie (z greckiego holos – całość), czyli całościowo.

Znajdź zdjęcia tych rzeźb w internecie. Jak je odbierasz? Czy są ponadczasowe? Wenus z Milo można oglądać w paryskim Luwrze, Apolla w Muzeum Watykańskim w Rzymie. Gdy będziesz tam kiedyś, przypomnij sobie i popatrz z bliska matematycznym okiem.

Zadanie dodatkowe: zmierz (ewentualnie z czyjąś życzliwą pomocą, bo musisz stać prosto) swoje proporcje. Potrzebujesz trzech wymiarów – wzrost i odległość od ziemi do pępka, od pępka do czubka głowy. Jak się domyślasz, dwa odcinki składają się na trzeci – wzrost. To suma kontrolna prawidłowości pomiarów. Podziel i zobacz, jaki stosunek ci wychodzi. Tak czy inaczej, będzie to najlepszy stosunek na świecie, bo twój.





# Statystyka, czyli pomoc w wyciąganiu wniosków

Statystyka jest działem matematyki, opisuje świat, pozwala uporządkować i objaśnić ilościowe aspekty różnych zagadnień, ze wszystkich dziedzin życia. To dzięki niej dowiadujemy się, jaka jest średnia długość życia kobiet i mężczyzn, na co ludzie chorują, jak często się rozwodzą, ile średnio mają dzieci, wzrostu, jaki jest dochód państw na mieszkańca i tak dalej. Matematyka i matematyka. Z dużym prawdopodobieństwem można założyć, że na większość pytań o strukturę świata da się znaleźć odpowiedź statystyczną. Ta dziedzina rozwija się wraz z technologią, dopiero możliwość wykorzystania komputerów daje nieograniczone szanse badań. Praktycznie można wszystko, jednak ważne są założenia. Zanim naukowcy, socjologowie przystąpią do badań, muszą wiedzieć kogo lub co chcą zbadać, o co chcą pytać, ile osób musi udzielić odpowiedzi, ile przypadków muszą przeanalizować, żeby wyniki były reprezentatywne. To praca na wielkich liczbach. A tymczasem...

*Uwaga! Statystyka, jako nauka i sposób opisanie świata, ma sens tylko wtedy, gdy operuje dużymi liczbami, na reprezentatywnych próbach. Wyznaczanie średniej dla dwóch czy trzech, a nawet kilkunastu wyników może nie mieć sensu, dawać błędne wyobrażenie, a wnioskowanie statystyczne może nie być uprawnione. Co nie znaczy, że nie możemy z dziećmi bawić się statystyką w codziennym życiu, korzystając z nadarzających się okazji, wykorzystując tematy w zasięgu ręki. Statystyka jest wdzięcznym tematem i wprowadzenie jej do świata pojęć dziecka da szansę na analizę różnych przypadków, wyników, pułapek wnioskowania.*

## ” Matematyka jest miarą wszystkiego

Arystoteles

### Statystyczny portret rodziny

Każda rodzina jest inna. Co wiesz, statystycznie rzecz biorąc, o swoich bliskich?

Potraktuj najbliższe ci osoby jako poligon badawczy i zrób statystyczny portret rodziny/grupy. Z częścią danych dasz sobie radę bez pomocy, ale w wielu sytuacjach pomoc polegająca na odpowiedzi na twoje pytania będzie konieczna. Z nadzieją na współpracę, poproś o wyrozumiałość i pytaj. Zaczynaj od zebrania grona chętnych do badań (nic na siłę). Ile osób liczy twoja rodzina? Do celów statystycznych im więcej, tym lepiej. Możesz do kręgu najbliższych dołączyć przyjaciół, kolegów, sąsiadów. Ważne, żeby była konkretna grupa badawcza.

Analizować możesz o wszystko. Przykładowe tematy:

- Jaka jest średnia wieku?
- Ile osób ma ponad 150 cm wzrostu?
- Ile osób było kiedykolwiek na wakacjach za granicą?
- Ile osób lubi mleko?
- Ile osób kąpie się pod prysznicem, ile w wannie?
- Ile osób uważa, że są szczęśliwi?
- Ile osób...?

I tak w nieskończoność.

Gdy zbierzesz dane, możesz zrobić portret, używając różnych form stylistycznych i matematycznych, żeby nie było nudno. Opisowo albo graficznie (wykres kołowy). Język opisujący badania może być różnorodny.

Jedną daną można przedstawić na różne sposoby, np.: 7 procent ma długie włosy, co trzeci lubi kolor czerwony, ponad połowa uczy się języka angielskiego, blisko piąta część nie jada ryb. W każdym obliczeniu musisz sięgnąć do matematyki, inaczej się nie da – przydadzą się ułamki, procenty, części.



### Trzy drogi

Pytania można zadawać w rozmaity sposób (już wiesz, była o tym mowa w rozdziale o badaniach, czym się różnią pytania zamknięte od otwartych). W zależności od wybranej formy pytania, z badania można wyciągnąć odmienne wnioski.

Masz chętną grupę, zadawaj im pytania (pojedynczo albo hurtem – mogą odpowiedzieć i na kilkadziesiąt). Każdy będzie zadowolony, bo będziesz pytać, o to, co ona/on lubi. A to wszystkim sprawia przyjemność. Sprawdź na żywych organizmach. Trzy drogi do wyboru do uniwersalnego zastosowania, na przykładzie makaronu:

- Czy lubisz makaron? Tak czy nie?



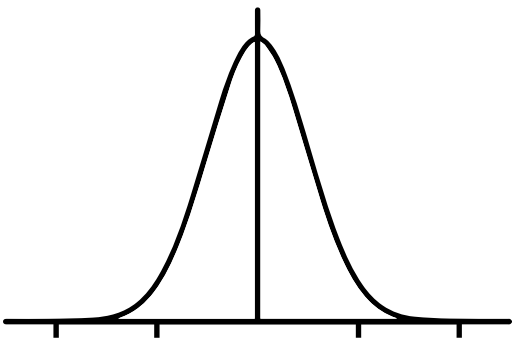




- Jak bardzo lubisz makaron: Bardzo lubię, lubię, ani lubię, ani nie lubię, nie lubię, bardzo nie lubię.
- Dlaczego lubisz/nie lubisz makaronu?

## □ Krzywa Gaussa

Co to takiego? Coś ciekawego, choć na pewno (na 100 procent) można ukończyć szkołę, mieć szóstki i nie mieć pojęcia o krzywej Gaussa (niemiecki matematyk, żył w XVIII i XIX wieku, nie bez powodu nadano mu przydomek „Książę matematyków”). Krzywa Gaussa to tak zwany rozkład normalny, który można przedstawić na wykresie przypominającym kształtem kapelusza albo dzwon. Patrząc na jak na dłoni widać regułę – najczęściej i najwięcej jest rzeczy przeciętnych (to wcale nie musi być ocenne, przeciętny nie oznacza gorszy, nudny), o przeciętnych parametrach, kryteriach. Nieprzeciętne, skrajne cechy występują po prostu dużo rzadziej. Na przykład ludzie m.in. odróżniają się wzrostem, rozmiarem butów, ilorazem inteligencji, i najwięcej z nas jest średniego wzrostu, ma średni rozmiar buta, średni iloraz inteligencji. Niewiele rzeczy, obiektów, cech jest identycznych, równych, takich samych, jak się mówi: ciętych z metra, do niewielu spraw mamy podobny stosunek – coś nam pasuje bardziej, coś mniej, mamy swoje preferencje. Świat jest piękny, bo jest niejednorodny i przez to ciekawy, nieprawda? Nie wnikając w teorię, taką różnorodność w powiązaniu z powszechnością występowania w życiu ilustruje krzywa Gaussa.



Spójrz na świat w ten sposób. Zobaczysz, że dotyczy to wielu zagadnień, oczywiście w każdym wypadku będą to inne kryteria.

Przykłady:

- Inaczej wygląda fabryczny parking nowych samochodów, inaczej parking przed supermarktem. Na fabrycznym wszystkie samochody są nowe. Przed supermarktem zorientujesz się, że większość jest w średnim wieku, wypatrzysz kilka najnowszych modeli i kilka staroci, złomiaczków albo zabytków.
- Niektóre owoce (lub cokolwiek innego) lubisz bardziej, inne mniej. Większość, z dużym prawdopodobieństwem, ci smakuje. W kilku gatunkach nie gustujesz (mogą dla ciebie nie istnieć), a za kilkoma przepadasz.
- Obserwujesz psy na spacerach po osiedlu. Przeciętny czworonóg jest średniej wielko-

ści, i takich jest najwięcej. Aż tu nagle pies gigant, nie ma wielu takich. A za rogiem piek miniaturka, też pojedynczy egzemplarz.

- Opowiadasz dowcip w większym towarzystwie. 2 osoby śmieją się do rozpuku, 6 uśmiecha się życzliwie, 2 nie zrozumiały albo ich to nie bawi.
- Rzucasz dwiema kostkami. Łączna suma oczek – 2 i 12 – może wypaść tylko na jeden sposób, 7 możesz wyrzucić na 6 sposobów.
- Czytasz książki, słuchasz muzyki, poznajesz nowe osoby – tu też krzywa Gaussa działa. Oceniasz: większość OK, może być. Ale masz na pewno ulubione lektury, piosenki, kilku najlepszych przyjaciół. Z drugiej strony, są książki i utwory, o których wiesz, że ich nie lubisz. Pewnie znajdzie się też kolega czy koleżanka, z którymi nie masz chemii (tak się mówi), czyli się po prostu nie lubicie.

I to jest normalne!

## □ Średnia, ale po co?

Czasami coś trzeba uśrednić. Na co dzień, gdy używamy określenia „średnia”, przeważnie mamy na myśli tak zwaną średnią arytmetyczną. To proste: wyniki badań, jeśli mają wymiar liczbowy, trzeba do siebie dodać (suma) i podzielić przez liczbę badanych (uzyskanych wyników). W efekcie działania matematycznego dostajemy informację o średniej. Niektóre zestawienia, możliwe matematycznie, w życiu niczemu nie służą. No bo co, komu przyjdzie z tego, że policzymy, ile średnio waży i ile ma wzrostu przeciętny członek rodziny Kowalskich albo Jakubowskich? Ale już badania statystyczne, pokazujące na dużą skalę, ile średnio waży i ile ma wzrostu chłopiec i dziewczynka w wieku 7, 8, 9 lat mają cel. Niejeden naukowiec skorzysta z takich obiektywnych danych w swoich badaniach. Do czego im się to może przydać? Nikt tego nie wymyślił za nich, ale ze sporym prawdopodobieństwem znajdzie się uczonego badającego wpływ miejsca zamieszkania, pochodzenia społecznego, zamożności rodziny, diety na rozwój dzieci. Ktoś będzie analizował, zmienną w procesie dorastania różnicę, między wagą i wzrostem dziewczynki i chłopca.

Wymyśl przykłady czegoś z życia wziętego, co ma sens, oraz co nie ma sensu w ujęciu średniej arytmetycznej. Możesz do woli tak analizować różne dane i wprawiać się w wyciąganiu sensownych wniosków, wyłapywaniu pułapek.

Podpowiedzi:

Może mieć sens:

- Ile średnio chleba zjada każdego dnia twoja rodzina? (Wiadomo, ile trzeba kupić.)
- Ile średnio paliwa spala samochód na 100 km? (Wiadomo, ile będzie kosztowała podróż nad morze.)
- Ile średnio śpisz codziennie? (Wiadomo, czy to zdrowy, czy też niezdrowy tryb ży-

cia, ale pamiętaj o pułapkach. Np. jeśli jednego dnia śpisz dwie godziny, a drugiego 14, to średnia wychodzi prawidłowa, ale to nie znaczy, że tak jest zdrowo.)

- Ile razy w tygodniu średnio każdy z członków rodziny wyprowadza psa na spacer? (Jakby co, to można to skorygować.)

Nie ma sensu albo mało:

- Ile średnio kilometrów do pracy mają mama i tata?
- Ile średnio dzieci mają mieszkańcy twojego piętra? (Jedna rodzina może mieć ośmioro dzieci, inna nie mieć dzieci, i co z tego wynika?)
- Jakie średnie ciśnienie krwi mają członkowie twojej rodziny? (Dziadek może mieć za wysokie, babcia za niskie, i co z tego wynika?)
- Ile średnio waży dynia i marchewka?

Wniosek? Nie we wszystkim trzeba szukać średniej.

## □ Teleturniej

Dane statystyczne bywają zaskakujące. Jest z nimi podobnie jak z rekordami – emocjonują towarzystwo, mogą bawić, a jednocześnie dostarczają porcji wiedzy, choć może bardziej dają pojęcie o wyobrażeniu, a nie wiedzę. Bo czy nie można spokojnie i owocnie żyć bez pojęcia, jaki procent Polaków codziennie zmienia bieliznę? Można.

Ale zabawa to zabawa. Możecie zorganizować rodzinną rywalizację w odgadywanie wyników przeróżnych sondaży. W internecie znajdziecie bez liku takich informacji, tylko warto patrzeć na autora danych. To ma znaczenie dla wiarygodności. Reguły gry ustalacie, jak chcecie, zawsze ktoś musi znaleźć ciekawe wyniki i zadać pytanie, reszta odgaduje. Za odpowiedź bliższą faktów oczywiście musi być więcej punktów.

” **Statystyki pokazują, że ludzie, którzy najwięcej razy obchodzą urodziny, żyją najdłużej**

Larry Lorenzoni





# Wymiary i współrzędne, czyli jak zorientować się w przestrzeni

Świat, który widzimy wokół siebie, ale też mikro- i makroświat dostępny za pomocą przyrządów optycznych, jest trójwymiarowy, choć umiemy oglądać go w wersji dwuwymiarowej, na zdjęciach, na filmach. Przemierzamy się różnymi środkami lokomocji – po lądzie, wodzie i niebie, poruszamy się w przestrzeni trójwymiarowej, chociaż nikt tak o tym nie myśli. My nie mamy wątpliwości, że Ziemia jest kulą, ale nasi prapraprzodkowie musieli dopiero odkryć ten fakt, pioniersko konstruowali przyrządy pomiarowe, przecierali szlaki, uczyli się sporządzać mapy, tworzyli podstawy obowiązującej sieci współrzędnych geograficznych. Jeszcze pokolenie wcześniej korzystano z papierowych map, atlasów, globusa. Obecnie, dzięki systemowi GPS i aplikacjom na smartfony, bez problemu możemy ustalić położenie nasze czy dowolnego punktu na ziemi. A na co dzień, nawet w podstawowych sprawach, mamy do czynienia z wymiarami – bez tej wiedzy trudno kupić choćby szafę do przedpokoju (kupujemy przecież „na wymiar”).

## □ Czym jest wymiar?

Potocznie mówi się, że coś ma wymiar taki a taki. Nie chodzi o rozmiar, bo to raczej numer, umowna wartość, jak np. rozmiar buta, śruby, opony. Wymiar to musi być konkretna wartość, wymierzona w jednostkach długości.

Kilka pytań (nie ma na nie jednoznacznej odpowiedzi, więc możesz pofilozofować):

- Czy widzisz analogię między liczbą wymiarów a rodzajem obiektu, który opisują?
- Czy można podać wymiary wszystkiego?
- Czy masz pomysł, co mogłoby być czwartym wymiarem?
- Czy znasz coś, masz na myśli coś, co nie ma wymiaru?
- Czy twoja wyobraźnia ogarnia, że naukowcy badający Wszechświat są na tropie kolejnych wymiarów (niemierzonych w metrach)? Na razie dochodzą do 10 wymiarów plus wymiar zerowy (to kropka kwantowa).

