PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ

MATEMATYKA – POZIOM ROZSZERZONY

STYCZEŃ 2024

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej *n*–1 punktów (gdzie *n* jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: P1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; P9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi; R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie wartości wyrażenia a^b: $\frac{1}{64}$.
2 pkt – wyznaczenie liczb b oraz a.
1 pkt – wyznaczenie liczby a: $\frac{1}{8}$
ALBO
wyznaczenie liczby b: 2.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie

$$a=\left(\tfrac{1}{3}\right)^{\log_9 64}=\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 64}=64^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

$$b=\log_2 3\cdot\log_3 2^2=2\log_2 3\cdot\log_3 2=2\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2$$

Wobec tego $a^b=\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$.

[1] Rozporządzenie MEiN z 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024, DZ.U. poz.1246.

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: P5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ oraz $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$; P7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej […]. II. Wyrażenia algebraiczne. P1) Zdający stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – uzasadnienie, że z założenia wynika nierówność, że $y \leqslant 1$

ALBO

zaznaczenie w układzie współrzędnych zbiorów rozwiązań dwóch nierówności: $x^2+y^2 \leqslant 1$ oraz $y \leqslant x^2+1$.

1 pkt – zapisanie układu nierówności $y^2 \leqslant x^2+y^2$ oraz $y \leqslant |y|$

ALBO

zapisanie, że nierówność $y \leqslant x^2+1$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej $y < 0$

ALBO

narysowanie w układzie współrzędnych odpowiednio okręgu i paraboli o równaniach $x^2+y^2=1$, $y=x^2+1$

ALBO

zapisanie, że z założenia wynika: $x \in [-1,1]$ oraz $y \in [-1,1]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

<u>Uwaga</u>

Dowód przeprowadzony sposobem II uznajemy za pełny tylko wtedy, gdy zdający poprawnie sporządzi wykresy nierówności $x^2+y^2 \leqslant 1$ oraz $x^2+y^2 \leqslant 1$ i zapisze, że koło jest zawarte w obszarze, którego brzegiem jest parabola i w którym leży środek tego koła.

Rozwiązania

<u>Sposób I</u>

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnione są nierówności
$y^2 \leqslant x^2+y^2$ oraz $y \leqslant |y|$.

Z pierwszej nierówności wynika, że $y^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$, więc $y^2 \leqslant 1$. Stąd $|y| \leqslant 1$.

Ponieważ $y \leqslant |y|$, więc $y \leqslant |y| \leqslant 1$, czyli $y \leqslant 1$.

Ponieważ $x^2 \geqslant 0$, więc $1 \leqslant 1+x^2$.

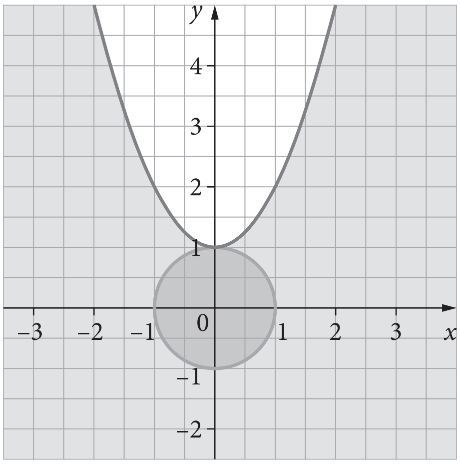
Zatem $y \leqslant 1 \leqslant 1+x^2$.

To kończy dowód.

Sposób II

Niech x i y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2 + y^2 \leqslant 1$. To oznacza, że każda para liczb (x, y) spełniająca tę nierówność wyznacza współrzędne punktu należącego do koła o środku $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 1$.

Zauważmy, że parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Obszar leżący pod parabolą jest opisany nierównością $y \leqslant x^2 + 1$ (wraz z brzegiem tego obszaru). Okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$, a w konsekwencji i koło opisane nierównością $x^2 + y^2 \leqslant 1$, są zawarte w tym obszarze. Zauważmy, że jedynym punktem wspólnym paraboli i okręgu jest punkt $(0,1)$, co oznacza, że ze wszystkich par (x, y) liczb rzeczywistych spełniających założenie nierówności z tezy zachodzi równość tylko dla pary $(0,1)$.



To kończy dowód.

Sposób III

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $y < 0$ i dowolnej liczby rzeczywistej x nierówność $y \leqslant x^2 + 1$ jest prawdziwa.

Zauważmy także, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $y > 1$ nierówność $x^2 + y^2 \leqslant 1$ jest fałszywa.

Pozostaje zatem wykazać prawdziwość wynikania dla $y \in \langle 0,1 \rangle$.

Ale wówczas $y \leqslant 1$. Skoro $x^2 \geqslant 0$, to $1 \leqslant 1 + x^2$. Zatem $y \leqslant 1 \leqslant 1 + x^2$.

To kończy dowód.

Sposób IV

Z założenia wynika, że $x \in [-1,1]$ oraz $y \in [-1,1]$.

Skoro $x \in [-1,1]$, to $x^2 \in [0,1]$. Stąd $x^2 + 1 \in [1,2]$.

Skoro $y \in [-1,1]$, to $y \leqslant 1 \leqslant x^2 + 1$.

To kończy dowód.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	III. Równania i nierówności. R5) Zdający analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów. IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. P2) Zdający posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, […]). XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. R2) Zdający stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej.

Zasady oceniania

3 pkt – wyznaczenie wartości parametru spełniającego warunki zadania, $m = 3\frac{3}{4}$.

2 pkt – zapisanie równania co najmniej jednej ze stycznych (sposób I),

np. $y = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\right)$

ALBO

wykorzystanie warunku prostopadłości i zapisanie równania z niewiadomą m (sposób II),

np. $2\sqrt{4-m} \cdot \left(-2\sqrt{4-m}\right) = -1$

ALBO

zapisanie równania z jedną niewiadomą m, np. $1^2 - 4(4-m) = 0$ (sposoby III i IV).

1 pkt – zapisanie współczynnika kierunkowego co najmniej jednej z szukanych stycznych, 1 lub -1

ALBO

zapisanie równania prowadzącego do wyznaczenia odciętej punktów styczności,

np. $\left(2x_0\right) \cdot \left(-2x_0\right) = -1$ albo $x_0^2 + m - 4 = 0$

ALBO

zapisanie, że szukane styczne są symetryczne względem osi Oy układu współrzędnych, więc z ich prostopadłości wynika, że kąt między osią Oy a każdą z tych stycznych jest równy $45°$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga

Jeżeli zdający, rozpatrując równanie kwadratowe $x_0^2 + m - 4 = 0$, nie zapisze, że dla $m > 4$ równanie jest sprzeczne, lub nie stwierdzi, że dla wyznaczonej wartości $m = \frac{15}{4}$ otrzymane proste są szukanymi stycznymi, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.

Rozwiązania

Sposób I

Równanie pęku prostych przechodzących przez punkt $P=(0,m)$ ma postać $y=ax+m$, oprócz prostej o równaniu $x=0$, która nie jest styczna do paraboli, bo jest jej osią symetrii. Oznaczmy przez A_1, A_2 punkty, w których szukane proste z pęku są styczne do danej paraboli. Ponieważ punkt P leży na osi symetrii paraboli, więc jeśli $A_1=(x_0, x_0^2+4)$, to $A_2=(-x_0, x_0^2+4)$.
Pochodna funkcji $f(x)=x^2+4$ określonej dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$ jest równa $f'(x)=2x$ dla $x\in\mathbb{R}$. Z geometrycznej interpretacji pochodnej wynika, że $a=f'(x_0)$. Wobec tego współczynniki kierunkowe stycznych poprowadzonych przez punkty A_1 i A_2 są równe odpowiednio $2x_0$ i $-2x_0$.
Warunek prostopadłości tych stycznych prowadzi do równania

$$(2x_0)\cdot(-2x_0)=-1,$$
$$x_0^2=\tfrac{1}{4}.$$

Stąd $x_0=\frac{1}{2}$ lub $x_0=-\frac{1}{2}$.
Równania stycznych można więc zapisać jako:

$$y=\left(2\cdot\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+4\right) \quad \text{oraz} \quad y=\left(2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+4\right),$$

czyli

$$y=x+3\tfrac{3}{4} \quad \text{oraz} \quad y=-x+3\tfrac{3}{4}.$$

Zatem $m=3\frac{3}{4}$.

Sposób II

Równanie pęku prostych przechodzących przez punkt $P=(0,m)$ ma postać $y=ax+m$, oprócz prostej o równaniu $x=0$, która nie jest styczna do paraboli, bo jest jej osią symetrii. Niech A będzie punktem styczności paraboli i stycznej. Wtedy $A=(x_0, x_0^2+4)$ oraz $A=(x_0,\ ax_0+m)$.
Pochodna funkcji $f(x)=x^2+4$ określonej dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$ jest równa $f'(x)=2x$ dla $x\in\mathbb{R}$. Z geometrycznej interpretacji pochodnej wynika, że $a=f'(x_0)=2x_0$, więc $A=(x_0,\ 2x_0\cdot x_0+m)$. Przyrównując rzędne punktu A, otrzymujemy równanie

$$x_0^2+4=(2x_0)\cdot x_0+m,$$
$$x_0^2+m-4=0$$

z niewiadomą x_0 i parametrem m. Jeśli $m>4$, to równanie jest sprzeczne; jeśli $m=4$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x_0=0$, a jeśli $m<4$, to otrzymujemy

$$x_0^2-\left(\sqrt{4-m}\right)^2=0,$$
$$\left(x_0-\sqrt{4-m}\right)\left(x_0+\sqrt{4-m}\right)=0.$$

Stąd $x_0=\sqrt{4-m}$ lub $x_0=-\sqrt{4-m}$.
Zatem współczynniki kierunkowe szukanych stycznych to $a_1=2\sqrt{4-m}$ oraz $a_2=-2\sqrt{4-m}$.
Z warunku prostopadłości stycznych otrzymujemy równanie

$$2\sqrt{4-m}\cdot\left(-2\sqrt{4-m}\right)=-1,$$
$$4(4-m)=1,$$
$$m=3\tfrac{3}{4}<4.$$

