Lubelska Próba przed Maturą

Zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych

Matematyka - poziom rozszerzony

1 marca 2023 r.

Uwagi do rozwiązań zadań:

Akceptowane są rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów*(gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).*

Zadanie 1. (0–3)

Dla pewnych dodatnich liczb a oraz b takich, że $b \neq 1\ i\ a \neq b^2\ zachodzi\ równość$

$log_b a = 6$. Oblicz $log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Zamiana podstaw logarytmów $\frac{log_b \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}}{log_b \frac{\sqrt{a}}{b}}$,
- Zastosowanie własności logarytmów $\frac{\frac{1}{3} log_b a - \frac{1}{2} log_b b}{\frac{1}{2} log_b a - log_b b}$,
- Całkowite poprawne rozwiązanie $\frac{\frac{1}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 6 - 1} = \frac{3}{4}$

Zadanie 2. (0–3)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \epsilon R$, dla których równanie $\left||x| - 1 + m\right| = 3$ ma dokładnie trzy pierwiastki.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Przekształcenie równania do postaci $|x| = 4 - m\ lub\ |x| = -2 - m$,
- Zapisanie warunków zadania $\begin{cases} 4 - m > 0 \\ -2 - m = 0 \end{cases}\ lub\ \begin{cases} 4 - m = 0 \\ -2 - m > 0 \end{cases}$'
- Rozwiązanie układu warunków i podanie odpowiedzi: $m = -2$.

Zadanie 3. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych $x\ i\ y$ prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2x^2y^2 + y^2 \geq 2(x^2y + xy^2)$.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Doprowadzenie do postaci $(x^2 - 2x^2y + x^2y^2) + (y^2 - 2xy^2 + x^2y^2) \geq 0$,
- Przekształcenie do postaci $x^2(1 - 2y + y^2) + y^2(1 - 2x + x^2) \geq 0$,
- Zapisanie w postaci $x^2(1 - y)^2 + y^2(1 - x)^2 \geq 0$ i uzasadnienie, że suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest liczbą nieujemną.

Zadanie 4. (0–3)

W przędzy zmieszano włókno białe i kolorowe w stosunku 2:3.
Oblicz prawdopodobieństwo znalezienia wśród 5 losowo wybranych włókien co najmniej dwóch kolorowych.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Określenia związane ze schematem Bernoulliego: $p = \frac{3}{5}, q = \frac{2}{5}, n = 5, k = 2{,}3{,}4{,}5.$
- Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego $P(A') = P(k \leq 1) = P(k = 0) + P(k = 1) = \binom{5}{0}(\frac{3}{5})^0(\frac{2}{5})^5 + \binom{5}{1}(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^4 = \frac{272}{3125}$,
- Obliczenie szukanego prawdopodobieństwa $P(A) = 1 - P(A') = \frac{2853}{3125}$

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\sin 2x + 3cos2x = 0\ w\ przedziale\ \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Zauważenie, że jeśli $cos2x = 0$, to dane równanie jest sprzeczne, ponieważ $cos2x = 0\ \ dla\ \ x = \frac{\pi}{4},\ ale\ \frac{\pi}{4}\ \ nie\ spełnia\ równania,$
- Podzielenie obu stron danego równania przez $cos2x \neq 0$ i przekształcenie go do postaci $tg2x = -\sqrt{3}$,
- Rozwiązanie równania $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k\epsilon Z$,
- Uwzględnienie, że $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ i podanie odpowiedzi: $x = \frac{11\pi}{6}$.

Zadanie 6. (0–4)

W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono odcinek AD, gdzie $D \in BC$.
Wiedząc, że tangens kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{3}}{5}$, wykaż, że $DB{:}\,DC = 1{:}\,2$.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Sporządzenie rysunku pomocniczego i zastosowanie twierdzenia sinusów w trójkącie DAB: $\frac{x}{sin\alpha} = \frac{a}{\sin(120°-\alpha)}, gdzie\ \alpha \in (0°, 60°)$, gdzie $\alpha -$ $kąt\ DAB, x -$ $długość\ odcinka\ BD, a -$ $długość\ boku\ trójkąta\ ABC$,
- Przekształcenie twierdzenia sinusów do postaci $\frac{x}{sin\alpha} = \frac{a}{\sin\left(180° - (60° + \alpha)\right)}$,
$$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{a}{\sin(60° + \alpha)}$$
- Zastosowanie wzoru na sinus sumy kątów $\frac{x}{sin\alpha} = \frac{a}{\sin 60° \cdot cos\alpha + \cos 60° \cdot \sin\alpha}$,
$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha + \frac{1}{2}sin\alpha}$,
- Wykorzystanie do powyższego zapisu założenia $tg\alpha = \frac{3}{5}$, skąd $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\alpha$
- $\frac{x}{sin\alpha} = \frac{2a}{6\sin\alpha}$, skąd $x = \frac{1}{3}a = DB, skąd\ DC = \frac{2}{3}a\ ,\ czyli\ DB{:}\,DC = 1{:}\,2$

Zadanie 7. (0–5)

Powierzchnia zadrukowanej części afisza ogłoszeniowego ma wynosić 1536 cm^2, marginesy boczne mają mieć po 4 cm szerokości, marginesy górny i dolny po 6 cm.