## □ Przyziemna praktyka

Często musimy coś wymierzyć, by sprawdzić, jak jest daleko, czy coś się zmieści, ile czegoś potrzeba. Mierzenie odległości/długości jest oczywiste, wymierzanie powierzchni, czy objętości, zwanej też kubaturą, trudniejsze, bo zależy od kształtu mierzonego obiektu. Jeśli kąty mierzonych obiektów są proste, to jest proste. W innych przypadkach pamiętaj, że sprawy się komplikują. Do obliczania powierzchni czy objętości różnych kształtów, brył służą wzory matematyczne, ale tu, zgodnie z daną obietnicą, nie znajdziesz żadnych wzorów.

Zawsze od czegoś trzeba zacząć – zacznij od mierzenia rzeczy z kątami prostymi (prostokątów, prostopadłościanów). Możesz mierzyć dowolną miarką albo roboczo stopami, krokami, łokciami. Pobaw się, ćwicząc, żeby nabrać wprawy. Policzyć długość, powierzchnię, kubaturę różnych przedmiotów. Co i jak mierzymy? To zależy od liczby wymiarów:

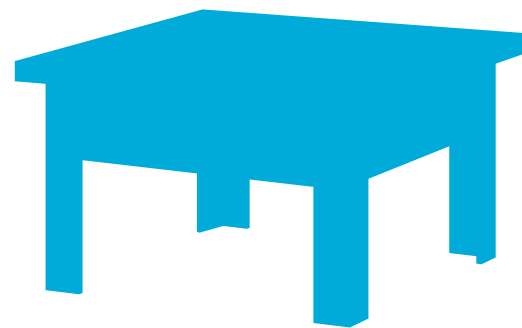
- Jeden wymiar: kupujesz sznurek do suszenia prania – prosisz o odmierzenie potrzebnej długości. I to wystarczy, potrzebny jest jeden pomiar – długość. Wynik w metrycznym układzie miar podajemy w metrach albo w odpowiednio mniejszych lub większych jednostkach, np. coś ma 6 mm, 32 cm, 5 m, 5000 km długości. Warto wiedzieć, że w anglosaskim układzie jednostek długość podawana jest w calach, jardach, milach.
- Dwa wymiary: zamawiasz sklejkę, z której zrobisz biurko – musisz podać dwa wymiary – długość i szerokość. Wielkość powierzchni podajemy zawsze w jednostkach kwadratowych – 1000 mm<sup>2</sup>, 60 cm<sup>2</sup>, 330 m<sup>2</sup>. Anglosasi podają wielkość powierzchni po swojemu, odpowiednio w calach, jardach, milach kwadratowych. Co ciekawe informację o powierzchni gruntów podaje się również w specjalnych jednostkach, dotyczących wyłącznie powierzchni: arach lub hektarach, tak więc możemy powiedzieć, że działka ma 10 arów, park ma 2 hektary.
- Trzy wymiary: wymierzasz szafę. Musisz znać trzy wartości, bo wnęka, w której zmieści się szafa, ma trzy wymiary – długość, szerokość (głębokość) i wysokość. Gdy mierzymy kubaturę prostopadłościanów (szafa, pokój) – potrzebne są więc trzy pomiary. Objętość, kubaturę podajemy

w jednostkach sześciennych – np. 0,8 cm<sup>3</sup>, 40 m<sup>3</sup>, 1 km<sup>3</sup>. Anglosasi wynik podadzą w swoich jednostkach, oczywiście też sześciennych.

Wszystko jasne? Zawsze możesz spytać dorosłych, oni mają to w małym palcu.

## □ Poszukiwanie wymiarów

Intuicyjnie czujemy i zauważamy różnice między wymiarami. Krawędź stołu to linia, ma jeden wymiar, blat stołu to powierzchnia, dwa wymiary, cały stół to bryła, ma trzy wymiary. Pytanie, kto zaprzęta sobie uwagę rozbiegając różne przedmioty wzrokiem na czynniki pierwsze? A to może być bardzo inspirujące.



Spójrz pod takim kątem na otaczające cię przedmioty. Wszystko da się zobaczyć w jednym, dwóch lub trzech wymiarach. Zależy, jak się spojrzysz. Patrz i rozpoznawaj.

## □ Magia przejścia w kolejne wymiary

Czy z punktu może powstać linia? Z linii powierzchnia? Z powierzchni bryła?





Jak myślisz? Wytęż wyobraźnię. Możesz korzystać z wizualizacji, czerpać przykłady z życia, albo uciec się do abstrakcji, szukać w myślach, w kosmosie.

- Wyobraź sobie punkt, który porusza się po płaskiej powierzchni nie odrywając się od niej (i dla ułatwienia zostawia ślad tego ruchu). Co powstaje? /linia/

Przykład z życia: ślad, jaki zostawia po sobie ślimak na chodniku, spadająca gwiazda...



- Wyobraź sobie linię, która się porusza (i dla ułatwienia zostawia ślad tego ruchu). Co powstaje? /płaszczyzna/

Przykład z życia: napięta nitka przesuwana po powierzchni płaskiego stołu, czoło fali wyrównującej piasek na plaży...

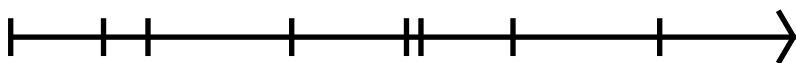
- Wyobraź sobie figurę płaską, która się porusza dookoła własnej osi albo w jakimś kierunku, np. w bok, w dół (i dla ułatwienia zostawia ślad tego ruchu). Co powstaje? /bryła/

Przykład z życia: hula hop spadające z wysokości na ziemię, kartka obracająca się dookoła jednej z krawędzi...

Oto praktyczny wymiar trzech wymiarów.

## □ Jeden wymiar historii, życia – czas

Gdy chcemy przedstawić historię – świata, wynalazków, rodziny – możemy to zrobić na osi czasu. Czas jest jednowymiarowy (choć w teorii względności jest czwartym wymiarem), nie zmierzymy go centymetrem, ale wiekami, latami, godzinami, zależy od skali. Oś czasu jest bardzo wdzięcznym i prostym sposobem przedstawienia kolejności zdarzeń, następstwa faktów, chronologii.



Zrób oś albo osie na różne tematy. Co to może być:

- historia rodziny (nie jak rozgałęzione drzewo genealogiczne, ale tylko zdarzenia w czasie),
- twoje życie (od początku, cokolwiek uznasz za swój start w życiu, do dnia dzisiejszego),
- plan na rok (to będzie coś w rodzaju kalendarza),
- plan na życie – co chcesz zobaczyć, zrobić, osiągnąć i jak planujesz przyszłą realizację w czasie.

## □ Gra w statki

Pewnie znasz grę w statki. Rozgrywa się ją na dwuwymiarowej planszy (choć można zrobić wariant w trójwymiarze, np. z łodziami podwodnymi) i polega na „strzelaniu”: „Strzelam na A1”, „Pudło, a ja strzelam na K5”, „Jest, trafiony-zatopiony”. Kto pierwszy wyeliminuje statki przeciwnika, wygrywa. Gdy rysujesz planszę, tworzysz dwa wymiary – pola w poziomie i w pionie. Na osi poziomej numerujesz: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, na osi pionowej wpisujesz litery alfabetu:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Dzięki oznaczeniom łatwo nazwać i odnaleźć dowolne pole gry.

Graj i ćwicz wyobraźnię w dwóch wymiarach – przyda się w wielu życiowych sytuacjach.

## □ Zdalne sterowanie

Klawiatura telefonu, domofonu to też umowne osie.

Wyobraź sobie, że musisz podyktować numer komuś, kto ma do dyspozycji klawiaturę, na której wytarty się cyfry. Chcesz podać 5, powiedz to słowami: „Wybierz klawisz, który jest w drugim rzędzie od góry, na środku”. I tak dalej. Druga metoda to ustalenie kodu jak w grze w statki – na osi pionowej nazywasz rzędy: A, B, C, D, a na osi poziomej wymieniasz cyfry: 1, 2, 3, i podajesz szyfrem: najpierw wybierz A2, potem B4, potem kolejne. Wszystko powinno być jasne. Jak zaszyfrowane będzie 0, które zwykle jest w najniższym rzędzie na środku, samotne? Poćwicz, jak podyktujesz numer do wybrania.

## □ Siatka na papierze

Dwuwymiarowy układ przydać się może nie tylko do zarządzania klawiaturą telefonu czy do gry w statki. Przydaje się w wielu sytuacjach. Co to jest? To po prostu dwie proste prostopadłe, które krzyżują się w punkcie 0, tworząc osie oddzielające cztery części układu (ćwiartki). W dwuwymiarowym układzie współrzędnych możemy jednoznacznie określić położenie obiektu, wystarczą dwie dane – odległość od osi poziomej i odległość od osi pionowej. Pełny układ współrzędnych obejmuje też liczby ujemne (wartości ujemne znajdują się na osiach po lewej stronie zera i poniżej zera), ale na razie pozostawmy w kręgu liczb dodatnich, czyli zajmujemy się tylko pierwszą ćwiartką (prawa, górna część układu).

Gdzie widzisz zastosowanie siatki płaskiej, dwuwymiarowej? Do czego może się przydać?

Podpowiedzi:

- gry planszowe,
- plany miast, mapy,
- tworzenie planów, np. siatki godzin (kto, kiedy, co robi).

„**Wszystko,  
co możesz sobie  
wyobrazić, jest  
realne**”

**Pablo Picasso**





## □ Układ współrzędnych w trzech wymiarach – poważna sprawa cz. 1

Czym są trzy wymiary? To długość, szerokość i wysokość obiektu. Tak jak z wymiarem szafy – jest do wyobrażenia. A czy za ich pomocą można jednoznacznie określić położenie punktu? Da się. Do tego służą współrzędne, a nawet (czy to nie brzmi złowieszczo?) ich układ. Jak sobie to wyobrazić, zwizualizować? Jeśli nie jesteś na łące ani w lesie, ani na pustyni, ani na morzu, ani na księżycu, z dużym prawdopodobieństwem masz w zasięgu wzroku jakiś narożnik. Nawet nie przeczuwasz, że to... prawdziwy układ współrzędnych (tak naprawdę to pierwsza, jedna z ośmiu, części prawdziwego, trójwymiarowego układu współrzędnych). Narożnik ścian, czyli miejsce, gdzie zbiegają się trzy ściany (płaszczyzny), w realnym świecie będą to dwie ściany i podłoga (albo sufit, ale z podłogą wygodniej eksperymentować).

Wyobraź sobie albo wykonaj – każda z trzech krawędzi wychodząca z narożnika ma mieć podziałkę, bo będzie służyć do pomiaru odległości. Wystarczą trzy linijki albo trzy centymetry krawieckie, albo odwzorowanie podziałki na ścianie (może będzie zgoda na leciutkie zaznaczenie ołówkiem?). I masz już pomocny model układu współrzędnych. Przyda się.

## □ Układ współrzędnych w trzech wymiarach – poważna sprawa cz. 2

„Wszystko jest trudne, nim stanie się proste”. Te słowa przypisywane różnym autorom trafiają w sedno. Raz zrozumiesz, o co chodzi z układem współrzędnych i będziesz mieć z głowy. Nie ma się czego obawiać, bo to nic skomplikowanego, nie ma tu żadnej filozofii. Wracajmy do narożnika.



Weź jakiś niewielki przedmiot – traktujemy go jako punkt. Ustaw go (może być na jakiejś podstawce, bo raczej go nie zawieszisz) w dowolnej odległości od każdej z powierzchni (ścian i podłogi). Teraz znajdź sposoby, żeby zmierzyć trzy odległości – od jednej ściany (x), od

drugiej ściany (y) i od podłogi (z). Powiedzmy, że wyniki pomiarów odległości od poszczególnych powierzchni wynoszą:  $x = 7$  cm,  $y = 18$  cm,  $z = 23$  cm. Pomyśl:

- Czy jest inne położenie, które mogłoby być opisane takimi samymi liczbami, odległościami? (podpowiedź – ważne jest doprecyzowanie, upewnienie się która liczba jest odległością, od której płaszczyzny)
- Czy ten przedmiot, w tym miejscu, w którym się znajduje, mógłby być opisany innymi wynikami pomiaru odległości?
- Czy do jednoznacznego opisu położenia tego punktu wystarczyłyby dwie odległości?
- Co oznaczałoby podanie dwóch pomiarów?
- Czy znając wyniki pomiarów, w dowolnym momencie możesz odtworzyć położenie przedmiotu?
- Czy podając komuś wyniki, masz pewność, że w dowolnym miejscu na ziemi może dokładnie odwzorować położenie twojego punktu?
- Jakie warunki muszą być spełnione, by pomiary były jednoznaczne? (Odległości między przedmiotem a powierzchniami muszą być mierzone po najkrótszej drodze, czyli po liniach prostopadłych do ścian)

Już wszystko wiesz. Możesz stawiać sobie kolejne pytania, eksperymentować. Mierzyć, próbować sił w trudniejszych przypadkach – np. jak opisać położenie czegoś większego? Czy wystarczą trzy odległości? W jakim wypadku? Masz pole do popisu.

Podpowiedź: Jeśli nie chce ci się kucać przy narożniku, a potrzebujesz modelu, równie dobrze nada się cienka książka w twardej oprawie, pod warunkiem, że postawisz ją prostopadle na stole i dopilnujesz, żeby okładki tworzyły kąt prosty.

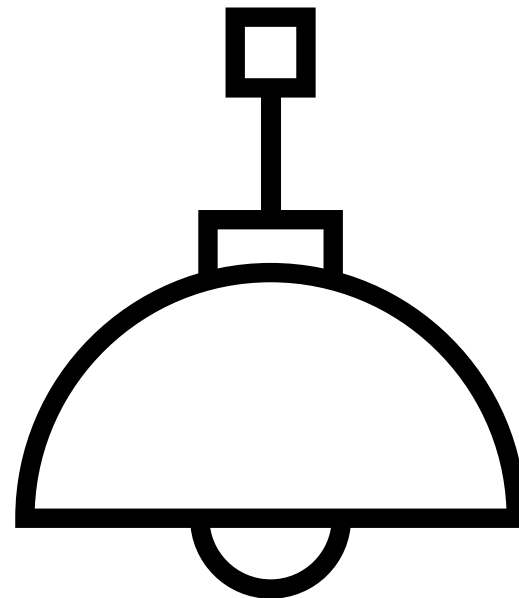
## □ Układ osobisty

Narożnik służył do pierwszego spotkania z układem współrzędnych. By sobie wyobrazić trzy płaszczyzny, jako trzy osie możesz wykorzystać własne palce albo ramiona.

Ułóż dowolne trzy palce prawej lub lewej ręki tak, żeby każdy tworzył kąt prosty z pozostałymi dwoma. Większość ludzi najłatwiej wykona to ćwiczenie, używając kciuka, palca wskazującego i serdecznego. Ale budowa naszych dłoni jest tak różna, że możesz mieć inaczej albo w ogóle nie dasz rady. Jeśli ci się nie uda, nie załamuj się. Z pomocą ramion powiedzie się każdemu – rozkładasz je szeroko, tworzysz powierzchnię. Drugą powierzchnią jest ziemia, podłoga. Wystarczy, że jedno ramię skierujesz przed siebie i tworzysz z podłożem układ współrzędnych. Pytanie, czy to się do czegoś przyda? To się okaże.