Sposób III

Równanie pęku prostych przechodzących przez punkt $P=(0,m)$ ma postać $y=ax+m$, oprócz prostej o równaniu $x=0$, która nie jest styczna do paraboli, bo jest jej osią symetrii. Żadna prosta z tego pęku nie jest równoległa do osi symetrii paraboli, więc jest styczna do paraboli, jeśli ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny, a więc jeśli układ równań

(1) $y=x^2+4$ i $y=ax+m$

z dwiema niewiadomymi x i y ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Stąd otrzymujemy równanie

$$x^2+4=ax+m,$$

$$(2)\quad x^2-ax+4-m=0$$

z jedną niewiadomą x i parametrami a i m.
Układ (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie, a więc wtedy, gdy wyróżnik trójmianu po lewej stronie tego równania jest równy 0, czyli

$$(-a)^2-4(4-m)=0,$$

$$a^2-4(4-m)=0.$$

Jeśli $m>4$, to otrzymane równanie z niewiadomą a i parametrem m jest sprzeczne; jeśli $m=4$, to równanie ma tylko jedno rozwiązanie $a=0$, a jeśli $m<4$, to równanie ma rozwiązania a_1, a_2. Są to współczynniki kierunkowe szukanych stycznych. Te styczne są prostopadłe, więc $a_1\cdot a_2=-1$. Zatem ze wzoru Viète'a na iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego otrzymujemy równanie

$$-4(4-m)=-1.$$

Stąd

$$m=3\tfrac{3}{4}<4.$$

Sposób IV

Oś Oy układu współrzędnych jest osią symetrii paraboli o równaniu $y=x^2+4$, więc szukane styczne są symetryczne względem osi Oy. Są one również prostopadłe, więc kąt między osią Oy a każdą z tych stycznych jest równy $45°$. To oznacza, że współczynniki kierunkowe szukanych stycznych są równe 1 i -1. Obie te styczne przechodzą przez punkt $P=(0,m)$, więc ich równania mają postać $y=x+m$ i $y=-x+m$.
Styczna do paraboli ma z tą parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, a więc układ równań

$$(1)\quad y=x^2+4 \quad \text{i} \quad y=x+m$$

z dwiema niewiadomymi x i y ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Stąd otrzymujemy równanie

$$x^2+4=x+m,$$

$$(2)\quad x^2-x+4-m=0$$

z jedną niewiadomą x i parametrem m.
Układ (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie, a więc wtedy, gdy wyróżnik trójmianu po lewej stronie tego równania jest równy 0, czyli

$$1^2-4(4-m)=0,$$

$$4m-15=0,$$

$$m=\tfrac{15}{4}=3\tfrac{3}{4}.$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VI. Ciągi. Zdający: P4) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; P5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; P6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – wyznaczenie szukanej wartości ilorazu ciągu geometrycznego: $q = 3$.
2 pkt – zapisanie równania z niewiadomymi a_1, q w postaci iloczynowej: $a_1(q-1)(q-3) = 0$
ALBO
wyznaczenie różnicy r (lub iloczynu $3r$) ciągu arytmetycznego w zależności od b_1, np. $3r = 2b_1$.
1 pkt – wykorzystanie własności ciągów i zapisanie równania z dwiema niewiadomymi, np. $a_1 q^2 = 4a_1 q - 3a_1$ albo $(b_1 + 3r)^2 = b_1 \cdot (b_1 + 12r)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy przez *r* różnicę ciągu arytmetycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n): pierwszy, drugi i trzeci, są odpowiednio pierwszym, czwartym i trzynastym wyrazem ciągu arytmetycznego (b_n), więc otrzymujemy

$$a_1 = b_1 \quad \text{i} \quad a_2 = b_4 \quad \text{i} \quad a_3 = b_{13}.$$

Stąd i ze wzorów na n-ty wyraz ciągu geometrycznego i n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 = b_1 \quad \text{i} \quad a_1 q = b_1 + 3r \quad \text{i} \quad a_1 q^2 = b_1 + 12r.$$

Stąd

$$3r = a_1 q - a_1 \quad \text{i} \quad a_1 q^2 = a_1 + 4 \cdot 3r.$$

Zatem

$$a_1 q^2 = a_1 + 4 \cdot (a_1 q - a_1),$$
$$a_1 q^2 = 4a_1 q - 3a_1,$$
$$a_1 q^2 - 4a_1 q + 3a_1 = 0,$$
$$a_1(q^2 - 4q + 3) = 0,$$
$$a_1(q-1)(q-3) = 0.$$

Ciąg (a_n) jest rosnący i $a_1 > 0$, więc $q \neq 1$. Zatem $q = 3$.

Sposób II

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n): pierwszy, drugi i trzeci, są odpowiednio pierwszym, czwartym i trzynastym wyrazem ciągu arytmetycznego (b_n), więc otrzymujemy

$$a_1 = b_1 \quad \text{i} \quad a_2 = b_4 \quad \text{i} \quad a_3 = b_{13}.$$

Stąd i ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 = b_1 \quad \text{i} \quad a_2 = b_1 + 3r \quad \text{i} \quad a_3 = b_1 + 12r.$$

Wtedy

$$(b_1 + 3r)^2 = b_1 \cdot (b_1 + 12r),$$
$$6b_1 r + 9r^2 = 12b_1 r,$$
$$9r^2 = 6b_1 r,$$
$$r(3r - 2b_1) = 0.$$

Ponieważ ciąg (a_n) jest rosnący, więc $r \neq 0$. Zatem $3r = 2b_1$ oraz $q = \frac{b_1 + 3r}{b_1} = \frac{b_1 + 2b_1}{b_1} = 3$.

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	VII. Trygonometria. P3) Zdający stosuje twierdzenie cosinusów […]. VIII. Planimetria. Zdający: P8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; R3) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania sposobów rozwiązania: I, II i III

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – uzasadnienie, że dwie pary trójkątów są przystające – ECK i GCL oraz GCL i GBL (sposób I)

ALBO

obliczenie długości $|CE|$ w zależności od długości a boku kwadratu $ABCD$, np. $a^2(2+\sqrt{3})$, oraz wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równości pozwalającej wyznaczyć długość boku GB, np. $|GB|^2 = a^2 + |CE|^2 - 2a \cdot |CE| \cdot \cos 75^\circ$ (sposób II)

ALBO

zapisanie współrzędnych trzech wektorów: $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BF}$ i $\overrightarrow{CG}$ lub ich długości w zależności od a, np. $\overrightarrow{BG} = \left[a(2+\sqrt{3}),\ a\right]$, $\overrightarrow{BF} = \left[a(1+\sqrt{3}),\ -a(1+\sqrt{3})\right]$, $\overrightarrow{CG} = \left[a(2+\sqrt{3}),\ -a\right]$.

1 pkt – uzasadnienie, że trójkąty ECK i GCL są przystające (sposób I)

ALBO

uzasadnienie, że trójkąty GCB i FEB są przystające (sposób II)

ALBO

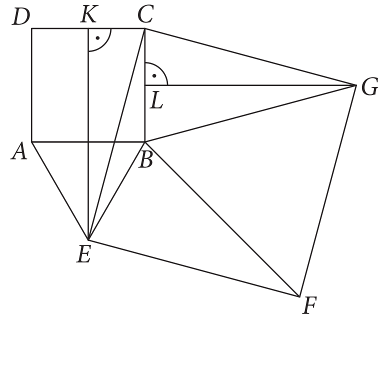
wyznaczenie współrzędnych wierzchołków G i F (sposób III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązania

Sposób I

Poprowadźmy odcinki EK i GL prostopadłe do odcinków odpowiednio CD i BC takie, żeby punkt K leżał na odcinku CD, a punkt L – na odcinku BC (jak na rysunku).



Punkt K jest środkiem odcinka CD, gdyż trójkąt ABE jest równoboczny. Czworokąty $ABCD$ i $CEFG$ to kwadraty, więc $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle GCE| = 90°$. Stąd wynika, że

$$|\sphericalangle ECK| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle GCE| - |\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle GCL|,$$

co oznacza, że kąty ostre przy wierzchołku C w trójkątach prostokątnych ECK i GCL mają tę samą miarę.
Przeciwprostokątne tych trójkątów mają takie same długości, ponieważ są one bokami kwadratu $CEFG$. Z cechy kbk wnioskujemy, że te trójkąty są przystające.
Stąd wynika, że $|CL| = |CK|$, ale $|CK| = \frac{1}{2}|CD|$, więc $|CL| = \frac{1}{2}|BC|$, bo $|BC| = |CD|$.
To oznacza, że trójkąty prostokątne GCL i GBL są przystające (cecha bkb). Wobec tego $|CG| = |BG| = |FG|$.
Trójkąt BCE jest równoramienny, więc $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BEC|$. Zatem

$$|\sphericalangle BEF| = 90° - |\sphericalangle BEC| = 90° - |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BCG|.$$

Ta równość oraz równości $|BE| = |BC|$ i $|EF| = |CG|$ oznaczają, że trójkąty BEF i BCG są przystające. Wobec tego $|BG| = |BF|$. Wykazaliśmy więc, że $|FG| = |BG| = |BF|$.
To kończy dowód.