## □ Prace praktyczne

Ćwiczenie z narożnikiem jest bardzo użyteczne, gdy trzeba wybrać najlepsze miejsce, np. na żyrandol.



Wyobraź sobie konkretną sytuację we własnym domu. To nic, że żyrandol wisi i nikt nie chce go ruszać. Chodzi o wyobraźnię. Ustal jakiś punkt – np. centralnie nad stolikiem przy kanapie albo na środku stołu. Aby dorosły od razu wywiercił dziurę na hak do powieszenia lampy, musi znać... współrzędne. Do wiercenia niezbędne są dwie odległości (zawsze mierzone prostopadle do ścian!). Do powieszenia żarówki na dobrej wysokości potrzebna będzie trzecia współrzędna – odległość od podłogi, by odpowiednio dopasować kabel. Trzy współrzędne, układ współrzędnych. Samo życie.

## □ Układ na papierze, czyli wstęp do rzutowania równoległego

Rozłożona książka, palce, ramiona to pomoce zastępcze, modele ratunkowe. Prawdziwe układy współrzędnych rysuje się na papierze (albo w komputerze). Możesz i ty. To jedna z tych umiejętności, które trzeba poćwiczyć i stają się oczywiste. Trzy razy narysujesz, zapamiętasz do końca życia. Może nauczysz kolegów, koleżanki?

Narysuj część trójwymiarowego układu współrzędnych na kartce. Zaczynaj od punktu 0. Z tego punktu będą wychodzić trzy osie (półproste). Jedna w prawo poziomo. Druga do góry pionowo. A trzecia? Trzecią rysujesz, dzieląc w połowie kąt rozwarty między narysowanymi wcześniej osiami. To znaczy, że trzecia oś będzie skierowana po skosie, w lewo i w dół. Na takim modelu:

- wyobraź sobie nie tylko osie, ale całe płaszczyzny przez nie wyznaczone – dwie pionowe i poziomą podstawę (tu z pomocą pewnie przyjdzie ci doświadczenie z narożnikiem). Zacienij każdą powierzchnię, najlepiej pionowymi, delikatnymi liniami obie ściany pionowe, poziomymi liniami podstawę. Widzisz trójwymiarowo „narożnik”?





- narysuj punkt w dowolnym miejscu (w obrębie „narożnika”).
- teraz wyprowadź z tego punktu 3 linie w kierunku płaszczyzn – każda ma być równoległa do jednej z osi. Jedna będzie pozioma, druga pionowa, trzecia po skosie. Staraj się, żeby linie nie przecinały zacieniowanych powierzchni. Musisz wyczuć odległość – to właśnie trzeba wyćwiczyć. W miejscu, które uznasz za przecięcie każdej linii z płaszczyzną, narysuj punkt. To tak jakby „cienie” twojego punktu na płaszczyznach. Twoje linie zamieniły się w odcinki łączące punkt z jego „cieniami” na płaszczyznach.
- już jesteś blisko celu. Teraz połącz „cienie” z osiami wytyczającymi płaszczyzny, na których leżą. Linie mają być prostopadłe do osi. Każdy punkt łączysz z dwiema osiami. W punktach przecięcia rysujesz kolejne „cienie”, czyli punkty.
- co widzisz? Jaki rysunek powstał? Czy widzisz trójwymiarowy prostopadłościan?

Gratulacje! Właśnie poznałeś/poznałaś klucz do rysowania przedmiotów w perspektywie. Kilka podejść i do rysowania prostopadłościanów w perspektywie nie będą ci potrzebne ani osie, ani cieniowanie płaszczyzn, ani rysowanie kropek. Będzie szło jak z płatka. Spróbuj tak narysować dom albo cokolwiek innego!

## □ Ratunku! Gdzie ja jestem?

Jak znaleźć coś/kogoś, czego/kogo się szuka? Przydadzą się współrzędne. Gdy można skorzystać z usług GPS, nie ma problemu z lokalizacją. A gdy nie można? Trzeba sobie radzić.

Zobacz w wyobraźni opisane sytuacje. Narysuj plany ratunkowe na papierowych układach współrzędnych.

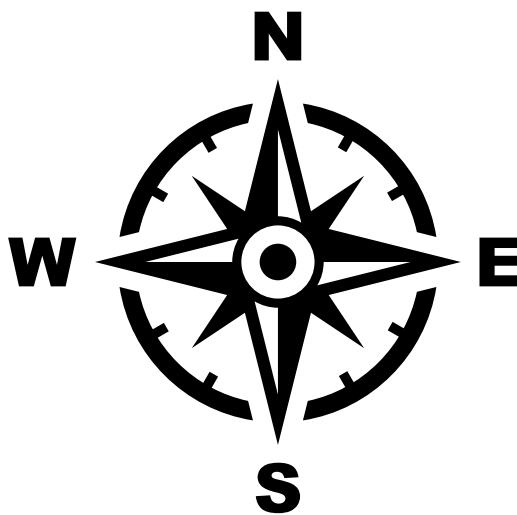
- Idziesz prosto z A do B. Nie masz zamiaru gdziekolwiek skręcać. Zatrzymujesz się i nie jesteś w stanie iść dalej. Wzywasz pomoc. Jak wytłumaczysz ekipie ratunkowej, gdzie cię znajdują? Wystarczy jedna informacja, że jesteś np. 3 kilometry za punktem A. Super. Już wszystko jasne. Wiadomo, gdzie odnajdą cię na odcinku między A i B. Właśnie podałeś/podałaś współrzędne na osi. Bo, zgodnie z założeniem, idziesz po linii prostej i nigdzie nie skręcasz.
- Idziesz z A do B, ale lubisz zbierać grzyby, skręcasz do lasu. Sytuacja się powtarza. Męczysz się i wzywasz pomoc. Jak cię znajdą? Sytuacja jest trudniejsza. Musisz podać dwie dane: powiedzieć, że jesteś w połowie drogi między A i B i skręciłeś/skręciłaś z głównej drogi jakieś 500 kroków. Ekipa nie ma łatwo, ale znajdą cię, bo wiedzą mniej więcej, gdzie szukać. W sumie zakreśliłeś/zakreśliłaś obszar poszukiwań, czyli (pomijając niedokładność informacji)

– ekipa ratunkowa zna dwie współrzędne, powinna trafić w punkt.

- Idziesz z A do B. Ale nie po prostej, bo lubisz zbierać grzyby i skręciłeś/skręciłaś z głównej drogi w las. OK. Ale nie ma lekko. Prawie dochodzisz do B, aż tu nagle atakują cię lochy dzików z młodymi. Musisz wejść na drzewo. Ratujesz życie, nie idziesz dalej, wzywasz pomoc. Co im powiesz? Tym razem musisz podać trzy współrzędne, wobec tego meldujesz: „Jestem jakiś kilometr przed B, wydaje mi się, że około 100 metrów od głównej drogi (bo słyszysz szum szosy) i... na wysokości ok. 3 metrów, bo zaatakowały mnie dziki”. Ekipa rusza w teren. Na szczegółowych informacjach polega system dokładnej, czyli skutecznej lokalizacji. W świecie nowoczesnych technologii satelity namierzają nadajniki i lokalizują z precyzją do kilku metrów. Tylko jak przekazać innym odbiorcom wiadomość, gdzie jest dany punkt? Potrzebna jest siatka, a ta siatka to układ współrzędnych.

## □ Ile stron ma świat?

Ciekawe pytanie! Geograficznie czy na przykład politycznie? Matematyka jest konkretna i obiektywna, po politykę nie sięga. Po pierwsze – co to jest strona? Strona ciała – wiadomo, prawa, lewa; strona w książce – przrucasz jedną za drugą, kartka ma dwie strony, czytamy z obu stron kartki. A świat? Ludzie orientowali się, że żyją w warunkach niezależnych od nich – że ich życiem rządzi natura, nieuchronny rytm wschodów i zachodów słońca, północy i południa. Obserwując słońce, gwiazdy, badając świat i błędząc, przez wieki zdołali wypracować bezbłędny model orientacji w przestrzeni. Chińczycy jako pierwsi w XI wieku odkryli, że namagnesowana igła żelaza ustawia się w kierunku północnym. Dziś strony świata dla nas są oczywiste. Wiemy, gdzie północ, gdzie południe, gdzie wschód, a gdzie zachód. Dwie osie organizują świat? Na to wygląda.



Każdy może się zgubić, znaleźć się w sytuacji, gdy nie będzie mieć telefonu, nie będzie kompasu, a do domu warto wrócić. Oplaca się znać harcerskie sposoby określania, gdzie jest północ. Poznaj je, choćby miały się nigdy nie przydać.

## □ Ziemia płaska czy nie?

My mamy łatwo – rodzimy się i wiemy, że Ziemia jest kulą. Skoro wiemy, to po co się nad tym zastanawiać? Tysiące lat temu ludzie wierzyli, że Ziemia jest płaska, bo jak człowiek na własnych nogach mógł przekonać się o jej kulistości? Rozumowali zgodnie z własnym doświadczeniem: płaski stół na czymś musi się opierać. A Ziemia? Snuli przypuszczenia, że opiera się na słoniach, na żółwiach, że niebo jest oparte na tyczkach, jak baldachim.

Czy wyobrażasz sobie, jak wielką musieli mieć ciekawość i wyobraźnię, żeby dochodzić do prawdy? Dziś można zobaczyć filmy kręcone z satelitów – bez wątpliwości Ziemia jest kulą (choć nadal niektórych to nie przekonuje i wierzą, że jest płaska). Pomyśl, jak w tamtych czasach można było odkrywać kulistość? Masz jakieś matematyczne, geometryczne pomysły?

## □ Globus i mapa



Ziemia jest kulą, ale na mapach widzimy ją w dwóch wymiarach – na płasko. Są różne sposoby przenoszenia kulistej powierzchni na papier. Archimedes, grecki matematyk żyjący w III wieku p.n.e. odkrył, że powierzchnia kuli jest równa powierzchni bocznej walca o takiej samej średnicy i wysokości. Nie ma co sprawdzać – Archimedes miał rację i nic się nie zmieniło od jego czasów. Czy to był początek kartografii, czyli nauki o tworzeniu map?

Weź jakąś kulę – może być piłka, naczynie w kształcie kuli, a najlepiej globus. Do tego spory arkusz papieru – taki, by opasać nim kulę, czyli zrobić walec. Przytnij arkusz tak, by wysokość kuli była równa wysokości papieru. Jeśli w roli kuli występuje globus – wybierz sobie kilka, kilkanaście konkretnych punktów (miejsc na Ziemi) i pokombinuj, jak można je przenieść na papier. Spróbuj też odwzorować południki i równoleżniki. Ciekawe, jaka będzie twoja pierwsza mapa? Jeśli nie masz globusa, a eksperymentujesz z inną kulą, naklej, narysuj na niej dla orien-





tacji różne punkty, one będą twoim celem do odwzorowania. Zaznacz też symbolicznie południki oraz równoleżniki i spróbuj je nanieść na papier.

## □ Ćwiczenia z mapą

Może trudno uwierzyć, ale jeszcze nie tak dawno nie było smartfonów, GPS-u, Google Maps. Za to były plany, mapy, globusy i ludzkość też dawała radę. Zabawa z globusem była przepustką do świata, można było bez przeszkód podróżować po nim palcem w dowolny region globu (zobacz czołówkę dobranocki z Bolkiem i Lolkiem w roli głównej). Obraz pasażera w samochodzie czy turysty w obcym mieście z planem, mapą w rękę był powszechny. I każdy trafiał, dokąd miał trafić. Nie było opcji. Ale dzięki takiej praktycznej szkole orientacji starsze pokolenia do perfekcji opanowały sztukę czytania map.

Spróbujesz? Na pewno w domu jest jakaś mapa starego typu. Każda (plany miast też) miała jasny system nawigacji – arkusz, na którym zobrazony był jakiś obszar, podzielony był na kwadraty. Każdy kwadrat miał swój kod – liczba i litera jednocześnie, wynikający z położenia na przecięciu pasów pionowych (litera) i poziomych (cyfry). Każdy punkt na mapie, czy to ulica, czy miejscowość, był jednoznacznie przypisany do pozycji na arkuszu – np. A7, N12, B6. Gdy stron było więcej, co dotyczyło atlasów, czyli map podzielonych na wiele arkuszy, w spisie miejscowości pojawiała się informacja, np. 58 G8. Co bez wątpliwości kierowało na stronę nr 58 (arkusz), do kwadratu na przecięciu pasów G i 8. Cofnij się w czasie i popracuj (albo pobaw się ze starą mapą, atlasem, z planem). Co możesz:

- Znajdujesz punkt, ulicę, miejscowość, ustalasz jej położenie – arkusz, numer pola.
- Szukasz drogi, wybierasz najlepszą trasę między A i B (czasami będzie to wymagało śledzenia drogi przez kilka arkuszy).
- Poszukujesz wybranej miejscowości w skorowidzu (wiesz, skąd ta nazwa? Skoro to po staropolsku prędko, rychło, szybko – skorowidz to spis, w którym szybko znajdziesz to, czego szukasz), sprawdzasz opis, np. 34 B11, i znajdujesz na mapie.

## □ Nawigacja



Każde miejsce na ziemi ma swoje współrzędne, czyli jest precyzyjnie określone tak, że nie ma mowy o pomyłce. Niezależnie od postępu techniki i nowoczesności rozwiązań, z których korzystamy od wieków, nawigacja bazuje na jednym, uniwersalnym systemie: to siatka umownie poprowadzonych linii – południków i równoleżników. Południki, linie tej samej długości, biegną z góry na dół (nie pionowo, bo po powierzchni ziemi, a przecież Ziemia jest kulą) od bieguna do bieguna. Równoleżniki są okręgami o różnych obwodach (zmniejszającymi się od

równika do biegunów), przebiegającymi równolegle do równika, największego obwodu kuli ziemskiej. W rzeczywistości przecinają się pod kątami sferycznymi (nie a mowy o prostokątach), ale my na mapach widzimy je w uproszczeniu, jako proste prostopadłe. Czysta geometria?

Sprawdź w Wikipedii albo w GPS-ie (na pewno ktoś z rodziny ma dostęp), jakie są współrzędne twojego miejsca. Oto dane na przykładzie lokalizacji Grójca: 51°51'56"N 20°52'03"E. W ten sposób, znając adres, możesz namierzyć dziadków, przyjaciół, Pałac Prezydencki, a nawet wieżę Eiffa czy Big Bena. Różne aplikacje mają mnóstwo użyteczności: wytyczają trasę między dwoma miejscami, podpowiadają drogę, wyliczają czas dotarcia na miejsce (samochodem, rowerem, pieszo) itd. Elektroniczne mapy są bardzo pomocne. Jeśli będzie okazja, pobaw się, to może być rozwojowe i konstruktywne zajęcie.

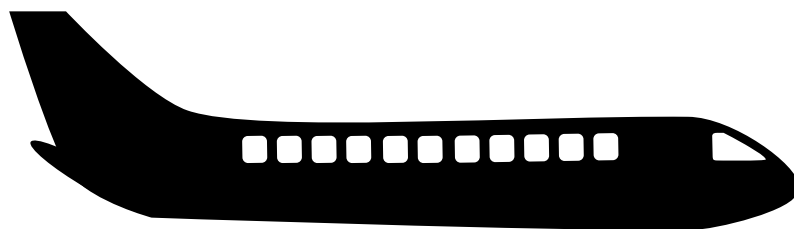
## □ Erudycja

Jak powstawały pierwsze mapy? Dzięki czemu żeglarze nie gubili się na morzu, choć bywało, że docierali nie tam, gdzie chcieli? Kiedy po raz pierwszy zaczęto korzystać z przyrządów do obserwacji ruchu planet? Pytań wiele, a odpowiedzi ciekawsze, niż można przypuszczać.

Może dasz się namówić i poszukasz materiałów, jak ludzie odkrywali budowę świata? Warto sięgnąć do serii filmów animowanych Alberta Barillé „Byli sobie podróżnicy”. Przekonasz się, że bez matematyki nie byłoby postępu.

## □ Śledztwo w czterech wymiarach

Interesują cię samoloty? Fascynują cię tylko te największe? Lubisz śledzić ich lot? Zastanawiasz się, jak to możliwe, że latają? Możesz wiedzieć wszystko o wszystkich samolotach na świecie. Możliwe? Możliwe, jeśli masz dostęp do smartfona, na który wystarczy pobrać darmową aplikację śledzącą loty samolotów na całym świecie.



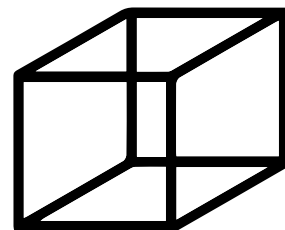
Namów rodzinę na zainstalowanie choćby darmowej wersji aplikacji, a zobaczysz:

- Jak często tory samolotów się krzyżują, ale samoloty nie zderzają się w powietrzu, na szczęście. Dlaczego? Odkryj tajemnicę (to trzeci albo czwarty wymiar).
- Którędy latają samoloty na dłuższych trasach? (niekoniecznie po prostej, raczej po łuku, teoretycznie nadrabiając drogę, ale czy na pewno?) Musisz to sprawdzić na globusie.

A do tego, gdy nad głową zobaczysz samolot, dzięki aplikacji dowiesz się wszystkiego – skąd dokąd leci, jak wysoko jest w tej chwili nad ziemią, z jaką prędkością się porusza. Może cię to wciągnie?

## □ Kody informacyjne

Świat technologii wygenerował kody komunikacji, rozumiałe bez względu na język, szerokość i długość geograficzną. Do międzynarodowego kodu należą skróty – 2D (two-dimensional – dwuwymiarowy) lub 3D (three-dimensional – trójwymiarowy). 2D to tyle, co grafika dwuwymiarowa, czyli płaska, 3D – trójwymiarowa, czyli przestrzenna albo sprawiająca wrażenie przestrzennej. W świecie matematyki 2D to np. kwadrat, 3D to sześcian. Rozumiesz?



„ **Gdy niematematyk słyszy o czwartym wymiarze, to dostaje gęsiej skórki**

Albert Einstein





Nie ma wątpliwości, że znasz grafiki z jednej i drugiej grupy. Co to będzie?

- 2D – ....
- 3D – ....

Podpowiedzi:

- 2D – ilustracje odręczne i wektorowe, komiksy, filmy animowane, obrazy, przedmioty płaskie, wydruki z drukarki itp.
- 3D – grafika trójwymiarowa (w komplecie z okularami), pocztówki 3D, filmy 3D, telewizja 3D, stereogramy (rysunki z efektem trójwymiarowym), hologramy, fotografia z efektem głębi, bryły, wydruki z drukarki 3D itp.

## Trójwymiarowe kino

To przygoda, która jednych uwodzi, a innych męczy.



Przekonaj się. Jest jedna metoda – trzeba się wybrać i zobaczyć.

## Trójwymiar hand made

Czy na papierze można przedstawić coś przestrzennie? Można. Podstawową umiejętnością jest narysowanie sześciangu tak, by sprawiał złudzenie bryły, figury przestrzennej. Jeśli umiesz narysować trzy osie w układzie współrzędnych, sześciang nie będzie problemem.

Ale na rysowaniu sześciangu przyjemność się nie kończy. Stosując tę samą metodę, napisz na początek swoje imię. Spróbuj przerobić płaskie litery na trójwymiarowe. Poćwicz. Może nie być łatwo, ale z czasem się wyrobisz.

## Zmiana wymiaru

Czy można zmienić wymiar? Oto jest pytanie.

Jak myślisz, jakie masz pomysły, co może być dwuwymiarowe i przejść w trójwymiarowe? A odwrotnie?

Przykłady:

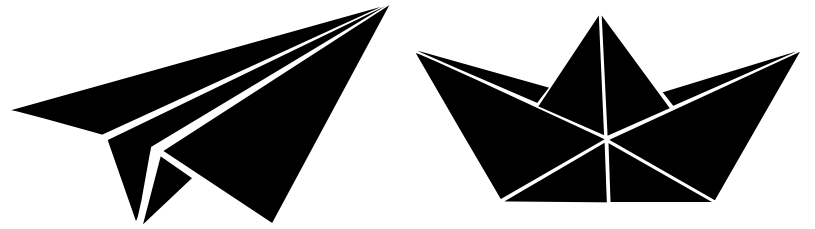
- 2D → 3D: kartka → origami, projekt domu → dom, rysunek → wydruk na drukarce 3D, zdjęcie, film → efekt głębi,
- 3D → 2D: bryła → cień, obiekt → zdjęcie lub film, bochenek chleba → kromka (i podobne przykłady krojenia), ciało człowieka → zapis diagnostyczny z rezonansu magnetycznego (plasterki).

## Origami

Czy to nie jest wspaniała sztuka, umiejętność, która ożywia papier? Każdy może z kartki, bez użycia nożyczek, kleju tworzyć trzeci wymiar, ożywiać materię. Origami, technika pochodząca z Chin (może to nie przypadek, bo właśnie Chińczycy wynaleźli papier), daje niesamowite możliwości kreacji. To czysta geometria.

Zobacz, co można tworzyć z papieru. Znajdź instrukcje, wymyślaj własne rozwiązania. Popatrz, jak sprawnie pracują mistrzowie tej techniki. Przy okazji wyćwiczysz palce, nauczysz się dokładności, zrozumiesz,

czym jest precyzja w praktyce. Od niej zależy efekt – albo wyjdzie, albo nie wyjdzie. Musisz uzbroić się w cierpliwość, nikomu nic nie udaje się idealnie od razu.

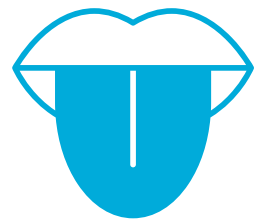


## Język wymiarów, wymiary w języku

Już wiesz, o co chodzi z wymiarami w matematyce.

A jakie znasz inne, poza-matematyczne wymiary? Pomyśl, pozbieraj różne wątki i wypisz. Ciekawe, czy znajdziesz jakieś analogie.

Podpowiedź: Jakie mamy inne wymiary? Sprawiedliwości, kary, podatku, obowiązków, odpowiedzialności, czasu pracy...



## 0 oczko mniej

Czym można (umownie, bo nie chodzi o cięcie nożem) przeciąć coś trójwymiarowego, np. kulę na dwie części? Czym można podzielić coś dwuwymiarowego, np. kartkę na dwie części (i nie chodzi o przecięcie jej nożyczkami na dwie części)? Czym można podzielić coś jednowymiarowego, np. sznurek na dwie części?

Ciekawe, czy wpadniesz na regułę. A jak już wpadniesz, pomyśl, jaki obiekt czterowymiarowy (co to mogłoby być?) da się podzielić za pomocą czegoś trójwymiarowego? Abstrakcja?

Odpowiedź: podział obiektów dokonuje się za pomocą innego obiektu, który jest o jeden wymiar mniejszy.

## Bajka o wymiarach

Pod koniec XIX wieku Anglik Edwin Abbott napisał opowiadanie „Płaski kraj” albo inaczej „Flatlandia, czyli kraina płaszczaków”. Bohaterami są płaskie istoty – kwadrat (narrator), odcinki (wszystkie kobiety), trójkąty równoramienne (robotnicy i żołnierze), pięciokąty foremne (urzędnicy), wielokąty podobne do kół (duchowni). Nagle w ten uporządkowany płaski świat wkracza stwór z trójwymiaru – kula. I co się dzieje? Jak się widzą nawzajem? W noweli dyskutują zażarcie, jak rasowi matematycy, spierają się, bo przecież mają zupełnie inne punkty widzenia, odniesienia, doświadczenia. Czy mogą się zrozumieć?



Może uda ci się dotrzeć do oryginalnego tekstu lub jeszcze ciekawiej będzie (najlepiej w towarzystwie, które „kupi” ideę) wymyślić, wcielając się w role i uruchamiając wyobraźnię na najwyższych obrotach, jak mogła wyglądać rozmowa bohaterów książki?





# Zbiory, czyli co z czym łączyć (i po co)

Pojęcie zbioru to pojęcie pierwotne, którego się nie definiuje, a rozumie się samo przez się. Już małe dziecko intuicyjnie wie, czym jest zbiór – dla każdego pierwszymi zbiorami będą palce, domownicy, zabawki. Co to jest zbiór? Najprościej wyjaśnić to na przykładach. Zbiór tworzą uczniowie jednej klasy, członkowie rodziny, książki w twoim pokoju, zwierzęta domowe, dyscypliny sportowe, które lubisz oglądać, kolekcja znaczków pocztowych, tradycyjne dania i potrawy wigilijne w twoim domu, sprawności harcerskie, liczby naturalne. Zbiorów jest nieskończenie dużo, bo wszystko może być zbiorem, pod warunkiem, że ustali się kryteria przynależności do zbioru. Do zbiorów mogą należeć osoby, rzeczy, ale też pojęcia abstrakcyjne. Tworzenie zbiorów – czy to w przestrzeni fizycznej (biblioteka, klaser ze znaczkami, pudełko z guzikami), czy w myślach – pomaga porządkować elementy, analizować ich cechy, ułatwia szukanie podobieństw, cech wyróżniających. Ustanawiając zbiór, jednocześnie określamy, co do niego należy, a co nie. Możemy tworzyć zbiory skończone i nieskończone, zbiory puste, rozłączne, szukać części wspólnych, łączyć zbiory, porównywać. Zabawa zbiorami nie ma granic, jest atrakcyjna nawet dla najmłodszych.

## □ Ważne: jednoznaczne kryteria

Gdy chcesz określić jakiś zbiór, musisz zdecydować, co to będzie. Zbiory mogą być różne, ale zawsze muszą być precyzyjnie zdefiniowane. Przykładem zbioru mogą być owoce. Mogą się w nim znaleźć wszystkie owoce świata, ale możesz też doprecyzować kryteria: zbiór owoców jadalnych, czerwonych, gronowych, tych rosnących w twoim ogródku lub cytrusowych, albo tych, które lubisz najbardziej.

Chcesz określić jakiś zbiór? Po pierwsze, ustal kryterium. To, jakie będzie, zależy od ciebie. Pamiętaj tylko, by określić je jednoznacznie. Możesz też zadawać więcej niż jedno kryterium. I tu jest miejsce na tworzenie nieskończonej listy ważnych, ciekawych, śmiesznych, absurdalnych zbiorów.

Co się w nich znajdzie? Przykłady:

- zbiory rozłączne: zbiór owoców, które lubisz, i zbiór owoców, których nie lubisz
- zbiory z częścią wspólną: zbiór sportów zespołowych i zbiór sportów, w których gra się piłką
- zbiory rozłączne: zbiór ssaków i zbiór ptaków
- zbiór pusty: zbiór osób, które mają zawsze rację
- zbiór jednoelementowy: np. do którego należysz tylko ty
- zbiór nieskończony: np. zbiór punktów leżących na prostej, albo zbiór wszystkich liczb parzystych
- zbiór skończony: np. zbiór twoich skarpetek
- zbiory równe: np. zbiór kart w jednej pełnej talii i zbiór kart w drugiej takiej samej, pełnej talii
- zbiory z więcej niż jednym kryterium: np. zbiór książek w twardej oprawie ze smokiem na okładce, zbiór ptaków z długim, czerwonym dziobem, zbiór miast wojewódzkich z drzewem w herbie, zbiór flag państw afrykańskich z elementem w kolorze niebieskim, zbiór samochodów osobowych z bagażnikiem na dachu, zbiór filmów animowanych, w których bohaterami są zwierzęta, zbiór miejsc, gdzie spędziliście rodzinne wakacje, a dokąd chcielibyście wrócić, itp.



## □ Kluczowa sprawa

Już wiesz, że wybór kryterium to podstawa. Jeżeli kryterium jest nieprecyzyjne, nie utworzysz prawidłowych zbiorów. Gdy to zależy od ciebie, możesz zaszaleć, tworząc w myślach przeróżne zbiory – byle kryteria były jednoznaczne. Gdy kryteria będą się wykluczały wzajemnie, stworzysz zbiory rozłączne, np. warzywa, które rosną w ziemi i mają zielony kolor. Gdy kryteria będą się pokrywały częściowo, stworzysz zbiory o części wspólnej, np. czerwone owoce i owoce, które rosną na krzaczkach. W jednym zbiorze znajdą się choćby czerwone jabłka, w drugim, dla przykładu, borówki amerykańskie. A co z truskawkami? Równie dobrze pasują do obu zbiorów, będą więc elementem ich części wspólnej.

Musisz pamiętać też o granicach, o wyraźnym sformułowaniu założeń – nie wystarczy chcieć podzielić książki na małe i duże, trzeba ustalić, co uważasz za małą, a co za dużą książkę.

W ramach przymiarki, wprawki, ćwiczenia, spróbuj ustalić kryteria dla dowolnych zbiorów czegokolwiek, co widzisz wkoło siebie, o czym pomyślisz. Co to może być:

- piórnik – wszystko, co masz w piórniku, przybory do pisania, przybory do rysowania, rzeczy w danym kolorze...
- szuflada ze skarpetkami – te, które mają parę, na lato, długie, bawełniane, w wybranym kolorze, w paski...
- półka z książkami – przeczytane, ulubione, pożyczone, kolorowanki, o dobrych obyczajach, w twardej oprawie, podręczniki...
- daty urodzin całej rodziny – dni parzyste, miesiące nieparzyste, wszyscy urodzeni w danym miesiącu, urodzeni w niedzielę...
- koszyk w supermarkecie – wszystkie zakupy, owoce, warzywa, nabiał, artykuły higieniczne, napoje...