Sposób II
Trójkąt CBE jest równoramienny, gdyż $|CB| = |BE|$. Ponieważ $|\sphericalangle CBE| = 90° + 60° = 150°$, to $|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle CEB| = 15°$.
Zatem $|\sphericalangle GCB| = 90° - |\sphericalangle ECB| = 75°$ oraz $|\sphericalangle FEB| = 90° - |\sphericalangle CEB| = 75°$.
Z cechy bkb wynika więc, że trójkąty GCB i FEB są przystające, skąd wynika równość $|FB| = |GB|$.
Oznaczmy długość boku kwadratu $ABCD$ przez a. Wtedy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta CBE otrzymujemy $|CE|^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 150° = 2a^2(1 + \cos 30°) = a^2(2 + \sqrt{3})$.
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta CBG wynika

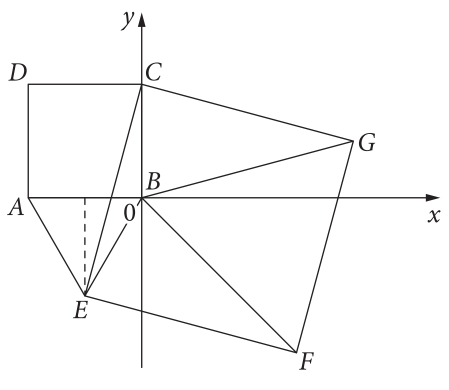
$$|GB|^2 = a^2 + |CE|^2 - 2a \cdot |CE| \cdot \cos 75° = a^2 + a^2(2 + \sqrt{3}) - 2a \cdot a\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

czyli

$$|GB|^2 = a^2\left(1 + 2 + \sqrt{3} - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= a^2\left(3 + \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}\right) =$$
$$= a^2\left(3 + \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot 4(2 - \sqrt{3})}\right) =$$
$$= a^2\left(3 + \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot 4(2 - \sqrt{3})}\right) =$$
$$= a^2\left(3 + \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{4}\right) = a^2(2 + \sqrt{3}) = |CE|^2.$$

Zatem $|GB| = |CE|$, co oznacza, że trójkąt FBG jest równoboczny.
To kończy dowód.

Sposób III
Umieśćmy rozpatrywane figury w układzie współrzędnych tak, żeby $A = (-2a, 0)$, $B = (0,0)$ i $C = (0, 2a)$, gdzie $a > 0$.



Wtedy $E=\left(-a,\ -a\sqrt{3}\right)$, gdyż trójkąt ABE jest równoboczny. Zatem
$\overrightarrow{EC}=\left[0-(-a),\ 2a-\left(-a\sqrt{3}\right)\right]=\left[a,\ a\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$.
Czworokąt $CEFG$ jest kwadratem, więc wektory $\overrightarrow{EC}$ i $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{EF}$ są prostopadłe i mają takie same długości. Wobec tego $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{EF}=\left[a\left(2+\sqrt{3}\right),\ -a\right]$, ale $\overrightarrow{CG}=\left[x_G-0,\ y_G-2a\right]$,
a $\overrightarrow{EF}=\left[x_F-(-a),\ y_F-\left(-a\sqrt{3}\right)\right]$, więc

$$x_G=a\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{ i }\ y_G-2a=-a\ \text{ i }\ x_F+a=a\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{ i }\ y_F+a\sqrt{3}=-a,$$
$$x_G=a\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{ i }\ y_G=a\ \text{ i }\ x_F=a\left(1+\sqrt{3}\right)\ \text{ i }\ y_F=-a\left(\sqrt{3}+1\right),$$

czyli $G=\left(a\left(2+\sqrt{3}\right),\ a\right)$ i $F=\left(a\left(1+\sqrt{3}\right),\ -a\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$.

Obliczmy współrzędne wektorów $\overrightarrow{BG}$ i $\overrightarrow{BF}$.

$$\overrightarrow{BG}=\left[a\left(2+\sqrt{3}\right)-0,\ a-0\right]=\left[a\left(2+\sqrt{3}\right),\ a\right],$$
$$\overrightarrow{BF}=\left[a\left(1+\sqrt{3}\right)-0,\ -a\left(1+\sqrt{3}\right)-0\right]=\left[a\left(1+\sqrt{3}\right),\ -a\left(1+\sqrt{3}\right)\right].$$

Obliczmy zatem długości wektorów $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BG}$ i $\overrightarrow{BF}$.

$$\left|\overrightarrow{CG}\right|=\sqrt{\left(a\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2+(-a)^2}=a\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}=2a\sqrt{2+\sqrt{3}},$$
$$\left|\overrightarrow{BG}\right|=\sqrt{\left(a\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2+a^2}=a\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}=2a\sqrt{2+\sqrt{3}},$$
$$\left|\overrightarrow{BF}\right|=\sqrt{\left(a\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(-a\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2}=a\sqrt{2\left(1+2\sqrt{3}+3\right)}=2a\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Ponieważ $\left|\overrightarrow{FG}\right|=\left|\overrightarrow{CG}\right|=\left|\overrightarrow{BG}\right|=\left|\overrightarrow{BF}\right|$, więc trójkąt FBG jest równoboczny.
To kończy dowód.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VII. Trygonometria. Zdający: R5) korzysta z wzorów na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie równania $\frac{\sin(2x)}{2}=\sin^2 x-\sin x$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$: $x=-\pi$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\frac{\sin(2x)}{2}=\sin^2 x-\sin x$ w zbiorze $\mathbb{R}$
ALBO
zapisanie alternatywy $\sin x=0$ lub $\sin x-\cos x=1$ i rozwiązanie równania $\sin x-\cos x=1$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\pi$, $x=\pi$
ALBO
zapisanie alternatywy $\cos x+1=0$ lub $\sin x+\cos x=1$ i rozwiązanie równania $\sin x+\cos x=1$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$: $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

2 pkt – zapisanie alternatywy $\sin x=0$ lub $\sin x-\cos x=1$ i rozwiązanie równania $\sin x=0$ w zadanym przedziale: $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$
ALBO
zapisanie alternatywy $\sin x=0$ lub $\sin x-\cos x=1$ i przekształcenie równania $\sin x-\cos x=1$ do postaci $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
ALBO

zapisanie alternatywy $\cos x+1=0$ lub $\sin x+\cos x=1$ i rozwiązanie równania $\cos x+1=0$ w zadanym przedziale: $x=-\pi,\ x=\pi$

ALBO

zapisanie alternatywy $\cos x+1=0$ lub $\sin x+\cos x=1$ i przekształcenie równania $\sin x+\cos x=1$ do postaci $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1 pkt – zapisanie równania w postaci iloczynowej: $\sin x\cdot\left(\cos x-\sin x+1\right)=0$ lub $\left(\cos x+1\right)\cdot\left(\sin x+\cos x-1\right)=0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga

Jeśli zdający, rozwiązując równanie $\sin x-\cos x=1$ lub $\sin x+\cos x=1$, podnosi je stronami do kwadratu i wyznacza rozwiązania otrzymanego równania, ale nie sprawdza, czy otrzymane rozwiązania są rozwiązaniami równania wyjściowego, to za tę część nie otrzymuje punktów, więc może otrzymać maksymalnie **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Rozwiązania

Sposób I

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta, możemy zapisać równanie w postaci równoważnej

$$\frac{\sin(2x)}{2}=\sin^2 x-\sin x,$$
$$\sin x\cdot\cos x=\sin x\left(\sin x-1\right),$$
$$\sin x\cdot\left(\cos x-\sin x+1\right)=0.$$

Równanie jest równoważne alternatywie: $\sin x=0$ lub $\sin x-\cos x=1$.
Rozwiązaniem równania $\sin x=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba $x=k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Zatem w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ równanie ma trzy rozwiązania: $x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi$.
Rozwiążmy równanie $\sin x-\cos x=1$.
Mnożąc obie strony równania przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$, otrzymujemy kolejno równania równoważne

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba x taka, że

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \text{lub} \quad x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Stąd

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{lub} \quad x=\pi+2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Zatem w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ to równanie ma trzy rozwiązania: $x=-\pi,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.
W rezultacie równanie $\frac{\sin(2x)}{2}=\sin^2 x-\sin x$ ma w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ cztery rozwiązania: $x=-\pi,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.

Uwagi:

1. Równanie $\sin x-\cos x=1$ można przekształcić do postaci $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ na wiele sposobów, np. można zapisać je w postaci
$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1,$$
aby ze wzoru na różnicę sinusów otrzymać
$$2\cos\frac{x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\cdot\sin\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}=1,$$
$$2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)=1,$$
$$\sin\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Równanie $\sin x-\cos x=1$ można rozwiązać, zapisując układ równań
$$\begin{cases}\sin x-\cos x=1\\ \sin^2x+\cos^2x=1\end{cases}.$$

Ponieważ $\sin x=\cos x+1$, to $(\cos x+1)^2+\cos^2x=1$.
Prowadzi to do równania $2\cos^2x+2\cos x=0$, które można zapisać w postaci iloczynowej:
$2\cos x\cdot(\cos x+1)=0$.
Równanie jest równoważne alternatywie: $\cos x=0$ lub $\cos x=-1$.
Dla $\cos x=0$ otrzymujemy $\sin x=\cos x+1=1$, a dla $\cos x=-1$ będzie to
$\sin x=\cos x+1=0$.
Szukamy zatem takich liczb w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$, dla których $\begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}$ lub $\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=-1\end{cases}$.
Rozwiązaniem pierwszego z tych układów w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba postaci $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Rozwiązaniem drugiego z tych układów w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba postaci $x=(2k+1)\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Zatem w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ równanie $\sin x-\cos x=1$ ma trzy rozwiązania: $-\pi$, $\frac{\pi}{2}$, π.

<u>Sposób II</u>
Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta, możemy zapisać równanie w postaci równoważnej
$$\frac{\sin(2x)}{2}=\sin^2x-\sin x,$$
$$\sin x\cdot\cos x=1-\cos^2x-\sin x,$$
$$\sin x\cdot(\cos x+1)+\cos^2x-1=0,$$
$$\sin x\cdot(\cos x+1)+(\cos x+1)\cdot(\cos x-1)=0,$$
$$(\cos x+1)\cdot(\sin x+\cos x-1)=0.$$
Równanie jest równoważne alternatywie: $\cos x+1=0$ lub $\sin x+\cos x=1$.
Rozwiązaniem równania $\cos x+1=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba $x=\pi+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Zatem w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ równanie ma dwa rozwiązania: $x=-\pi$, $x=\pi$.
Rozwiążmy równanie $\sin x+\cos x=1$.
Po pomnożeniu obu stron równania przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$ otrzymujemy kolejno równania równoważne:
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Rozwiązaniem tego równania w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba x taka, że
$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad\text{lub}\quad x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \text{gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$
Stąd
$$x=2k\pi \quad\text{lub}\quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \text{gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$
Zatem w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ równanie to ma dwa rozwiązania: $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.
W rezultacie równanie $\frac{\sin(2x)}{2}=\sin^2x-\sin x$ ma w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ cztery rozwiązania:
$x=-\pi$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$.

Uwagi:

1. Równanie $\sin x + \cos x = 1$ można przekształcić do postaci typu $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ na wiele sposobów, np.
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
2. Równanie $\sin x + \cos x = 1$ można rozwiązać, zapisując układ równań $\begin{cases}\sin x + \cos x = 1\\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\end{cases}$.
Ponieważ $\sin x = 1 - \cos x$, to $\left(1 - \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1$.
Prowadzi to do równania $2\cos^2 x - 2\cos x = 0$, które można zapisać w postaci iloczynowej: $2\cos x \cdot \left(\cos x - 1\right) = 0$.
Równanie jest równoważne alternatywie: $\cos x = 0$ lub $\cos x = 1$.
Dla $\cos x = 0$ otrzymujemy $\sin x = 1 - \cos x = 1$, a dla $\cos x = 1$ zaś $\sin x = 1 - \cos x = 0$.
Szukamy więc takich liczb w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$, dla których $\begin{cases}\sin x = 1\\ \cos x = 0\end{cases}$ lub $\begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = 1\end{cases}$.
Rozwiązaniem pierwszego z tych układów w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba postaci $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Rozwiązaniem drugiego z tych układów w zbiorze $\mathbb{R}$ jest każda liczba postaci $x = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Zatem w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ równanie $\sin x + \cos x = 1$ ma dwa rozwiązania: 0, $\frac{\pi}{2}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania […].	III. Równania i nierówności. R5) Zdający analizuje równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów. IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: P4) posługuje się równaniem okręgu $\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 = r^2$; P5) oblicza odległość punktu od prostej; R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zasady oceniania

4 pkt – wyznaczenie liczb a i b: $a = 15$ i $b = 20$ lub $a = 20$ i $b = 15$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. $a\left(35 - a\right) = 300$ lub $35 - a - \frac{300}{a} = 0$, lub $\frac{300}{a} = \frac{10\left(a-5\right)}{a-10}$.

2 pkt – wykorzystanie wzoru na odległość punktu od prostej i zapisanie równania dwóch zmiennych, np. $\left|5a + 5b - ab\right| = 5\sqrt{a^2 + b^2}$, oraz równania opisującego pole trójkąta w zależności od zmiennych a i b, np. $\frac{1}{2}ab = 150$

ALBO

wykorzystanie wzoru na pole trójkąta opisanego na okręgu o danym promieniu i zapisanie równania dwóch zmiennych, np. $150 = 5\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, oraz równania opisującego pole trójkąta w zależności od zmiennych a i b, np. $\frac{1}{2}ab = 150$

ALBO

wykorzystanie wzoru na tangens podwojonego argumentu i zapisanie zależności między liczbami a i b, np. $\frac{b}{a} = \frac{10(a-5)}{a^2-10a}$, oraz równania opisującego pole trójkąta w zależności od zmiennych a i b, np. $\frac{1}{2}ab = 150$.

1 pkt – zapisanie równania opisującego pole trójkąta w zależności od zmiennych a i b, np. $\frac{1}{2}ab = 150$, oraz równania prostej AB, np. $y = -\frac{b}{a}x + b$

ALBO

wykorzystanie wzoru na tangens podwojonego argumentu i zapisanie zależności między liczbami a i b, np. $\frac{b}{a} = \frac{10(a-5)}{a^2-10a}$.

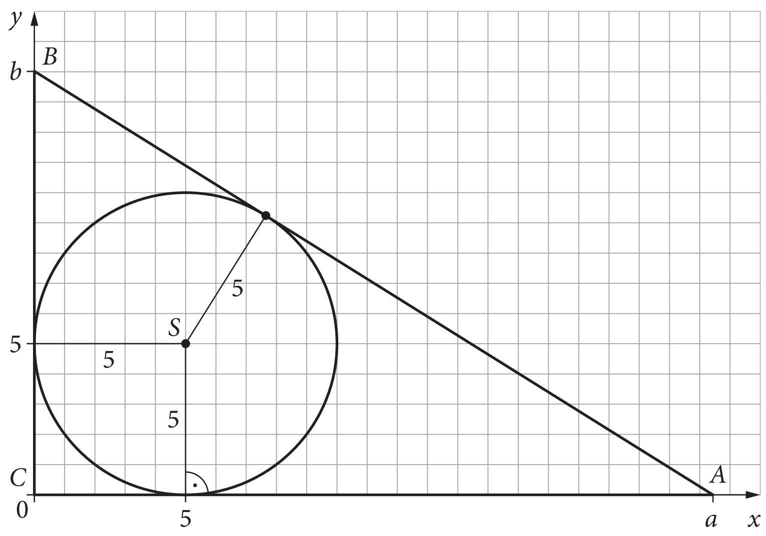
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeśli zdający odgadnie lub w inny sposób poda oba rozwiązania zadania i sprawdzi jego założenia (w szczególności obliczy promień okręgu wpisanego), to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający tylko zapisze dwa takie rozwiązania, bez sprawdzenia, że spełnione są warunki zadania, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeśli zdający poda oba rozwiązania zadania, korzystając z punktów kratowych, to otrzymuje **2 punkty**. Jeśli ponadto poprawnie uzasadni, że zadanie nie może mieć więcej rozwiązań, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.

Rozwiązania

Sposób I



Pole trójkąta ABC jest równe 150, więc $\frac{1}{2}ab = 150$, zatem $ab = 300$.
Z twierdzenia o długości odcinków stycznych do okręgu wynika, że
$|AB| = (a-5)+(b-5) = a+b-10$.
Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$(a+b-10)^2 = a^2+b^2.$$

Stąd

$$2ab-20a-20b+100=0,$$
$$2\cdot 300-20a-20b+100=0,$$
$$-20(a+b)=-700,$$
$$a+b=35,$$
$$b=35-a.$$

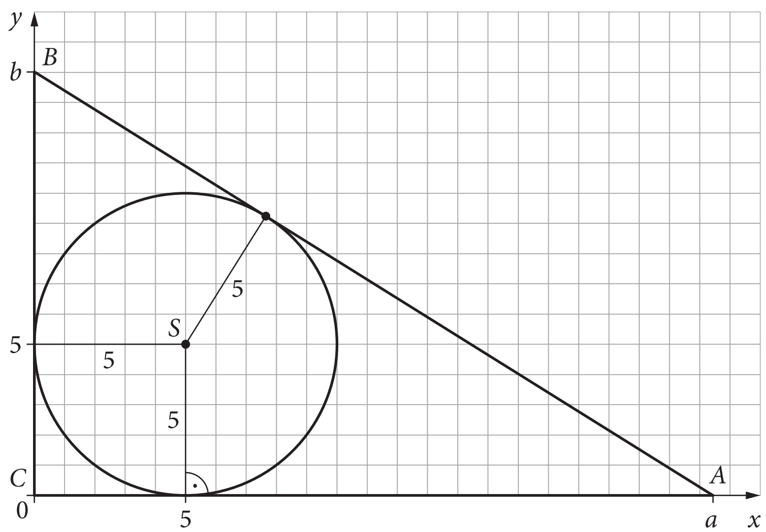
Podstawiając otrzymaną zależność do równania $ab=300$, otrzymujemy

$$a(35-a)=300,$$
$$a^2-35a+300=0,$$
$$(a-15)(a-20)=0.$$

Zatem $a=15$ lub $a=20$.

Jeśli $a=15$, to $b=35-15=20$, a jeśli $a=20$, to $b=35-20=15$.
Otrzymujemy więc dwie pary szukanych liczb: $a=15$ i $b=20$ oraz $a=20$ i $b=15$.

Sposób II



Pole trójkąta ABC jest równe 150, więc $\frac{1}{2}ab=150$, zatem $ab=300$.

Równanie prostej AB ma postać $y=-\frac{b}{a}x+b$, zatem postać ogólna tego równania ma postać $bx+ay-ab=0$.
Środkiem okręgu o równaniu $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ jest punkt $S=(5,5)$, a promień tego okręgu jest równy 5. Ponieważ odległość środka okręgu od stycznej do tego okręgu jest równa promieniowi okręgu, więc prosta AB będzie styczna do okręgu, jeśli

$$\frac{|5a+5b-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5,$$
$$|5a+5b-ab|=5\sqrt{a^2+b^2}.$$

Stąd i z równości $ab=300$ otrzymujemy

$$|5a+5b-300|=5\sqrt{a^2+b^2},$$
$$|a+b-60|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Obie strony tego równania są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$a^2+b^2+3600+2ab-120a-120b=a^2+b^2,$$
$$3600+2\cdot 300-120a-120b=0,$$

$$4200-120a-120b=0,$$
$$35-a-b=0,$$
$$b=35-a.$$

Podstawiając otrzymaną zależność do równania $ab=300$, otrzymujemy

$$a(35-a)=300,$$
$$a^2-35a+300=0,$$
$$(a-15)(a-20)=0.$$

Zatem $a=15$ lub $a=20$.
Jeśli $a=15$, to $b=35-15=20$, a jeśli $a=20$, to $b=35-20=15$.
Otrzymujemy więc dwie pary szukanych liczb: $a=15$ i $b=20$ oraz $a=20$ i $b=15$.