## □ Wizyta w sklepie

Rozmieszczanie towarów w sklepie to wiedza i sztuka. Tematem zajmują się naukowcy, specjaliści, w praktyce sprawdzone zasady stosują właściciele sklepów. Każdy towar, grupa towarów ma swoje miejsce, by klienci mogli łatwo znaleźć i kupić to, czego potrzebują. Produkty ułożone konsekwentnie w działach, alejkach, na regałach są więc zbiorami. W księgarni będą to zbiory tematyczne (beletrystyka, poradniki), w sklepie z ubraniami





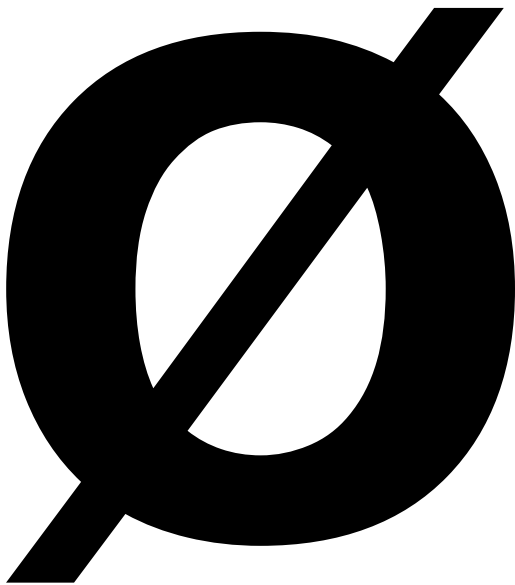


mi przede wszystkim działły męski i damski, w supermarkecie osobno umieszczone są artykuły chemiczne, spożywcze, pieczywo, owoce, mięso... W wielu sklepach, w celach marketingowych, wyodrębnia się specjalne „zbiory”, np. nowości, promocje, produkty sezonowe związane z Wielkanocą czy walentynkami. Rozlokowanie towaru w każdym sklepie, czy dużym, czy małym, nawet na straganie na targu, czy w kiosku z prasą, ma swoją logikę.

Jesteś w sklepie – przyglądaj się, jak to wygląda – nazywaj kryteria, szukaj cech wspólnych, wyłapuj niekonsekwencje. Jak coś cię zdziwi, zadawaj pytania. Może ktoś ci podziękuję za czujność?

## □ Zabawa w niemożliwe

Tworząc zbiory, musimy uważać na pułapkę subiektywnego podejścia, braku wiedzy. Gdy kryterium pustego zbioru będzie wynikało z twojego przekonania, że zbiór osób nie lubiących „Ptasiego mleczka” jest pusty, możesz się zdziwić. Gdy założysz, że zbiór bocianów pozostających w Polsce na zimę jest pusty, też będziesz w błędzie, bo co roku wiele bocianów trafia do ptasich azylów, są chore i nie mogą o własnych siłach odlecieć do Afryki.



Wymyślaj przykłady pustych zbiorów, czyli takich, których kryteriów nie spełnia żaden element. To może być ciekawe.

## □ Zbiory są wszędzie

Zbiory są idealnym pomysłem na gry, zagadki. Niepotrzebne są żadne rekwizyty. Tylko uważność i trochę kreatywności.

Wypróbuj w domu, w samochodzie, na wakacjach. Za każdym razem, w każdym miejscu będą inne preteksty do zabawy. Wymyślaj i zadawaj pytania, zagadki (komu się da) ze zbiorami – tematem może być jak zwykle wszystko:

- w domu – np. postaw na stole 15 naczyń i wspólnie twórzcie jak najwięcej zbiorów, według jasnych kryteriów: szklane, kwadra-

towe, większe niż pół litra, kolorowe, albo wybierz 10 różnych książek i szukajcie jak najwięcej kryteriów, które mogłyby być wspólne dla zbiorów: grubsza/cieńsza niż..., większa/mniejsza niż..., o zwierzętach, o (na dowolny temat)..., z ilustracjami, z twardą/miękką okładką, kolorowe/czarno-białe...

- w trasie: wypatruj samochodów wybranej marki, w określonym kolorze, albo ciężarówek, domów z czerwoną dachówką lub z żółtymi ścianami, bocianów albo krów na polach, różnych ptaków siedzących na drutach, patroli policyjnych, sadów z jabłoniąmi, winnic, snopków zboża, bel słomy... Możesz rachować jak liczne to zbiory.
- na wakacjach: twórz wirtualne zbiory osób w kapeluszu, jachtów pod pełnymi żaglami, dzieci na sankach, dorosłych w klapkach na górskim szlaku, znaków z napisem „Zabrania się”, budek z rybami albo lodami, pomarańczowych namiotów, psów o sympatycznym pysku, straganów z bursztynem albo oscypkami...

Jak widzisz, nie ma tematu, który by się nie sprawdził. Uruchoom wyobraźnię. Łatwo jest tworzyć zbiory tego, co widzisz. Wyższy poziom abstrakcji, to nie widząc, wymyślić coś, czego się szuka, żeby dołączyć do zbioru. Możesz w to zaangażować wszystkich, ich uwaga podąży w tym kierunku, i będzie o czym rozmawiać. Przykłady:

- zbiór miejsc, gdzie wszyscy będą zadowoleni z posiłku
- zbiór samochodów z rejestracją zagraniczną
- zbiór zwierząt gospodarskich
- zbiór gniazd bocianich
- zbiór miejsc z najlepszym piaskiem, gdzie są najciekawsze szlaki, piękne widoki...

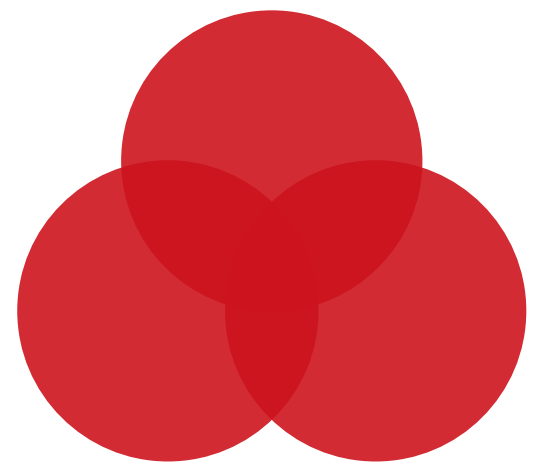
## □ Wspólna baza

Warto stworzyć tematyczne wspólne zbiory upodobań domowników. Tak buduje się bazę tego, co jest rodzinnie ważne. Żeby stworzyć taki zbiór, trzeba o sobie sporo wiedzieć, ustalić preferencje, wartości.

Podsuń pomysł, zachęć do szczerzej rozmowy, ustalcie wspólne zbiory. Wspólne tematy to np.:

- ulubione dania obiadowe rodziny,
- ulubione formy spędzania wolnego czasu,
- pomysły na miłe wakacje,
- ulubione smaki lodów,
- ulubiony rodzinny serial,
- ulubiony sport, trasy rowerowe,
- ulubione gry planszowe,

Doświadczenie możesz powtórzyć w każdej grupie, w której przebywasz – to ćwiczenie buduje relacje. Pokazuje, co macie wspólnego, co was łączy. Na przykład to, co ty lubisz i inni też lubią, staje się częścią wspólną. Lubicie to razem.



## □ Porządkowanie rodzinnego albumu

Na pewno gdzieś w domowych annałach są nieuporządkowane zdjęcia rodzinne – z przeszłości mamy, taty, może dziadków, z czasów, gdy zdjęcia się wywoływało i robiło odbitki. Ktoś musi wystąpić z inicjatywą uporządkowania tego zbioru (bo wszystkie zdjęcia rodzinne tworzą zbiór). Dlaczego nie ty? To będzie bardzo pożyteczne, a do tego ciekawe i wzbogacające zajęcie.

Jeżeli będzie zgoda, przejrzyjcie wstępnie wszystkie zdjęcia, wspólnie zastanówcie się, jak je porządkować – jakie podzbiory utworzyć. Czy osobno rodzina mamy, osobno taty, osobno ty?

” **Istotą matematyki jest jej wolność. Wolność konstruowania, wolność czynienia założeń.**

Georg Cantor





A może latami, zgodnie z datą powstania zdjęcia? A może według miejsc?

### ❑ Pasuje? Nie pasuje?

Wiele zabaw i ćwiczeń polega na wyszukiwaniu czegoś, co nie pasuje do zbiorów. Takie ćwiczenia znajdziesz też w zbiorach zadań MENSA. Jak to wygląda: masz ilustracje kilku przedmiotów, które coś łączy, a wśród nich jeden albo więcej, które nie pasują do zbioru. Na przykład: parasol, kalosze, peleryna, czajnik, albo winogrona, czerwień, bakłażan, śliwka. Proste? Proste.

Czym innym jest rozwiązywanie zagadek, czym innym tworzenie takich zestawów. Twórz takie zestawy ze wszystkiego, co masz pod ręką, albo co wymyślisz – bo możesz to, co wymyślisz zapisać w postaci słów lub narysować. I zapraszaj do zabawy. Możesz też wejść na wyższy poziom i kreować zestawy nieoczywiste – np. z dwoma różnymi kryteriami. Oczywisty wyznacznik dla zbioru: parasol, kalosze, peleryna, czajnik – rzeczy, które przydają się w czasie deszczu. Ale jeżeli zadasz kryterium: żółte przedmioty, a tylko peleryna będzie czerwona, wtedy odpowiedź jest inna. Bo każda rzecz ma różne cechy. Wykorzystaj to do zabawy.

### ❑ Pakowanie walizki

Czy zdajesz sobie sprawę, że przygotowanie do wyjazdu to też zadanie związane z tworzeniem zbioru? Zawartość walizki to zbiór rzeczy niezbędnych w podróży. Jeżeli kryteria nie są wystarczająco ostre – może tam trafić coś niepotrzebnego albo może czegoś zabraknąć.



Gdy będziesz wybierać się w podróż, podejź do tego zadania jak do misji – stwórz zbiór rzeczy niezbędnych/potrzebnych. To zapewne będzie lista, na której łatwo będzie odhaczyć, co jest już spakowane.

### ❑ Dzielenie zbiorów

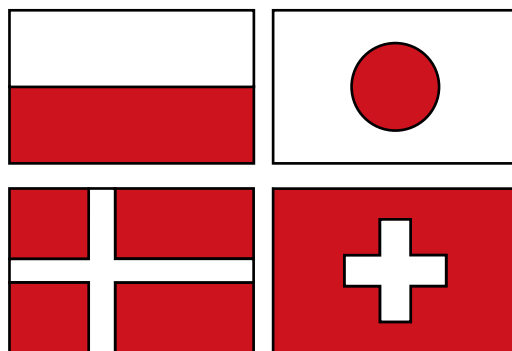
Tworzenie w myśli zbiorów nie tylko pomaga uporządkować rzeczy, ale i podjąć dobre decyzje.

Wyobraź sobie, że robisz generalne porządki lub się przeprowadzasz. Nie ma rady – musisz podzielić wszystkie rzeczy na co najmniej dwa zbiory – rzeczy potrzebne i rzeczy niepotrzebne. Potrzebne, wiadomo – zostają. Niepotrzebne znów możesz podzielić na zbiory – rzeczy do wyrzucenia (zniszczone, nieprzydatne) i dobre rzeczy, które możesz oddać komuś, komu przydadzą się.

### ❑ Inspirujące przykłady

Zabawa w zbiory może być doskonałym pomysłem na nudę i/lub naukę. Wymyślanie kryteriów to już gimnastyka umysłowa, wyszukiwanie odpowiadających elementów rozwinięciem twoją spostrzegawczość, nie wspominając o wiedzy o świecie.

Weź na przykład zbiór flag wszystkich państw świata. Ustalaj kryteria (np. kwadratowe, z paskami, z kolorem niebieskim, państw azjatyckich, z kółkiem), wyszukuj te, które spełniają twoje warunki przynależności do zbioru. Rozszerzaj, zawężaj kryteria, łącz zbiory, wyłączaj ze zbiorów, porównuj. Nawet nie zauważysz, kiedy zbiór flag wejdzie ci do głowy.



Inne tematy do niekończącej się zabawy w zbiory: zwierzęta, rośliny, pieniądze, aktorzy, książki, filmy... Możesz to robić z towarzystwem lub sam/sama.

### ❑ Dwa kryteria, czyli macierz

Macierz jest prostym narzędziem – w praktyce formą tabeli – pomagającym uporządkować cokolwiek, gdy ustalone są dwa kryteria. Metoda sprawdza się w każdym przypadku, dla każ-

dej rzeczy, ale i dla spraw – do zabawy, do porządkowania, segregacji, zastanowienia. Chyba najbardziej znaną i najczęściej stosowaną macierzą jest systemowy podział na rzeczy do zrobienia: pilne i ważne, pilne i nieważne, niepilne i ważne, niepilne i nieważne.

Najpierw narysuj macierz. To proste – raz zrobisz, zapamiętasz na całe życie. A więc: Rysujesz kwadrat. Dzielisz go kreską na pół w pionie, dzielisz go kreską na pół w poziomie. Co teraz masz? Cztery pola – po dwa w rzędzie i po dwa w kolumnie. Na górze kwadratu zapisujesz jedno z kryteriów – np. WAŻNOŚĆ. Lewa kolumna – to rzeczy nieważne, prawa – ważne. Z lewego boku wpisujesz drugie kryterium: PILNOŚĆ. Górny rząd – rzeczy pilne, dolny – niepilne. Masz cztery kwadraty opisane – na skrzyżowaniu kryteriów z góry i z boku, WAŻNOŚCI I PILNOŚCI w tym przykładzie – pilne i ważne, pilne i nieważne, niepilne i ważne, niepilne i nieważne. I już narzędzie gotowe. Teraz wpisz rzeczy do zrobienia, pasujące do każdego z kwadratów. Możesz zrobić taką macierz na tablicy i zapisywać kredą, albo robić plan na każdy dzień, albo korzystać w wyjątkowych sytuacjach.

<b>NIEWAŻNE I PILNE</b>	<b>WAŻNE I PILNE</b>
<b>NIEWAŻNE I NIEPILNE</b>	<b>WAŻNE I NIEPILNE</b>

Zmierz się z tematem na przykładzie swoich zadań. Masz różne zadania, jak je określisz, korzystając z macierzy, w które pola je wstawisz?

- Zadzwoń do babci z życzeniami z okazji wypadającego dzisiaj Dnia Babci
- Uporządkować biurko
- Powtórzyć słówka z angielskiego
- Wyrzucić śmieci
- Zjeść kanapkę
- Podlać kwiaty
- Obejrzeć polecany filmik na YouTube
- Opróżnić kieszenie kurtki

Inne tematy (dwa kryteria zawsze wybierasz dowolne, jakich potrzebujesz, jakie są ważne):

- porządek w garderobie: ubrania dziecięce – ubrania dorosłych, ubrania letnie – ubrania zimowe
- przedmioty w szkole: ciekawe – nieciekawe (fajne – niefajne), lubię – nie lubię
- produkty i dania do jedzenia: lubię – nie lubię, zdrowe – niezdrowe





## ☐ Sprawa wagi państwowej

Wszyscy musimy segregować śmieci. To ważna sprawa. Wiele argumentów przemawia za tym, że takie postępowanie ma sens. Żeby segregować odpowiedzialnie i zasadnie, trzeba wiedzieć jak. Jest wiele źródeł wiedzy, prawdopodobnie na twoim osiedlowym śmietniku jest precyzyjna instrukcja.