<u>Sposób III</u>
Korzystając ze wzoru $P=rp$ na pole trójkąta, otrzymujemy

$$150=5\frac{a+b+c}{2},$$
$$60=a+b+c,$$
$$60-c=a+b.$$

Korzystając ze wzoru $r=\frac{a+b-c}{2}$ na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, otrzymujemy

$$5=\frac{a+b-c}{2},$$
$$10=a+b-c,$$
$$10+c=a+b.$$

Stąd $10+c=60-c$, więc $c=25$ i $a+b=35$.
Zatem $b=35-a$.
Podstawiamy otrzymaną zależność do równania $ab=300$ i otrzymujemy

$$a(35-a)=300,$$
$$a^2-35a+300=0,$$
$$(a-15)(a-20)=0.$$

Zatem $a=15$ lub $a=20$.
Jeśli $a=15$, to $b=35-15=20$, a jeśli $a=20$, to $b=35-20=15$.
Otrzymujemy więc dwie pary szukanych liczb: $a=15$ i $b=20$ oraz $a=20$ i $b=15$.

<u>Sposób IV</u>
Korzystając ze wzoru $P=rp$ na pole trójkąta, otrzymujemy

$$150=5\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$
$$60=a+b+\sqrt{a^2+b^2},$$
$$60-(a+b)=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Jeśli $a+b>60$, to równanie jest sprzeczne. Jeśli zaś $0<a+b\leqslant 60$, to obie strony równania są nieujemne, więc możemy je podnieść do kwadratu i otrzymać równanie równoważne

$$3600-120(a+b)+(a+b)^2=a^2+b^2,$$
$$3600-120a-120b+a^2+2ab+b^2=a^2+b^2,$$
$$3600+2ab=120a+120b,$$
$$1800+ab=60a+60b.$$

Pole trójkąta ABC jest równe 150, więc $\frac{1}{2}ab=150$, czyli $ab=300$. Otrzymane poprzednio równanie możemy więc zapisać w postaci

$$1800+300=60a+60b,$$

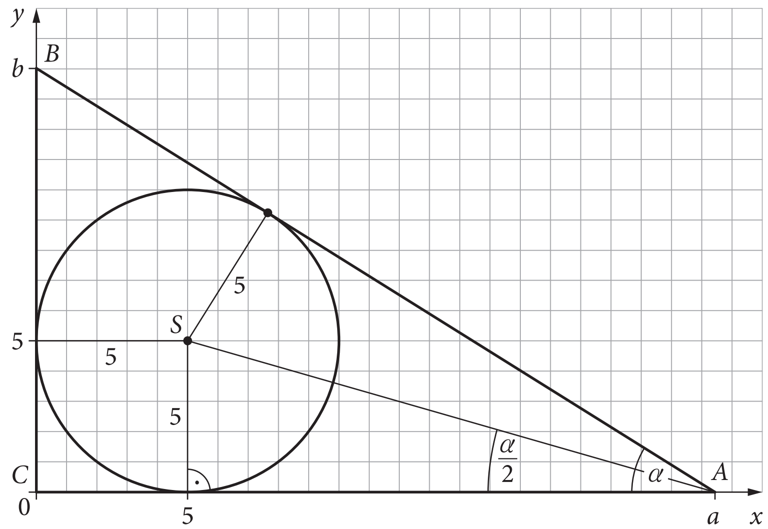
$$2100 = 60a + 60b,$$
$$35 = a + b.$$

Stąd otrzymujemy $b = 35 - a$.
Podstawiamy otrzymaną zależność do równania $ab = 300$ i otrzymujemy

$$a(35 - a) = 300,$$
$$a^2 - 35a + 300 = 0,$$
$$(a - 15)(a - 20) = 0.$$

Zatem $a = 15$ lub $a = 20$.
Jeśli $a = 15$, to $b = 35 - 15 = 20$, a jeśli $a = 20$, to $b = 35 - 20 = 15$.
Otrzymujemy więc dwie pary szukanych liczb: $a = 15$ i $b = 20$ oraz $a = 20$ i $b = 15$.

Sposób V
Środek S okręgu wpisanego w trójkąt to punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąta. Niech α będzie kątem przy wierzchołku A trójkąta ABC.



Wtedy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{a-5}.$$

Ze wzoru na tangens podwojonego kąta otrzymujemy

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{5}{a-5}}{1 - \left(\frac{5}{a-5}\right)^2} = \frac{10}{a-5} \cdot \frac{(a-5)^2}{(a-5)^2 - 25} = \frac{10(a-5)}{a^2 - 10a}.$$

Stąd

$$b = \frac{10(a-5)}{a-10}.$$

Pole trójkąta ABC jest równe 150, więc $\frac{1}{2}ab = 150$, czyli $b = \frac{300}{a}$. Zatem poprzednie równanie możemy zapisać w postaci

$$\frac{300}{a} = \frac{10(a-5)}{a-10},$$
$$\frac{30}{a} = \frac{a-5}{a-10},$$
$$a^2 - 5a = 30a - 300,$$
$$a^2 - 35a + 300 = 0,$$
$$(a - 15)(a - 20) = 0.$$

Zatem $a = 15$ lub $a = 20$.
Jeśli $a = 15$, to $b = \frac{300}{15} = 20$, a jeśli $a = 20$, to $b = \frac{300}{20} = 15$.
Otrzymujemy więc dwie pary szukanych liczb: $a = 15$ i $b = 20$ oraz $a = 20$ i $b = 15$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	I. Liczby rzeczywiste. P2) Zdający przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych. VII. Trygonometria. P3) Zdający stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Zasady oceniania

4 pkt – wyznaczenie szukanych liczb: $p = 2$ i $q = 4$ lub $p = 4$ i $q = 2$.

3 pkt – zapisanie dwóch warunków prowadzących do wyznaczenia szukanych liczb, np.

- $\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} p-1=3 \\ q-1=1 \end{cases}$ w obliczeniach sposobem I

albo

- $p - 1 = 1$ lub $p - 1 = 3$ w obliczeniach sposobem II.

2 pkt – zapisane równości w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych przyrównanego do liczby całkowitej, np. $(p-1)(q-1) = 3$

ALBO

zapisanie równania funkcji q w zależności od p w postaci kanonicznej, np. $q = 1 + \frac{3}{p-1}$.

1 pkt – wykorzystanie wzoru na pole trójkąta w zależności od sinusa kąta między bokami i zapisanie równania prowadzącego do wyznaczenia relacji między wielkościami p i q, np. $(p+2)(q+2)\sin\alpha = 3 \cdot pq\sin\alpha$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązania

Pole równoległoboku o przekątnych długości p oraz q i kącie α między tymi przekątnymi jest równe $\frac{1}{2}pq\sin\alpha$. Pole równoległoboku o przekątnych długości $p+2$ oraz $q+2$ i kącie α między tymi przekątnymi jest równe $\frac{1}{2}(p+2)(q+2)\sin\alpha$. Pole drugiego z tych równoległoboków jest trzy razy większe od pola pierwszego równoległoboku, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{2}(p+2)(q+2)\sin\alpha = 3 \cdot \frac{1}{2}pq\sin\alpha.$$

Stąd

$$(p+2)(q+2) = 3pq,$$
$$pq + 2p + 2q + 4 = 3pq,$$
$$2pq - 2p - 2q - 4 = 0,$$
$$pq - p - q - 2 = 0.$$

Liczby p i q wyznaczamy dwoma sposobami.

<u>Sposób I</u>

$$p(q-1) - (q-1) - 3 = 0,$$
$$(p-1)(q-1) = 3.$$

Liczby p i q są naturalne, a ponieważ 3 jest liczbą pierwszą, więc

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} p-1=3 \\ q-1=1 \end{cases}.$$

Stąd $p = 2$ i $q = 4$ lub $p = 4$ i $q = 2$.

Sposób II

Zauważmy, że warunek $pq - p - q - 2 = 0$ jest równoważny równości $q(p-1) = p + 2$.
Oczywiście dla $p = 1$ otrzymujemy sprzeczność, stąd ostatnią równość możemy przekształcić:

$$q = \frac{p+2}{p-1} = \frac{p-1+3}{p-1} = 1 + \frac{3}{p-1}.$$

Liczby p i q są całkowite, a ponieważ 3 jest liczbą pierwszą, więc liczba $p-1$ musi być dodatnim dzielnikiem liczby 3. Zatem $p-1=1$ lub $p-1=3$.
Stąd otrzymujemy $p=2$ i $q = 1 + \frac{3}{2-1} = 4$ lub $p=4$ i $q = 1 + \frac{3}{4-1} = 2$.

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	XI. Kombinatoryka. Zdający: R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów; R2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych. XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. P1) Zdający oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie szukanego prawdopodobieństwa, $P(A) = \frac{3}{2734375}$ (akceptowane są także postacie $\frac{21}{5^8 \cdot 49}$ oraz $\frac{3}{5^8 \cdot 7}$).

3 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, $5^8 \cdot 49$ (zdający nie musi zapisać liczby $19\,140\,625$, nie może jednak pozostawić w zapisie wyniku ani symbolu Newtona, ani symbolu silni)
ALBO
podanie liczby zdarzeń sprzyjających i liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, także w postaci wyrażenia zawierającego symbol Newtona czy symbol silni, np.
$|\Omega| = 4 \cdot \binom{7}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^4 + 5 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^5$, $|A| = \binom{7}{2}$.

2 pkt – wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających (21) oraz opisanie metody zliczania wszystkich zdarzeń elementarnych i ustalenie ich liczby w jednym z przypadków, np. jeśli na początku stoi cyfra nieparzysta lub na początku stoi cyfra parzysta.