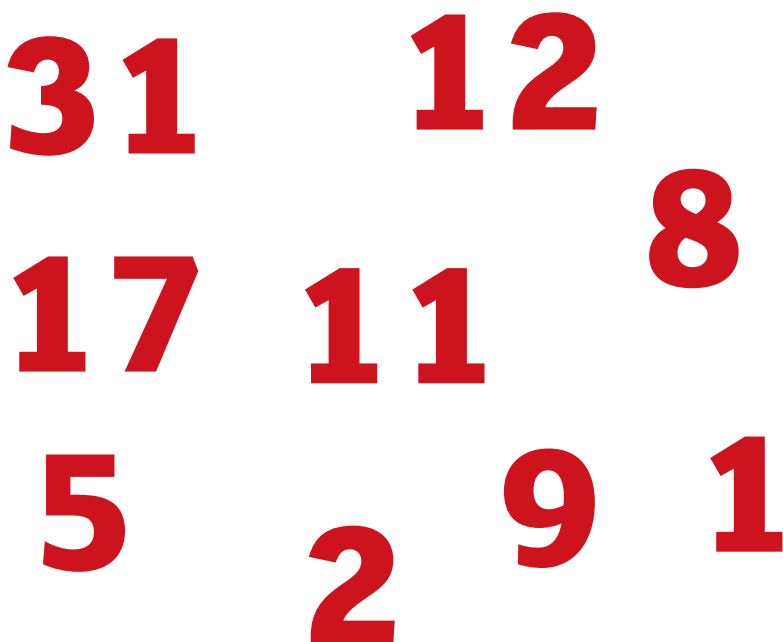
Sprawdź, na czym polega segregacja śmieci w twoim miejscu zamieszkania. Zostań ambasadorem segregacji albo domowym menedżerem ds. recyklingu (może uda się za to zarobić parę złotych do skarbonki? Negocjuj :)). To odpowiedzialna funkcja. Utwórz zbiory zgodnie z instrukcją (zorganizuj odpowiednie domowe punkty zbierania śmieci) i pilnuj, by wszyscy przestrzegali zasad. Gdy będą wątpliwości, ty rozstrzygasz.

## ☐ Zbiory liczb i numerów

Liczby są doskonałym materiałem wyjściowym do tworzenia zbiorów, ponieważ rodzajów liczb jest mnóstwo: dodatnie i ujemne, pierwsze, naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne i inne klasyfikowane według kryteriów matematycznych. Z naszego punktu widzenia formalny podział może być luźniejszy, nie tak sztywny. Możesz bawić się liczbami, numerami i pakować je w różne paczki, czyli zbiory.

Możesz zapisywać liczby, rysować je, rysować przedmioty odpowiadające ich wartości, zbierać etykiety z cenami, zastosowania, robić zdjęcia numerów. Możesz zbiory łączyć, dzielić, wymyślać, co z nimi robić. Baw się liczbami. Szukaj i twórz własne zbiory, np.:

- liczb, numerów, które widzisz w drodze do szkoły,
- liczb, numerów, które znasz na pamięć,
- liczb, numerów bliskich ci z dowolnych powodów,
- liczb podzielnych przez 6 lub przez 4 lub dowolnych innych...



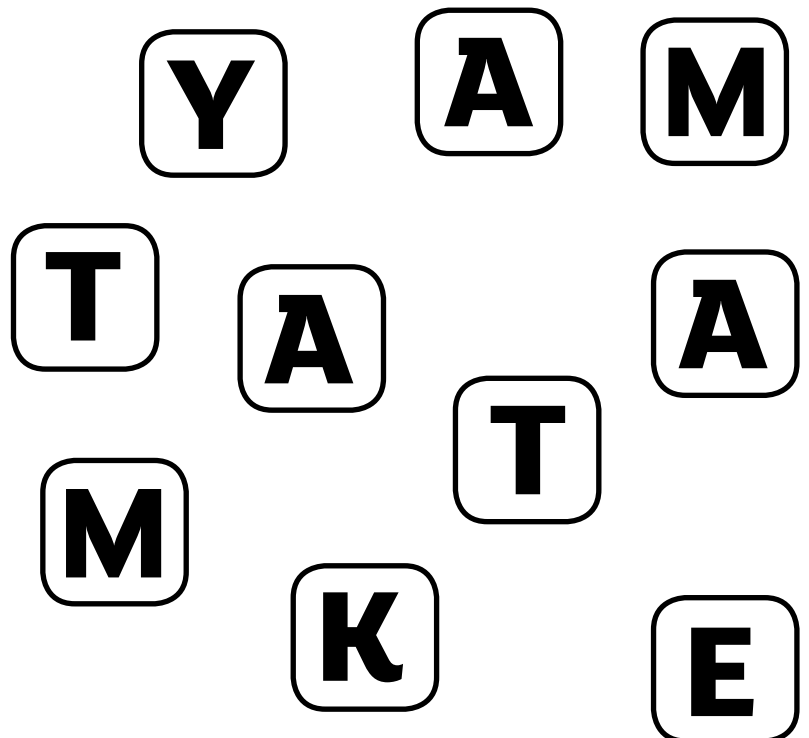
## ☐ Zbiory liter, słów, sensów

Masz w rękę zbiór pomysłów, który ma cię zainspirować do zabawy matematyką, ale już pewnie kilka razy wpadłaś/wpadłeś na trop wiodący do języka potocznego. Związki matematyki z językiem są liczne, ciekawe i warto je tropić. Litery i słowa też doskonale nadają się do zabawy w zbiory – choćby zbiór spółgłosek i samogłosek, zbiór liter wielkich i małych, pisanych i drukowanych oraz wiele innych klasyfikacji, w których specjalizują się językoznawcy.

A czy można stworzyć zbiór wspólnych liter dwóch wyrazów? Można i przekonasz się, że to jest super zabawa. No bo jaki jest zbiór wspólny dla słów: „leśnik” i „naleśnik”? Nic ich na gruncie logiki, znaczeń nie łączy, zestawienie ich nie ma sensu, ale wspólne litery są, czyli zbiór wspólnych liter nie jest pusty. Co jeszcze można robić z literami, słowami:



- szyfry – twórz serie (szeregi) liter według różnych kluczy i dawaj innym do odgadnięcia, np. A C A E A G A K A M A... albo ADG BFJ CHŁ...
- wymyślaj jak najwięcej słów (znaczeń) – rzeczowników, czasowników – różniących się jedną literą, sylabą – np. kąt, czworokąt, wielokąt..., albo robić, zrobić, wyrobić, dorobić, przerobić..., lina, ślina, malina, wazelina...
- twórz zagadki polegające na łączeniu zbiorów słów (pojęć) z jednej grupy z pojęciami niepasującymi np. stolice państw, zwierzęta żyjące w Afryce, drzewa liściaste...
- szukaj słów o różnych znaczeniach, ale złożonych z podobnych liter (leśnik i naleśnik, miłość i ość, Wojciech i ojciec)...
- wybierz dość długie słowo, np. UKŁADANKA, i twórz zbiór słów składających się z tych samych liter...
- graj w SCRABBLE.



## ☐ To warto mieć

Gra w SCRABBLE to jedna z popularniejszych gier świata. Dostajesz zbiór liter i masz tworzyć słowa, korzystając z liter składających się na już ułożone na planszy słowa. Czyli układasz, a do tego liczysz – dodajesz punkty, zgarniasz premie, kombinujesz, co się najbardziej optaca. To gra, w której język nierozzerwalnie łączy się z matematyką.



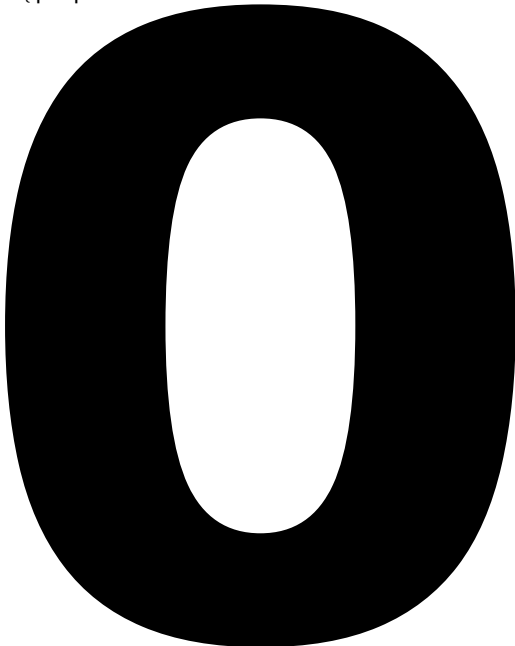


# Zero, nieskończoność, liczby ujemne – wyzwania dla wyobraźni

Liczby rozciągają się od minus nieskończoności przez zero do plus nieskończoności. I jest ich nieskończenie wiele. Każda liczba dodatnia ma swój odpowiednik – liczbę do niej przeciwną. Liczby przeciwne dodane do siebie dają zero. Także zero ma liczbę przeciwną. Liczbą przeciwną do zera jest zero. Zero nie ma znaku – nie jest ani plus, ani minus. Zero jest zerem, jedynym i niepowtarzalnym. Wieki trwało zanim matematycy uznali zero, historia jego ustalania się jest fascynująca, warto kiedyś poczytać. Nie było też łatwo naszym przodkom z liczbami ujemnymi. No bo niby w naturze, na pierwszy rzut oka ich nie ma, a jednak są. Na skomplikowane definicje i teorie przyjdzie czas, póki co chodzi o intuicję. Dzieci doskonale wyczuwają i rozumieją pojęcia abstrakcyjne, szczególnie, gdy znają ich znaczenie z języka codziennego. Pewnie nie ma naukowych badań ilościowych, ale jest duże prawdopodobieństwo, że ogromna większość dzieci (i nie tylko dzieci) na pytanie: „Co to jest zero?” odpowie: „Nic”. I wszystko jasne. „Co to jest nieskończoność?” – „Jak coś się nigdy nie kończy, albo wieczność, albo kosmos”. A liczby ujemne? – być może padnie odpowiedź: „To coś, co było, a nie ma, albo ile czegoś brakuje, albo jak głęboki jest Rów Mariański, albo że jest zimno”. Każda odpowiedź dobra na początek.

## Ekspresja

Jak wyobrażasz sobie zero? A jak nieskończoność? To tajemnicze symbole, mają w sobie coś z magii – na pewno są niepowtarzalne, więc nie są pospolite.



Wyobraź sobie, jak mogłyby wyglądać, jakie mają cechy, charakter. Nadaj im cechy ludzkie albo wręcz przeciwnie – nieczłowiecze, fantastyczne.

## Pytania filozoficzne

Czy nic może być czymś? Takie pytanie zaprzętało głowy starożytnych greckich filozofów. Fizycy mają pełno roboty z zerem i nieskoń-

czonością. Stawiają tezy, dociekają. Być może świat powstał z niczego? Czy rozszerza się w nieskończoność?

Pofilozofuj i ty na temat zera, nieskończoności, czyli po prostu pomyśl o tych pojęciach.

## Synonimy zera

Matematyka ma swój język, konkretny i jednoznaczny. Już to wiesz. A język potoczny ma swoje środki wyrazu. Też to wiesz i na co dzień słyszysz, używasz. Pojęcie zera w odniesieniu do braku czegoś, (a nie do poziomu intelektualnego, moralnego jakiejś osoby, bo to najpopularniejsze użycie, choć ma ponad 100 synonimów, nie dotyczy matematyki :) ma

określenia pozwalające inaczej wyrazić znaczenie słowa.

Wymyśl jak najwięcej takich określeń – w różnych odniesieniach.

Podpowiedzi: nic, nic a nic, ani trochę, nikt, wcale, pustynia, plaża, jest pusto, pustka, próżnia, za darmo, ani, ani, kompletnie nic, ani trochę, nicość, nul, bez zmian, nie ma itd.

## Rachunki z zerem

Jak zero wpływa na wynik podstawowych działań matematycznych? Trzeba sprawdzić. To chyba oczywiste, że jeżeli do czegokolwiek dodasz zero tego czegokolwiek, albo odejmiesz zero tego czegokolwiek, to nic się nie zmieni

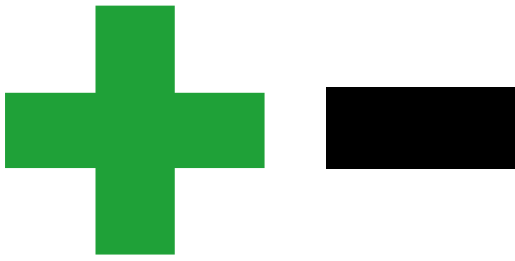
” **Matematyka:  
przytąpywanie  
nieskończoności na  
gorącym uczynku**

Stefan Napierski





– będzie tyle, ile było. Możesz poćwiczyć na misce cukierków albo na czymkolwiek innym – wynik gwarantowany. Dzielić przez zero się nie da. A co z mnożeniem przez zero?



Wymyśl przykłady mnożenia przez zero, fantastyczne albo z życia wzięte, mogą być śmieszne. Zwróć uwagę na różnicę w opisie sytuacji, gdy używasz określenia zero i tak normalnie nazywając rzeczy słowami, np.: „nie ma”, „nikt”, „ani kawałka”. Bo przecież nikt nie mówi, że je zero kawałków jabłek, tylko że nie zjadł ani kawałka jabłka. Nikt nie powie, że ma zero wolnych pótek, tylko że nie ma wolnych pótek. Nie chwalimy się, że przyszło zero gości, tylko smucimy, że nikt nie przyszedł.

Co na przykład? Wyobraź sobie takie sytuacje:

- pięć razy dziennie jesz kawałek jabłka, czyli w ciągu dnia zjadasz 5 kawałków jabłka. Co będzie, jeśli: zero razy zjesz kawałek jabłka albo pięć razy zjesz zero kawałków jabłka? Ile kawałków zjesz w każdej sytuacji?
- w pokoju masz cztery półki, na każdej półce stoi 10 książek, czyli na wszystkich półkach stoi 40 książek. Co będzie, jeśli w pokoju masz zero półek? Albo, jeżeli na każdej półce będzie stało zero książek? Ile książek będzie w tych wypadkach na półkach w twoim pokoju?
- masz urodziny, kupujesz ciastka. Zapraszasz gości, każda z sześciu zaproszonych osób zjada po dwa ciastka. Czyli w sumie goście zjedli 12 ciastek. Ile ciastek zjedzą goście w dwóch scenariuszach: przychodzi zero gości (może zapomnieli?) albo każdy z gości zjada po zero ciastek (np. bo bardzo smakował im tort)?
- i tak dalej, i tak dalej

## □ Coraz mniej, czyli coraz więcej?

Jedna z podstawowych reguł brzmi: **nie dzielimy przez zero!** Nie wierzysz, spróbuj na kalkulatorze. Każdy kalkulator odmówi współpracy i bezlitośnie wskaże: ERROR (czyli BŁĄD). Spróbuj podzielić tę samą liczbę przez takie prawie zero, czyli bardzo, bardzo małą liczbę – zero z wieloma zerami po przecinku, np. 0,0000001. I co? Kalkulator pokaże gigantyczną liczbę jako odpowiedź. Jak to ogarnąć?

No to wyobraź sobie (tylko nie czepiaj się szczegółów) – to teoretyczne rozważania, co się dzieje praktycznie, gdy dzielimy przez coraz mniejszą liczbę :).

- Masz worek, a tam nieskończenie wiele groszków groszku cukrowego. Na ile dni starczy

# „Dla wielkiego istnieje zawsze jeszcze większe

## Anaksagoras

- groszku? A to zależy, jak zwykle. Jak sprawa wygląda w zależności od scenariusza zjadania:
- Zapraszasz 9 gości i częstujesz ich groszkiem – każdy z was – ty i 9 gości – zje po 1/10 groszku.
  - Zapraszasz jednego gościa, jest was dwóch/dwie/dwoje – każde z was zje połowę, czyli po 1/2 groszku.
  - Postanawiasz z nikim się nie dzielić – zjadasz groszek sama/sam. Zjesz cały groszek, czyli 1/1 groszku.
  - A teraz inny scenariusz – jesz sama/sam, ale masz pomysł, żeby dzielić groszek na więcej dni.
  - Idziesz na dietę i dasz radę zjeść tylko połowę groszku. Co się okazuje? Groszek starczy ci na dwa dni.
  - Znudzili ci się groszek, możesz zjeść tylko 1/10 worka na raz. Super! Groszek wystarczy na 10 dni. I tak dalej.