1 pkt – ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających: 21 (akceptowany jest wynik w postaci wyrażenia $\binom{7}{2}$)
ALBO
opisanie metody zliczania wszystkich zdarzeń elementarnych i ustalenie ich liczby w jednym z przypadków, np. jeśli na początku stoi cyfra nieparzysta lub jeśli na początku stoi cyfra parzysta
ALBO
wyznaczenie liczby wszystkich ośmiowyrazowych ciągów złożonych z cyfr, wśród których dokładnie trzy cyfry są nieparzyste, np. $\binom{8}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^5$ (akceptowany jest wynik, w którego zapisie znajdują się symbole kombinatoryczne, np. symbol Newtona).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
Zdarzeniem elementarnym jest wylosowanie liczby ośmiocyfrowej, w której zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste. Ponieważ wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne, więc mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Wyznaczamy najpierw liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

Sposób I
Rozważamy dwa przypadki.
1. Gdy pierwsza cyfra, licząc od lewej strony, jest parzysta. Takich liczb jest

$$4 \cdot \binom{7}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^4,$$

gdyż pierwszą cyfrą może być jedna spośród czterech: $2,\ 4,\ 6$ i 8, na $\binom{7}{3}$ sposobów możemy wybrać trzy miejsca dla cyfr nieparzystych, a na każdym z tych miejsc możemy postawić jedną z pięciu cyfr nieparzystych, wreszcie na pozostałych czterech miejscach możemy postawić jedną z pięciu cyfr parzystych.
2. Gdy pierwsza cyfra, licząc od lewej strony, jest nieparzysta. Takich liczb jest

$$5 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^5,$$

gdyż pierwszą cyfrą może być jedna spośród pięciu cyfr nieparzystych, na $\binom{7}{2}$ sposobów możemy wybrać dwa miejsca dla pozostałych dwóch cyfr nieparzystych, a na każdym z tych miejsc możemy postawić jedną z pięciu cyfr nieparzystych, wreszcie na pozostałych pięciu miejscach możemy postawić jedną z pięciu cyfr parzystych.

Zatem

$$|\Omega| = 4 \cdot \binom{7}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^4 + 5 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^5 = 5^7 \cdot \left(4 \cdot \tfrac{7!}{3! \cdot 4!} + 5 \cdot \tfrac{7!}{2! \cdot 5!}\right) = 5^8 \cdot 49.$$

Sposób II
Ciągów ośmiu cyfr, w których znajdują się dokładnie trzy cyfry nieparzyste, jest

$$\binom{8}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^5,$$

gdyż na $\binom{8}{3}$ sposobów możemy wybrać trzy miejsca dla cyfr nieparzystych, a na każdym z tych miejsc możemy postawić jedną z pięciu cyfr nieparzystych, wreszcie na pozostałych pięciu miejscach możemy postawić jedną z pięciu cyfr parzystych.
Ale wśród takich ciągów cyfr znajdują się takie, które na początku mają cyfrę zero – nie będą one liczbami ośmiocyfrowymi, więc należy je odjąć od otrzymanego wcześniej wyniku. Takich ciągów jest

$$\binom{7}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^4,$$

gdyż pierwszym wyrazem jest cyfra zero, na $\binom{7}{3}$ sposobów możemy wybrać trzy miejsca dla cyfr nieparzystych, a na każdym z tych miejsc możemy postawić jedną z pięciu cyfr nieparzystych, wreszcie na pozostałych czterech miejscach możemy postawić jedną z pięciu cyfr parzystych.
Zatem

$$|\Omega| = \binom{8}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^5 - \binom{7}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^4 = 5^7 \cdot \left(5 \cdot \tfrac{8!}{3! \cdot 5!} - \tfrac{7!}{3! \cdot 4!}\right) = 5^8 \cdot (56 - 7) = 5^8 \cdot 49.$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

W zapisie dziesiętnym takiej liczby muszą wystąpić trzy cyfry 1 i pięć cyfr 0. Ponieważ na pierwszym miejscu nie może być cyfry 0, więc liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa

$$|A| = \binom{7}{2} = \tfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 21,$$

gdyż na pierwszym miejscu musi być cyfra 1, a pozostałe dwie cyfry 1 muszą się znaleźć na którychś dwóch spośród pozostałych siedmiu miejsc.

Można też obliczyć liczbę rozmieszczeń pięciu cyfr 0 na miejscach od drugiego do ósmego. Mamy wtedy

$$|A| = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{21}{5^8 \cdot 49} = \frac{3}{5^8 \cdot 7} = \frac{3}{2734375}.$$

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	X. Stereometria. Zdający: P2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; P4) oblicza objętości i pola powierzchni […] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $9\sqrt{11}$.

3 pkt – obliczenie jednej z wysokości ostrosłupa, $h = \sqrt{33}$, lub wysokości ostrosłupa poprowadzonej na ścianę BCS: $|AE| = \frac{3}{2}\sqrt{11}$.

2 pkt – obliczenie długości $x = \frac{3}{2}$ lub wysokości ściany bocznej: 6.

1 pkt – wykorzystanie podobieństwa trójkątów ADE i SDO i zapisanie równania z niewiadomą x, np. $\frac{x}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4x}$

ALBO

zapisanie, że trójkąty ADE i SDO są podobne, i obliczenie długości odcinka OD $\left(|OD| = \sqrt{3}\right)$

ALBO

wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia x,

np. $\begin{cases} |AE|^2 + |ED|^2 = |AD|^2 \\ |AE|^2 + |ES|^2 = |AS|^2 \\ |BS|^2 = |SD|^2 + |BD|^2 \end{cases}$.

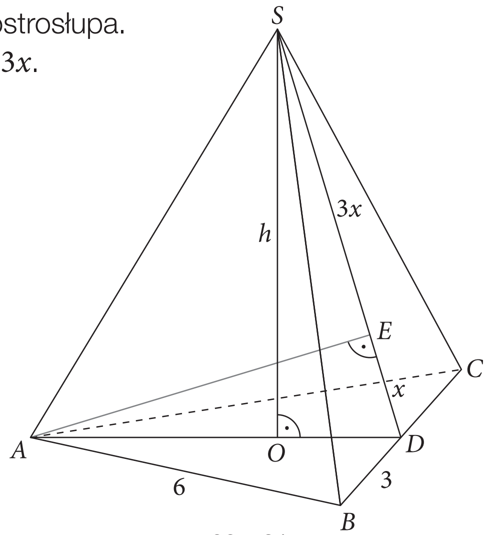
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązania

Sposób I

Poprowadźmy wysokość SO ostrosłupa.

Niech $x = |ED|$. Wtedy $|SE| = 3x$.



Spodek O wysokości SO ostrosłupa jest środkiem ciężkości trójkąta równobocznego ABC o boku długości 6, więc

$$|AD| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad |OD| = \frac{1}{3}|AD| = \sqrt{3}.$$

Trójkąty ADE i SDO są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku D, więc są to trójkąty podobne. Zatem

$$\frac{|ED|}{|AD|} = \frac{|OD|}{|SD|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4x}.$$

Stąd

$$4x^2 = 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3},$$
$$4x^2 = 9$$
$$x = \frac{3}{2}.$$

Wobec tego $|SD| = 4\cdot\frac{3}{2} = 6.$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODS otrzymujemy

$$|SD|^2 = |SO|^2 + |OD|^2,$$
$$6^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2.$$

Stąd

$$h^2 = 36 - 3 = 33,$$
$$h = \sqrt{33}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{33} = 9\sqrt{11}.$$

<u>Uwaga</u>

Po obliczeniu $x = \frac{3}{2}$ oraz $|SD| = 6$ możemy (z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE) obliczyć długość odcinka AE. Jest to wysokość ostrosłupa opuszczona na podstawę BCS. Otrzymujemy

$$|AE|^2 = |AD|^2 - x^2,$$
$$|AE|^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$
$$|AE|^2 = 27 - \frac{9}{4},$$
$$|AE|^2 = \frac{99}{4},$$

Stąd

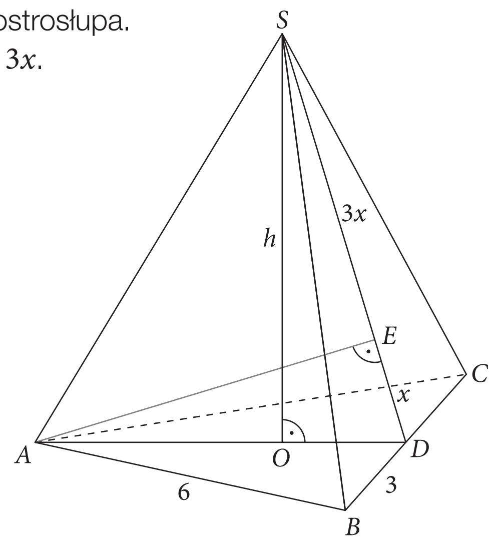
$$|AE| = \sqrt{\frac{99}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{11}.$$

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3}\cdot P_{BCS}\cdot|AE| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{3}{2}\sqrt{11} = 9\sqrt{11}.$$

<u>Sposób II</u>

Poprowadźmy wysokość SO ostrosłupa.
Niech $x = |ED|$. Wtedy $|SE| = 3x$.



Spodek O wysokości SO ostrosłupa jest środkiem ciężkości trójkąta równobocznego ABC o boku długości 6, więc

$$|AD| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad |OD| = \frac{1}{3}|AD| = \sqrt{3}.$$

Korzystając trzykrotnie z twierdzenia Pitagorasa, możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} |AE|^2 + |ED|^2 = |AD|^2 \\ |AE|^2 + |ES|^2 = |AS|^2 \\ |BS|^2 = |SD|^2 + |BD|^2 \end{cases},$$

który przy przyjętych oznaczeniach przyjmuje postać ($|BS| = |AS|$):

$$\begin{cases} |AE|^2 + x^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 \\ |AE|^2 + (3x)^2 = |AS|^2 \\ |AS|^2 = (4x)^2 + 3^2 \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x.

$$27 - x^2 + 9x^2 = 16x^2 + 9,$$
$$8x^2 = 18,$$
$$x = \frac{3}{2}.$$

Wobec tego $|SD| = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODS otrzymujemy

$$|SD|^2 = |SO|^2 + |OD|^2,$$
$$6^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2.$$

Stąd

$$h^2 = 36 - 3 = 33,$$
$$h = \sqrt{33}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{33} = 9\sqrt{11}.$$

Zadanie 11. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	III. Równania i nierówności. Zdający: R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; R5) analizuje równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów. VI. Ciągi. P6) Zdający wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

5 pkt – wyznaczenie wartości parametrów, dla których spełnione są warunki zadania, $m \in \{1 - 2\sqrt{2},\ 1 + 2\sqrt{2}\}$. Przy tym przy rozwiązywaniu sposobami I i III wymagane jest zbadanie warunków, dla których równanie $(x+3)(x^2 + m^2 - 2m - 8) = 0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste.

4 pkt – wyznaczenie wartości parametrów, dla których spełnione są warunki zadania, $m \in \{1 - 2\sqrt{2},\ 1 + 2\sqrt{2}\}$, w sposobach I i III bez zbadania warunków, dla których równanie $(x+3)(x^2 + m^2 - 2m - 8) = 0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste

ALBO

zapisanie, że rozwiązaniami równania $(x+3)(x^2 + m^2 - 2m - 8) = 0$ muszą być liczby -3, $-1,\ 1$ i zapisanie równania z niewiadomą m prowadzącego do wyznaczenia szukanych wartości parametrów, np. $1 + m^2 - 2m - 8 = 0$.

3 pkt – wyznaczenie zbioru, dla którego równanie $(x+3)(x^2 + m^2 - 2m - 8) = 0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste: $m \in (-2, 4) \setminus \{1\}$ oraz wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego dla trzech istotnie różnych położeń liczb: $x_1,\ x_2,\ x_3$ i zapisanie równania z niewiadomą m prowadzącego do wyznaczenia szukanych wartości parametrów, np. $m^2 - 2m - 7 = 0$

ALBO

zapisanie, że rozwiązaniami równania $(x+3)(x^2 + m^2 - 2m - 8) = 0$ muszą być liczby -3, $-1,\ 1$.

2 pkt – wyznaczenie zbioru, dla którego równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste: $m \in (-2, 4) \setminus \{1\}$ oraz

- zapisanie pierwiastków trójmianu $x^2 + m^2 - 2m - 8$, np. $\sqrt{-m^2 + 2m + 8}$, $-\sqrt{-m^2 + 2m + 8}$

albo

- zapisanie, że pierwiastki trójmianu $x^2 + m^2 - 2m - 8$ są liczbami przeciwnymi

albo

- wykorzystanie wzorów Viète'a i zapisanie trzech równań z niewiadomymi: $x_1,\ x_2,\ x_3$, prowadzących do wyznaczenia wszystkich wartości parametru m

ALBO

zapisanie, że $x_1 = -3$, oraz wykorzystanie faktu, że dwa pozostałe rozwiązania są liczbami przeciwnymi i zapisanie trzech równań z niewiadomymi $x_2,\ x_3$, prowadzących do wyznaczenia wszystkich wartości parametru m.

1 pkt – obliczenie wyróżnika trójmianu $x^2 + m^2 - 2m - 8$ i wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, dla których istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste tego trójmianu, $m \in (-2, 4)$

ALBO

zapisanie, że rozwiązaniem równania jest liczba $x_1 = -3$, oraz wyznaczenie tych wartości parametru m, dla których liczba -3 nie jest pierwiastkiem trójmianu $x^2 + m^2 - 2m - 8$: 1

ALBO

zapisanie, że rozwiązaniem równania jest liczba $x_1 = -3$, a pozostałe dwa rozwiązania mają postaci $\sqrt{-m^2 + 2m + 8}, -\sqrt{-m^2 + 2m + 8}$

ALBO

wykorzystanie wzorów Viète'a i zapisanie trzech równań z niewiadomymi: $x_1,\ x_2,\ x_3$, prowadzących do wyznaczenia wszystkich wartości parametru m

ALBO

zapisanie, że $x_1 = -3$, a dwa pozostałe rozwiązania są liczbami przeciwnymi.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że rozwiązaniem równania jest liczba $x_1 = -3$.
Równanie $(x+3)(x^2+m^2-2m-8)=0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, jeśli równanie $x^2+m^2-2m-8=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste $x_2,\ x_3$, z których żadne nie jest równe (-3). Rozwiązania $x_2,\ x_3$ są różne, jeśli

$$m^2-2m-8<0,$$
$$(m+2)(m-4)<0.$$

Zatem $m \in (-2,4)$.
Liczba (-3) byłaby pierwiastkiem trójmianu x^2+m^2-2m-8, gdyby zachodziła równość

$$(-3)^2+m^2-2m-8=0,$$
$$9+m^2-2m-8=0,$$
$$m^2-2m+1=0,$$
$$(m-1)^2=0,$$

a więc gdy $m=1$. Wobec tego $m \neq 1$.
Zatem dla każdej wartości parametru $m \in (-2,4) \setminus \{1\}$ rozpatrywane równanie ma trzy różne rozwiązania: $x_1=-3,\ x_2,\ x_3$.
Z liczb: $x_1,\ x_2,\ x_3$ możemy utworzyć 6 ciągów arytmetycznych, przy czym w dwóch z nich środkowym wyrazem jest x_1, w dwóch x_2 i w dwóch x_3. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy więc

$$x_1=\frac{x_2+x_3}{2} \quad \text{lub} \quad x_2=\frac{x_1+x_3}{2} \quad \text{lub} \quad x_3=\frac{x_1+x_2}{2},$$
$$2x_1=x_2+x_3 \quad \text{lub} \quad 2x_2=x_1+x_3 \quad \text{lub} \quad 2x_3=x_1+x_2,$$
$$x_2+x_3=-6 \quad \text{lub} \quad 2x_2=-3+x_3 \quad \text{lub} \quad 2x_3=-3+x_2,$$

Ze wzoru Viète’a na sumę pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy pierwszą z tych równości zapisać w postaci

$$-\frac{0}{1}=-6.$$

Jest to równanie sprzeczne.
Druga i trzecia z tych równości to, z dokładnością do oznaczenia pierwiastków trójmianu, ta sama równość. Korzystając ze wzorów Viète’a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego, otrzymujemy układ równań

$$2x_2=-3+x_3 \quad \text{i} \quad x_2+x_3=0 \quad \text{i} \quad x_2 \cdot x_3=m^2-2m-8$$

z trzema niewiadomymi: $x_2,\ x_3$ i m. Z drugiego równania wynika, że $x_3=-x_2$, więc pierwsze równanie przyjmuje postać $2x_2=-3-x_2$, stąd $3x_2=-3$, czyli $x_2=-1$. Wtedy z trzeciego z równań otrzymujemy

$$x_2 \cdot x_3 = 1 \cdot (-1) = m^2-2m-8.$$

Otrzymujemy zatem równanie z jedną niewiadomą m.

$$m^2-2m-8=-1,$$
$$m^2-2m-7=0,$$
$$(m-1)^2-8=0,$$
$$(m-1-2\sqrt{2})(m-1+2\sqrt{2})=0.$$

Stąd $m=1-2\sqrt{2}$ lub $m=1+2\sqrt{2}$.
Każda z otrzymanych liczb należy do zbioru $(-2,4) \setminus \{1\}$.

Sposób II
Zauważmy, że rozwiązaniem równania jest liczba $x_1 = -3$, a rozwiązania równania $x^2 + m^2 - 2m - 8 = 0$ – jeśli istnieją – są liczbami przeciwnymi.
Ponieważ rozwiązania x_1, x_2, x_3 stanowią ciąg arytmetyczny, więc odległość między większym a mniejszym z rozwiązań x_2, x_3 musi być taka sama jak odległość między mniejszym z nich a liczbą -3. To oznacza, że tymi rozwiązaniami muszą być liczby -1 i 1.
Zatem $1 + m^2 - 2m - 8 = 0$, czyli $m^2 - 2m - 7 = 0$.

$$m^2 - 2m - 7 = 0,$$
$$(m-1)^2 - 8 = 0,$$
$$\left(m - 1 - 2\sqrt{2}\right)\left(m - 1 + 2\sqrt{2}\right) = 0.$$

Zatem $m = 1 - 2\sqrt{2}$ lub $m = 1 + 2\sqrt{2}$.

Uwaga
Zauważmy, że w rozwiązaniu sposobem II nie ma potrzeby wyznaczać wartości parametrów, dla których pierwiastki trójmianu kwadratowego są różne od liczby -3.

Sposób III
Zauważmy, że rozwiązaniem równania jest liczba $x_1 = -3$.
Równanie $(x+3)\left(x^2 + m^2 - 2m - 8\right) = 0$ ma trzy różne rozwiązania, jeśli równanie $x^2 + m^2 - 2m - 8 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_2, x_3, z których żadne nie jest równe (-3). Rozwiązania x_2, x_3 są różne, jeśli

$$m^2 - 2m - 8 < 0,$$
$$(m+2)(m-4) < 0.$$

Zatem $m \in (-2, 4)$.
Liczba -3 byłaby pierwiastkiem trójmianu $x^2 + m^2 - 2m - 8$, gdyby zachodziła równość

$$(-3)^2 + m^2 - 2m - 8 = 0,$$
$$9 + m^2 - 2m - 8 = 0,$$
$$m^2 - 2m + 1 = 0,$$
$$(m-1)^2 = 0,$$

a więc jeśli $m = 1$. Wobec tego $m \neq 1$.
Zatem dla każdej wartości parametru $m \in (-2, 4) \setminus \{1\}$ rozpatrywane równanie ma trzy różne rozwiązania: $x_1 = -3$, x_2, x_3.
Pierwiastki trójmianu $x^2 + m^2 - 2m - 8$ można zapisać następująco:

$$x_2 = \frac{-\sqrt{-4\left(m^2 - 2m - 8\right)}}{2} = -\sqrt{-m^2 + 2m + 8}$$

oraz

$$x_3 = \sqrt{-m^2 + 2m + 8}.$$

Z liczb: x_1, x_2, x_3 możemy utworzyć 6 ciągów arytmetycznych, przy czym w dwóch z nich środkowym wyrazem jest x_1, w dwóch x_2 i w dwóch x_3. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy więc

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \quad \text{lub} \quad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$
$$2x_1 = x_2 + x_3 \quad \text{lub} \quad 2x_2 = x_1 + x_3 \quad \text{lub} \quad 2x_3 = x_1 + x_2,$$
$$x_2 + x_3 = -6 \quad \text{lub} \quad 2x_2 = -3 + x_3 \quad \text{lub} \quad 2x_3 = -3 + x_2,$$

Ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy pierwszą z tych równości zapisać w postaci

$$-\frac{0}{1} = -6.$$

Jest to równanie sprzeczne.