Jaki wniosek? Im na mniejsze części dzielisz, tym dłużej starcza. Ale jest granica – podzielić na zero – no nie da się!

## □ Dlaczego nie dzielimy przez zero?

Jak formalnie tłumaczy to matematyka, a ściślej algebra?

Spróbuj podzielić 5 przez 0. Wynikiem musiałaby być taka liczba, która po pomnożeniu przez 0 da 5. Ale takiej liczby po prostu nie ma, bo każda znana nam liczba pomnożona przez 0 daje w wyniku 0. Z kolei, gdyby chcieć dzielić 0 przez 0, każda liczba mogłaby być dobrym wynikiem, bo dowolna liczba pomnożona przez 0 daje 0. Gdy wyniku działania nie da się ustalić jednoznacznie, to też nie jest do przyjęcia w matematyce. Zatem przez zero po prostu nie da się dzielić.

Jasne? Proste? Rozumiesz? Zapamiętaj.

## □ Zero w języku

Zero to nie tylko nic, to symbol – początku, braku. Często sięgamy do istoty zera w różnych

potocznych kontekstach. Co, odrywając się od ścisłych matematycznych pojęć, możemy przekazać, odnosząc się do pojęcia zero?

Jak rozszyfrujesz te związki frazeologiczne z zerem w roli głównej:

- Mieć zero poczucia humoru
- Zaczynać od zera
- Mam zero czasu
- Grupa krwi 0
- Patrzeć na świat zero-jedynkowo
- Zero tolerancji
- Ostrzyć się na zero
- Jesteś zerem!
- Godzina zero
- Każde dziecko musi pójść do zerówki
- Zabytek klasy zerowej

# 0 RH

## □ Zero to zero

Zero nie jest otwarte na negocjacje – albo zero, albo coś. A jak zero to nic. Matematyka na serio zajmuje się poważnymi sprawami. Zero też jest poważne. Potocznie, ale tylko w języku nieformalnym, bo matematycy mają formalne określenia, zerem określa się zbiór pusty i zdarzenie niemożliwe.

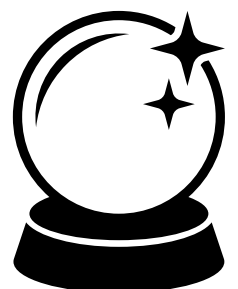
Wymyślaj przykłady zbiorów pustych i zdarzeń niemożliwych. Rób to w formie zabawy, prowokacyjnie, na wesoło.

Zbiory puste (możesz się nie zgodzić):

- organizmy, który żyją wiecznie
- ludzie, którzy wiedzą wszystko na każdy temat
- kolory, które podobają się wszystkim
- góry, które mają ponad 10 000 m n.p.m.

Zdarzenia niemożliwe (możesz się nie zgodzić):

- dojście na piechotę na Księżyc
- powrót do przeszłości
- trafienie 6 w totolotka
- przewidzenie przyszłości





” **Tylko dwie rzeczy są nieskończone: Wszechświat oraz ludzka głupota, choć nie jestem pewien co do tej pierwszej**

**Albert Einstein**

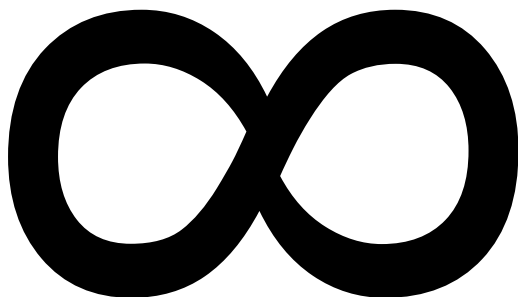
### Zero bezwzględne

Czy zero może być bezwzględne? Może. Inaczej nazywa się je absolutnym. Takie kategorię nazwy są uzasadnione. Jest to, według teorii naukowych – choć nigdy nie udało się takiej temperatury uzyskać w żadnym laboratorium – najniższa temperatura możliwa do osiągnięcia w kosmosie, która wynosi  $-273^{\circ}\text{C}$ . Minus!

Czy to się mieści w ludzkiej głowie? Jaką najniższą temperaturę pamiętasz? Czy w twoim odczuciu było bardzo zimno?

### Nieskończoność wkoło nas

Zbiory nieskończone mogą być policzalne albo niepoliczalne. Policzalne to takie, których elementy dałoby się ponumerować – np., choć trudno to sobie wyobrazić w praktyce, ziarnka piasku albo krople wody, albo zbiór liczb naturalnych (bo nie ma największej liczby, zawsze jest kolejna, większa). Niepoliczalne to np. zbiór liczb rzeczywistych, bo ten zbiór jest ciągły, jego elementów nie da się ponumerować, albo zbiór punktów na prostej.



Spróbuj wyobrazić sobie coś prawdziwie nieskończonego. Tu nie ma żadnej podpowiedzi. Każdy musi sam to wymyślić.

### Co może być nieskończone

Schodząc na ziemię do języka potocznego: co może być zwyczajnie nieskończone?

Śledź tropy nieskończoności w codziennych rozmowach. Nie będzie ich nieskończenie wiele.

A tak dla przykładu:

- Ciągnąć coś w nieskończoność
- Można na ciebie czekać w nieskończoność
- Być nieskończenie beznadziejnym, wdzięcznym, cierpliwym itp.

### Praktyczne ćwiczenia z nieskończoności

Wiele jest ćwiczeń, zadań, paradoksów absorbujących filozofów od starożytności.

Przemyśl dwie drogi do wyobrażenia nieskończoności. Która ci bardziej pasuje? Którą „nieskończoność” łatwiej sobie zobrazować?

- wyobraź sobie, że zaczynając od 0 albo od 1, jak chcesz, stawiasz liczby – jedna za drugą, każda kolejna jest większa od poprzedniej o 1. Pomijając czas i miejsce, jakie zajmie ci taka praca, dlaczego miałabyś/miałbyś kiedykolwiek skończyć? Przecież zawsze potrafimy dopisać kolejną liczbę o 1 większą.
- wyobraź sobie, że masz jakiś odcinek – bez znaczenia jakiej długości. Podziel go w myślach na pół. A potem każde pół znowu na pół. A potem każdy kolejno powstały odcinek znów na pół. Czy kiedyś zabraknie odcinków do podziału?

### „Leniwa ósemka”

Matematyka posługuje się symbolami, inaczej nie dałoby się wykonywać obliczeń. Gdybyśmy zamiast znaku „+” musieli za każdym razem pisać „dodaj” albo zamiast „=” pisałibyśmy „równa się”, to działania arytmetyczne pochłaniałyby znacznie więcej czasu, bez sensu. Stąd skróty, symbole matematyczne, którymi posługują się ludzie na całym świecie i rozumieją się bez słów. Jest ich wiele. Jednym z nich jest symbol nieskończoności „ $\infty$ ” – taka ósemka, tylko w poziomie, zwana też „leniwą ósemką” (bo sobie leży). Minus nieskończoność poprzedza znak minus ( $-\infty$ ).

Abstrahując od nieskończoności, ten symbol bardzo przydaje się w ćwiczeniach usprawniających pracę mózgu, koordynację ręka-oko – regularnie rysuj „leniwe ósemki” prawą ręką, lewą ręką, obiema, na kartce, tablicy albo w powietrzu. Pełny opis ćwiczeń znajdziesz w internecie. Czy możesz je rysować w nieskończoność?

### Ciekawostka

Czy symbol nieskończoności coś ci przypomina, jakiś kształt?

Podpowiedź: leżąca ósemka jest też syntezą graficzną wstęgi Möbiusa. Sprawdź.

### Co łączy nieskończoność z internetem?

Prawie wiek temu amerykański matematyk Edward Kasner poprosił dziewięcioletniego siostrzeńca, żeby wymyślił nazwę bardzo duuuuużej liczby. Młody pomyślał i wypalił: „googol”. To rzeczywiście duuuuuża liczba, choć nadal nie jest nieskończonością – możesz spróbować zapisać – wystarczy jedynka i sto zer. I teraz pytanie – czy widzisz związek nazwy liczby z nazwą najpopularniejszej wyszukiwarki internetowej Google? To nie do końca przypadek, chociaż trochę nim jest. Poczytaj, dowiesz się, o co chodziło.



Wymyśl nazwę na jeszcze większą liczbę albo na jakąś konkretną, którą wybierzesz z nieskończonej liczby kandydatek. Może w przyszłości przyda się do nazwania czegoś wielkiego?

### Dług, czyli minus

Hinduscy matematycy nie tylko dali początek działowi matematyki znanemu jako algebra, odkryli również liczby ujemne. Co ciekawe, liczby ujemne nazywali, w swoim ówczesnym języku, „długiem”, a dodatnie „majątkiem”.

Jak myślisz, skąd takie skojarzenia? Czy słyszysz na co dzień te słowa: kredyt, dług, pożyczka, zadłużenie, minus na koncie, wziąć na kreskę (czyli z minusem z przodu)? Każde z tych określeń wiąże się z „minusem” na koncie, czyli, jak wiedzieli już Hindusi, jest „długiem”, czymś, co trzeba spłacić, oddać.

Przykłady z życia:

- Chcesz kupić misia, który kosztuje 7 zł. Masz tylko 5 zł. Brakuje 2 zł. Co począć? Chcesz mieć misia, musisz pożyczyć od kogoś 2 zł. Jak pożyczysz, musisz oddać. Do tego czasu masz minus 2 zł.
- Rodzice wzięli kredyt w banku na samochód. Co miesiąc spłacają raty. Dopóki nie spłacą



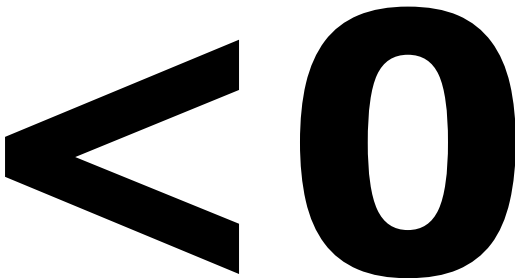


ostatniej, mają w banku dług – czyli mają minus na koncie.

- Idziesz do zaprzyjaźnionego warzywniaka po marchewkę. Nie masz przy sobie pieniędzy, ale znają cię tam i darzą zaufaniem. Bierzesz marchewkę „na kreskę” – dopóki nie oddasz, masz dług.
- Dostajesz tygodniówkę, powiedzmy 10 zł. W tym tygodniu chcesz kupić coś za 15 zł. To okazja! Pożyczasz od rodziny 5 zł, dołożysz i będzie akurat. Ale za tydzień kolejna tygodniówka będzie niższa – dostaniesz tylko 5 zł. Rodzina odejmie te 5 zł od wypłaty.

## □ Mniej niż zero i nie tylko

Gdzie są minusy w otoczeniu? Wbrew pozorom liczby ujemne są obecne w naszym życiu na potęgę. Wystarczy nastawić radar i wyłapywać sytuacje związane z „minusami”.



Szukaj i znajdź przykłady liczb ujemnych.

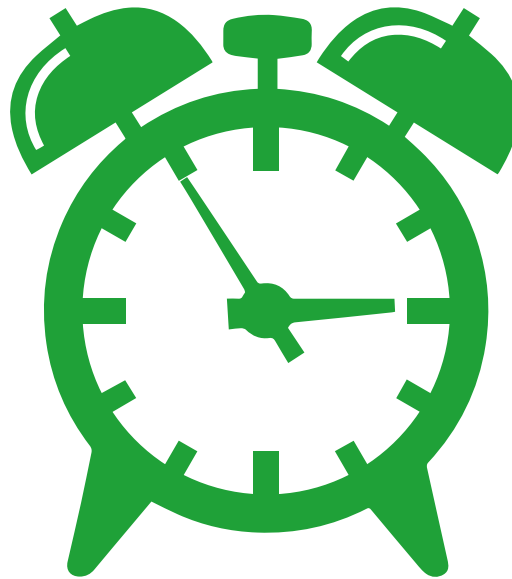
Najbardziej oczywiste to:

- **ujemna temperatura** w zamrażalniku (bez tego nie ma mowy o lodach w upalny dzień) albo zimą ( $-5^{\circ}\text{C}$ ).
- **ujemny poziom** – oznaczenie pięter w windzie – parter to zwykle poziom 0, piętra poniżej poziomu terenu prawdopodobnie oznaczone będą jako -1, -2 (mogą to być poziomy nazwane literacko – poziom łódki, poziom nurka).
- **ujemne pieniądze**, czyli każde pożyczone lub wzięte na kredyt, są wyrażane w liczbach ujemnych. Gdy pożyczyciś/pożyczyłeś od kogoś np. 20 złotych, to oznacza, że musisz je oddać, choćby wyjmując ze skarbonki. Czyli już nie masz tyle, ile masz, ale mniej o tyle, ile musisz oddać, czyli np. minus 20 zł.
- **ujemny wynik finansowy**, czyli strata. Gdy zarobisz 10 złotych, np. za sprzątnięcie ogródka, będziesz mieć zysk. Ale jeżeli będziesz mieć koszty przewyższające wyngrodzenie, np. za 12 złotych kupisz worki na śmieci, będziesz mieć stratę – dołożysz 2 zł. Na marginesie, strata czasami się opłaca: być może dzięki zakupowi worków na śmieci masz szansę na kolejne zlecenia. Wtedy twój koszt jest inwestycją, a minus szybko zamieni się w plus.
- **ujemny czas**, czyli czas miniony – gdy mówimy, że coś zdarzyło się 5 minut temu albo rok temu, w praktyce posługujemy się

# ” Zdolność myślenia nie zna granic

Albert Jacquard

liczbami ujemnymi (choć nie powiemy przecież, że minus dwa lata temu byliśmy nad morzem). Czas można przedstawić na osi liczbowej – teraz to zero, jesteśmy w tym punkcie, przyszłość wyrazimy liczbami dodatnimi, przeszłość jako liczby ujemne. Często w ten sposób przedstawia się chronologicznie ważne daty z przeszłości.



- **ujemny wiek** – „...jeśli w chwili narodzenia mamy 0 lat, to w chwili poczęcia mamy mniej więcej minus 9 miesięcy”. Źródło: [www.sjp.pl](http://www.sjp.pl), Mirosław Bańko, PWN.
- **ujemne położenie**, czyli każdy punkt na powierzchni ziemi ma swoją wysokość, a odniesieniem zawsze jest poziom morza. Giewont ma 1895 metrów wysokości nad poziomem morza (w skrócie: 1895 m n.p.m.). Wiadomo – góra. Ale są tereny, które leżą poniżej poziomu morza – ich wysokość oznaczamy z minusem, czyli np. najniższy punkt na terenie Polski leży na Żuławach na wysokości (- 1,8) m n.p.m. W takim wypadku mówimy nie o wysokości, a o depresji.
- **ujemna zawartość** spizarni/lodówki – wszystko, co rodzina zje, można określić jako liczbę ujemną – było 5 jabłek, jest jedno. Potocznie powiemy, że zjedzono 4 jabłka, matematycznie możemy określić zmianę stanu jako minus 4 jabłka. W misce było 10 herbatników, jest 5. Ktoś zjadł 5 herbatników. A zatem ubyło 5, czyli jest minus 5 w stosunku do wyjściowej zawartości miski. I tak ze wszystkim. Oczywiście na co dzień tak nie mówimy, ale można się tak zabawić, żeby utrwalić „minusy”.

- **ujemne ceny?** Nie ma cen ujemnych, rabat oznacza zmniejszenie ceny, czyli odejście pewnej kwoty, ale nie zamianę ceny na ujemną. Faktycznie obniżki, promocje mówią nam, że produkt kupimy taniej, czyli cena została obniżona, np. o 20 zł. Jak to zapisać? Oczywiście minus 20 zł.



- **ujemne kilogramy.** Kto się odchudza, z napięciem patrzy na wagę i liczy: minus jeden, minus dwa, minus trzy kilogramy. A cel zwykle jest bardziej ambitny – minus pięć, minus dziesięć, minus dwadzieścia kilogramów. I wielu osiąga sukces!
- **ujemne punkty** – na przykład w grach planszowych, gdy trafisz na pole z karą, możesz dostać kilka ujemnych punktów, musisz się cofnąć np. 5 pól, czyli twoja pozycja się pogarsza (-5 pól).
- **ujemne okulary** – wiele osób, by lepiej widzieć z daleka, musi nosić okulary, to tak zwane „minusy”.
- **ujemny czas odtworzenia** – narzędzia do prezentacji filmów, podcastów mają oś podglądu, która pokazuje w jakim momencie prezentacji jesteśmy. Na jednym końcu osi zegar pokazuje, ile filmu, audycji już za nami, na drugim, ile jeszcze zostało do końca. Zwykle jeden czas poprzedzony jest znakiem „-” i jako liczba ujemna informuje, ile już odtworzyliśmy albo ile czasu pozostało do końca.
- co jeszcze...?

## □ A co nie może być ujemne?

Niektóre rzeczy mogą mieć wartość ujemną, ale wiele nie może – osiągają poziom 0 i dalej ani rusz. Ciekawy temat dotyczy numeracji lat – nie ma roku zerowego. Mówimy o pierwszym roku naszej ery oraz że rok wcześniej był pierwszy rok przed naszą erą.

Ciekawe, jakie przykłady przyjdą ci na myśl? Pomyśl na wesoło, nawet absurdalnie.

Na przykład: naładowanie baterii, ilość napoju w pustej butelce, liczba książek na półce, poziom benzyny w baku samochodu, Fryderyk 0 Wspaniały itd.





## 5 ćwiczeń uruchamiających wyobraźnię

Matematyka jest bezlitosna – daje nam pewne, niepodważalne informacje, których byśmy nie przewidzieli. Zmierz się śmiało ze znanymi przykładami, przy których analizie musisz oderwać się od rzeczywistych możliwości, ale w granicach wyobraźni. Powodzenia.

### 1. Składamy serwetkę

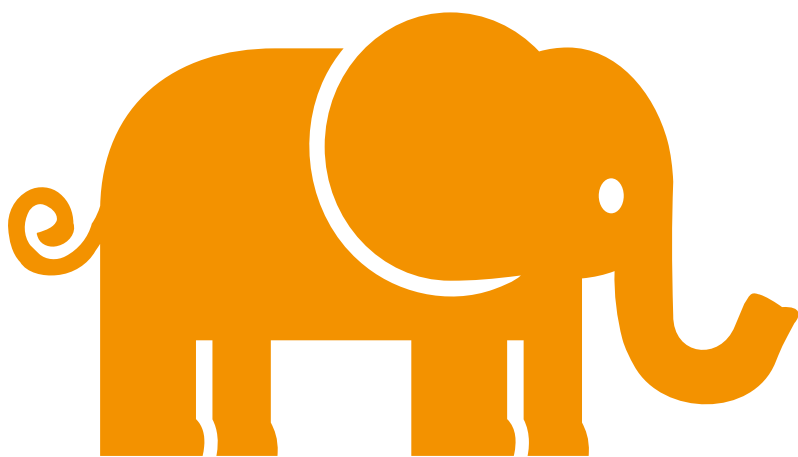
Weź jak najcieńszą serwetkę. Złóż wzdłuż krawędzi na pół, potem znowu na pół, powtarzaj, dopóki jest to możliwe. Wyobraź sobie, że składasz ją w sumie 50 razy (w rzeczywistości uda ci się pewnie 8 razy) – za każdym razem na pół. Jak ci się wydaje – jaką grubość/długość ma tak złożona serwetka?

### 2. Siadamy przy stole

Wyobraź sobie, że na urodziny zapraszasz gości. Będzie ich 12. Jak ich posadzić przy stole? Kogo posadzić koło kogo? A może mały eksperyment? Niech każdy spróbuje usiąść koło każdego, w różnych konfiguracjach. Załóż, że jedna zmiana miejsc zajmie tylko 1 sekundę. Za jaki czas goście zasiądą po raz ostatni?

### 3. Czy słoń może przejść przez znaczek pocztowy?

Jak to? Niemożliwe! Co za pomysł? A jednak nie jest to łatwe, ale jest możliwe. Pomyśl, jak to zrobić.



### 4. Zapłata za szachy

Perski władca bardzo się nudził. Ogłosił, że zapłaci dowolną kwotę za grę, która mu się spodoba. Konkurs wygrał twórca szachów. Pewnie był matematykiem, więc skromnie zażądał wynagrodzenia w ziarenkach pszenicy. Król miał zapłacić pszenicą zgodnie z zasadą – na pierwszym polu jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim cztery i tak dalej, podwajając liczbę na kolejnych polach, a jak wiadomo jest ich 64. Ile było tych ziarenek? Czy król dał radę zapłacić?

### 5. Referendum

Wyobraź sobie miasto, w którym mieszka milion mieszkańców. Władze miasta organizują referendum. Każdy mieszkaniec obowiązkowo musi zagłosować, wrzucając do urny kulkę w jednym z dwóch kolorów (jedne na TAK, drugie na NIE, ale to nie ma znaczenia). Każda kulka ma średnicę 1 cm. Jak myślisz, niech podpowie ci wyobraźnia, jak duża powinna być urna, by zmieściło się w niej 1 000 000 kulek?

## Ciekawe książki o matematyce i nie tylko. Polecamy opiekunom i dzieciom:



- Ball J., „Matemagicy. Jak ze wszystkiego wyczarować matematykę”, National Geographic 2012
- Bogusz L., Zarzycki P., Zieliński J., „Łamigłówki logiczne” t. 1 i 2. Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe 2000
- Braun M., Mach M., „Zdolne dziecko. Pierwsza pomoc”, Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci
- Dahl K., Lepp M., „Matematyka ze sznurka i guzika”, Zakamarki 2013
- Dambeck H., „Im więcej dziur, tym mniej sera”, Wydawnictwo Naukowe PWN 2012
- De Bono E., „Naucz swoje dziecko myśleć”, Świat Książki 1992
- „Delta”, redakcja miesięcznika, „Czy umiecie się dziwić?”, Wydawnictwa Alfa 1984
- Drösser Ch., „Matematyka. Daj się uwieść”, Wydawnictwo Naukowe PWN 2011
- Drösser Ch., „Logika. Daj się uwieść”, Wydawnictwo Naukowe PWN 2016
- Dzierzgowska I., „Jak uczyć metodami aktywnymi”, Wydawnictwo Fraszka Edukacyjna 2011
- Elwes R., „Matematyka... i już”, Dom Wydawniczy PWN 2013
- Fuchs W. R., „Matematyka popularna”, Wiedza Powszechna 1972
- Gelb M. J., „Myśleć jak Leonardo da Vinci”, Rebis 2001
- Gelb M. J., Miller Caldicott S., „Myśleć jak Edison”, Rebis 2010
- Gruszczak-Kolczyńska E., Zielińska E., „Dziecięta matematyka dwadzieścia lat później”, CEBP 24.12 2015
- Korczak J., „Jak kochać dziecko”, Jacek Santorski & Co 2004
- Kowal S., „Przez rozrywkę do wiedzy”, WNT 1986
- Klus-Stańska D., Nowicka M., „Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej”, WSiP 2005
- Lehmann I., Posamentier A. S., „Niezwykłe liczby Fibonacciego”, Prószyński Media 2014
- Makiewicz M., „Elementy kultury matematycznej w fotografii”, Uniwersytet Szczeciński 2017
- Marcinkowska M., „Mała orkiestra. Przewodnik dla dzieci o muzyce”, Papiilon
- Sawyer W. W., „Matematyka jest nauką przyjemną”, Wiedza Powszechna 1972
- Sternberg R. J., Spewar-Sweling L., „Jak nauczyć dzieci myślenia”, Gdańskie Wydawnictwo Pedagogiczne 2003
- Stewart I., „Gabinet matematycznych zagadek”, Wydawnictwo Literackie 2008
- Szmidt K. J., „Trening kreatywności”, Helion 2008

1. Ponad 60 milionów kilometrów (Księżyc od Ziemi dzieli niespełna 400 000 kilometrów!)
2. Ponad 15 lat
3. Trzeba znaczek złożyć na pół i bardzo gęsto pociąć (nie przecinając do końca!) raz z jednej strony, raz z drugiej, prostopadle do linii zgięcia. Potem delikatnie rozłożyć. I już.
4. 18 446 744 073 709 551 616
5. 1 metr x 1 metr x 1 metr, czyli metr sześcienny





# Myślenie ma kolosalną przyszłość, czyli jakie metody ćwiczenia wybierać

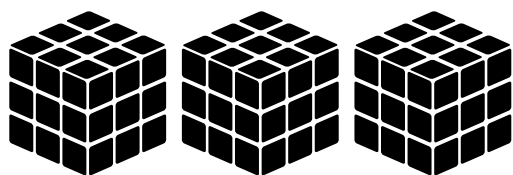
**”Większość naszych wielkich wynalazków i genialnych osiągnięć zawdzięczamy lenistwu, czy to narzuconemu, czy dobrowolnemu. Umysł nasz lubi być karmiony, jak łyżeczką, pomysłami innych ludzi, jeśli się go jednak pozbawi tej pożywki, zaczyna, zrazu niechętnie, myśleć samodzielnie, a tego rodzaju myślenie, proszę pamiętać, jest myśleniem oryginalnym i może przynieść bardzo cenne rezultaty**

Agatha Christie

## Co warto robić?

Człowiek rozwija się tylko, gdy jest aktywny. Dzieci mają niespożyte pokłady energii, szkoda byłoby je zmarnować. Chodzi o to, żeby dziecko uczyło się w akcji, w czasie zabawy, robiąc coś, najlepiej to, co je naturalnie zainteresowało. Na co dzień warto (na pewno nie zaszkodzi) w rodzinnym gronie inicjować zajęcia tego typu:

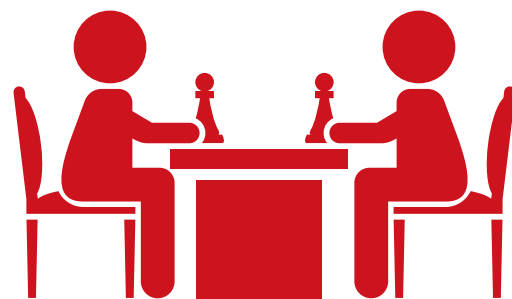
- Głośno wspólnie czytać
- Szukać matematycznych motywów i fotografować je
- Szacować – ile jest, jakie jest długie, ile to waży, na jak długo wystarczy, ile trwa, ile potrzeba...
- Rozwiązywać zagadki logiczne z różnych zbiorów, też z Internetu
- Oglądać iluzje optyczne i zgłębiać perspektywę
- Rozwiązywać szarady, krzyżówki, sudoku, rebusy i inne gry
- Wymyślać skojarzenia
- Układać układanki płaskie i przestrzenne z klocków, papieru (origami, siatki brył)
- Układać kostkę Rubika



- Rysować mapy myśli
- Grać w gry planszowe
- Wiązać węzły i je rozwiązywać
- Zadziwiać się
- Tworzyć hipotezy, stawiać tezy, dociekać ich sensu
- Tworzyć definicje własnymi słowami

- Grać w DIXIT
- Poszukiwać symetrii
- Udawać detektywa, tropić tajemnicze zdarzenia
- Grać w kości i karty
- Rozglądać się wkoło, rejestrować zmiany
- Tworzyć autorskie gry planszowe
- Budować konstrukcje z klocków, z odpadów przeznaczonych do recyklingu
- Układać zagadki, zadania
- Rozwiązywać zadania na inteligencję (z Mensy)
- Wyodrębniać i łączyć w całość (elementy, przedmioty, pojęcia)
- Odkrywać reguły, prawidłowości, analogie
- Grać w masterminda
- Rozwiązywać problemy, szukać rozwiązań
- Ćwiczyć fizycznie, uprawiać ulubiony sport
- Wyszukiwać podobieństwa, różnice
- Poznawać nowe pojęcia, słowa, szukać synonimów, bawić się językiem polskim
- Zadawać nawet najbardziej naiwne pytania
- Ćwiczyć spostrzegawczość
- Dobierać skutki do przyczyn i odwrotnie
- Stawiać pytania filozoficzne
- Planować, hierarchizować (tworzyć macierze)
- Myśleć krytycznie i konstruktywnie
- Wchodzić w różne role, odgrywać scenki
- Przewidywać: co by było, gdyby...
- Poznawać ciekawe fakty, czytać o interesujących rekordach
- Szukać nowych zastosowań różnych przedmiotów
- Żonglować trzema piłeczkami
- Myśleć abstrakcyjnie, tworzyć abstrakcje

- Tropić logikę i brak logiki w mowie
- Tworzyć algorytmy codziennych czynności
- Tworzyć zbiory i manipulować ich elementami (choćby w myślach)
- Eksperymentować
- Rysować, kreślić w powietrzu
- Układać bajki, dykteryjki, dowcipy
- Rozwiązywać i wymyślać quizy
- Prowadzić własne badania naukowe
- Robić teatr cieni
- Liczyć, co się da, „po swojemu”
- Porównywać różne rzeczy pod różnymi kątami, według różnych kryteriów
- Rozmawiać o wszystkim
- Urządzać teatr i oddawać matematyczne emocje
- Rysować, malować, rzeźbić, tworzyć – różnymi technikami
- Grać w matematyczne kalambury
- Grać w szachy



- Grać na instrumencie, tańczyć, śpiewać, klaskać, stepować, słuchać muzyki
- Czytać książki (nie zapominając o kryminałach odpowiednich do wieku)
- Grać w „słówka”
- Ponudzić się czasami, pomarzyć, pofilozofować, pomyśleć o niebieskich migdałach

## Drodzy Rodzice i Opiekunowie!

Zastanawiacie się, jak pomóc dzieciom w zrozumieniu matematyki? Skończyły się Wasze pomysły? Nie martwcie się, ta książka jest właśnie po to, by wspólnie sięgnąć po nowe inspiracje. Nasze propozycje pomogą całej rodzinie wyruszyć w matematyczną podróż. Spójrzycie na świat wokół Was przez pryzmat matematyki i odkryjecie, że wszystko może być ciekawe. Bez nudnych zadań, bez wzorów, bez rywalizacji. Gwarantujemy mnóstwo zabawy i inspiracji. Drzwi do fascynującego świata matematyki – naszego świata – właśnie się otwierają.



**mFundacja.pl**

ISBN: 978-83-7781-063-7