Drugą z tych równości możemy zapisać w postaci

$$2\cdot\left(-\sqrt{-m^2+2m+8}\right)=-3+\sqrt{-m^2+2m+8},$$
$$3\sqrt{-m^2+2m+8}=3,$$
$$\sqrt{-m^2+2m+8}=1.$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu (obie strony są nieujemne) otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą m.

$$-m^2+2m+8=1,$$
$$m^2-2m-7=0,$$
$$(m-1)^2-8=0,$$
$$\left(m-1-2\sqrt{2}\right)\left(m-1+2\sqrt{2}\right)=0.$$

Zatem $m=1-2\sqrt{2}$ lub $m=1+2\sqrt{2}$.
Każda z otrzymanych liczb należy do zbioru $(-2,4)\setminus\{1\}$. Zatem $m\in\left\{1-2\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2}\right\}$.
Trzecią z tych równości możemy zapisać w postaci

$$2\cdot\sqrt{-m^2+2m+8}=-3-\sqrt{-m^2+2m+8}.$$

Otrzymane równanie jest sprzeczne, ponieważ wyrażenie po lewej stronie jest dodatnie, a wyrażenie po prawej stronie – ujemne.
Zatem jedynymi rozwiązaniami zadania są parametry ze zbioru $\left\{1-2\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2}\right\}$.

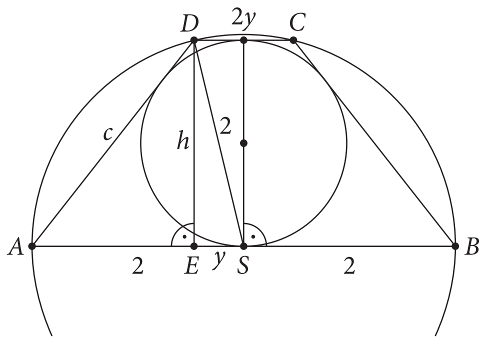
Zadanie 12.1. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	VIII. Planimetria. Zdający: P4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach; R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – wyznaczenie długości ramienia trapezu, $c=2\sqrt{5}-2$.
3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. $c^2+4c-16=0$ albo $y^2+8y-4=0$.
2 pkt – zapisanie układu zupełnego warunków, który pozwoli zapisać równanie z jedną niewiadomą, np. $4+2y=2c$, $2^2=y^2+h^2$, $c^2=(2-y)^2+h^2$.
1 pkt – wykorzystanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i zapisanie zależności między długością ramienia a długością krótszej podstawy trapezu, np. $4+2y=2c$
ALBO
wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania, które wiąże wysokość trapezu z długością jego krótszej podstawy, np. $2^2=y^2+h^2$
ALBO
wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania, które wiąże wysokość trapezu z długościami jego krótszej podstawy i ramienia, np. $c^2=(2-y)^2+h^2$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązania
Poprowadźmy wysokość DE trapezu. Niech $y = |ES|$, $c = |AD|$, $h = |DE|$. Wtedy $|DC| = 2y$.



Sposób I
W trapez $ABCD$ można wpisać okrąg, więc $|AB| + |CD| = 2|AD|$, czyli
$$4 + 2y = 2c.$$
Stąd
$$c = y + 2.$$
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED otrzymujemy
$$|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2,$$
czyli
$$c^2 = (2 - y)^2 + h^2,$$
$$(y + 2)^2 = (2 - y)^2 + h^2,$$
$$y^2 + 4y + 4 = y^2 - 4y + 4 + h^2,$$
$$h^2 = 8y.$$
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SDE otrzymujemy
$$|DS|^2 = |ES|^2 + |DE|^2,$$
więc
$$2^2 = y^2 + h^2,$$
$$4 = y^2 + 8y,$$
$$y^2 + 8y - 4 = 0,$$
$$(y + 4)^2 = 20.$$
Ponieważ $y + 4 > 0$, to
$$y + 4 = \sqrt{20},$$
$$y = 2\sqrt{5} - 4.$$
Zatem
$$c = 2\sqrt{5} - 4 + 2 = 2\sqrt{5} - 2.$$

Sposób II
W trapez $ABCD$ można wpisać okrąg, więc $|AB| + |CD| = 2|AD|$, czyli
$$4 + 2y = 2c.$$
Stąd
$$c = y + 2.$$
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SDE otrzymujemy
$$|DS|^2 = |ES|^2 + |DE|^2,$$
czyli
$$2^2 = y^2 + h^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED otrzymujemy

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2,$$

więc

$$c^2 = (2-y)^2 + (2^2 - y^2),$$
$$c^2 = 8 - 4y,$$
$$c^2 = 8 - 4(c-2),$$
$$c^2 + 4c - 16 = 0,$$
$$(c+2)^2 = 20,$$
$$c = 2\sqrt{5} - 2.$$

Zadanie 12.2. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający: R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym [...]; R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

- **druga część rozwiązania**

  4 pkt – obliczenie wartości x, dla której funkcja P osiąga największą wartość, wraz z uzasadnieniem (np. zapisanie, że w przedziale $(0, 2\rangle$ funkcja P jest rosnąca, a w przedziale $\langle 2, 4)$ – malejąca).

  3 pkt – zbadanie monotoniczności funkcji f w jej dziedzinie i określenie ekstremów lokalnych funkcji f

  ALBO

  zbadanie monotoniczności funkcji P: w przedziale $(0, 2\rangle$ funkcja P jest rosnąca, a w przedziale $\langle 2, 4)$ – malejąca

  ALBO

  obliczenie wartości x, dla której funkcja P osiąga największą wartość, wraz z uzasadnieniem w błędnie wyznaczonej dziedzinie.

  2 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f, $f'(x) = 128 - 24x^2 - 4x^3$, oraz obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji: $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$.

  1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f, $f'(x) = 128 - 24x^2 - 4x^3$.

  0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

- **pierwsza część rozwiązania**

  2 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji P zmiennej x i przekształcenie jej do postaci $P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{256 + 128x - 8x^3 - x^4}$ oraz zapisanie dziedziny tej funkcji: $(0, 4)$.

  1 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji P zmiennej x, np. $P(x) = \frac{4+x}{2} \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2}$

  ALBO

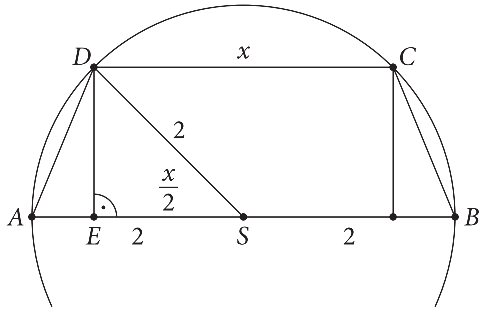
  zapisanie dziedziny tej funkcji, $(0, 4)$.

  0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie

Rozwiązanie składa się z dwóch części. W pierwszej z nich wyznaczamy wzór funkcji pola w zależności od zadanej zmiennej i wyznaczamy dziedzinę tej funkcji; w drugiej rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne.

Poprowadźmy wysokość DE trapezu. Niech $h = |DE|$. Wtedy $|ES| = \frac{x}{2}$.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ESD otrzymujemy

$$2^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2,$$
$$4 = \frac{1}{4}x^2 + h^2.$$

Ponieważ $h > 0$, to

$$h = \sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2}.$$

Wobec tego pole P trapezu $ABCD$ jako funkcja zmiennej x jest równe

$$P(x) = \frac{4+x}{2} \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{4}(x+4)\sqrt{16 - x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+4)^2 \cdot (16 - x^2)} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(x^2 + 8x + 16) \cdot (16 - x^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{256 + 128x - 8x^3 - x^4}.$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0, 4)$.

Funkcja postaci $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ jest rosnąca, więc funkcja P osiąga największą wartość dla tego samego argumentu, dla którego największą wartość osiąga funkcja f określona wzorem

$f(x) = 256 + 128x - 8x^3 - x^4$ dla każdego $x \in (0, 4)$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f i badamy jej znak.

$$f'(x) = 128 - 24x^2 - 4x^3 = 4(32 - 6x^2 - x^3) = 4(32 - 16x + 16x - 8x^2 + 2x^2 - x^3) =$$
$$= 4\big(16(2-x) + 8x(2-x) + x^2(2-x)\big) = 4(2-x)(x^2 + 8x + 16) = 4(2-x)(x+4)^2$$

dla każdego $x \in (0, 4)$.

Dla każdego $x \in (0, 4)$ prawdziwa jest nierówność $4(x+4)^2 > 0$, więc

$f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2 - x = 0$ i $x \in (0, 4)$, czyli dla $x = 2$,

$f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2 - x > 0$ i $x \in (0, 4)$, czyli dla $x \in (0, 2)$,

$f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2 - x < 0$ i $x \in (0, 4)$, czyli dla $x \in (2, 4)$.

Zatem w przedziale $(0, 2\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle 2, 4)$ – malejąca.

Wynika stąd, że dla $x = 2$ osiąga ona największą wartość. Wtedy również największą wartość osiąga funkcja P.