Jakie powinny być wymiary afisza, aby jego nakład wymagał minimum papieru?

Przykładowe etapy rozwiązania:

Przyjmijmy, że x jest szerokością, a y wysokością afisza.

- Zapisanie pola afisza jako $S = xy$ $i\ jego\ części\ zadrukowanej$ $(x-8)(y-12) = 1536$, x>8 i y>12,
- Zapisanie funkcji pola z wykorzystaniem jednej zmiennej np. x w postaci $s(x) = 12x + \frac{1536}{x-8}, gdzie\ x > 8$,
- Obliczenie pochodnej $S'(x) = 12(1 - \frac{1024}{(x-8)^2})$,
- Wyznaczenie punktu krytycznego $x = 40$ i określenie znaku pochodnej $S'(x) > 0\ dla\ x > 40, S'(x) < 0\ dla\ 8 < x < 40$,
- Uzasadnienie, że otrzymana wartość jest wartością najmniejszą oraz wyznaczenie wysokości afisza y=60

Zadanie 8. (0–5)

O liczbach *a*, *b*, *c* wiemy, że ciąg (a,b,c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, zaś ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c oraz podaj wyrazy ciągu geometrycznego.

Przykładowe etapy rozwiązania:

Oznaczmy wyrazy ciągu arytmetycznego $a = b - r, c = b + r$

- Wyznaczenie $b = 11$ ze wzoru na sumę wyrazów ciągu
- Zapisanie równania z wykorzystaniem wzoru na wyraz środkowy ciągu geometrycznego

$$(b+5)^2 = (a-1)(c+19)$$

- Sprowadzenie powyższego równania do postaci $16^2 = (10-r)(30+r)$
- Rozwiązanie równania kwadratowego: $r = 2\ lub\ r = -22$
- Obliczenie wyrazów ciągu arytmetycznego $(a,b,c) = (9,11,13) lub\ (a,b,c) = (33,11,-11)$ oraz ciąg geometrycznego $(a-1, b+5, c+19) = (8,16,32)$ lub $(a-1, b+5, c+19) = (32,16,8)$

Zadanie 9. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie
$2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że jeden jest dwa razy większy od drugiego.

Przykładowe etapy rozwiązania:

- Zapisanie wzorów Viete'a: $x_1=2x_2, x_1+x_2=\frac{2m+1}{2},\ x_1\cdot x_2=\frac{m^2-9m+39}{2}$
- Wyznaczenie układu równań prowadzących do wyznaczenia wartości parametru m
  $3x_2=\dfrac{2m+1}{2},\qquad 2x_2^2=\dfrac{m^2-9m+39}{2}$
- Zapisanie równania prowadzącego do obliczenia parametru m
  $2\left(\dfrac{2m+1}{6}\right)^2=\dfrac{m^2-9m+39}{2}$
- Obliczenie wartości parametru m: $m=7\ lub\ m=10$

Zadanie 10.

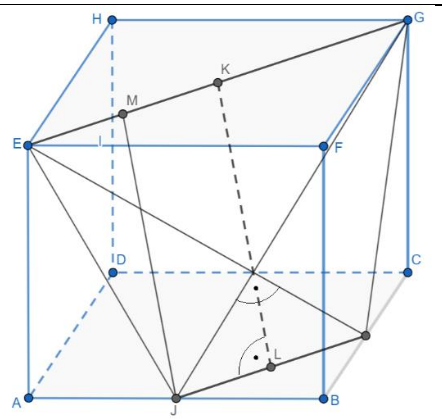
Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną jednej ze ścian sześcianu i środek krawędzi przeciwległej ściany.

Zadanie 10.1. (0-4) Oblicz kąt między przekątnymi otrzymanego przekroju.

Przykładowe rozwiązanie (zasady oceniania)

<table>
<tr>
<td>
Przyjmijmy oznaczenie a-długość krawędzi sześcianu

Sporządzenie rysunku i stwierdzenie, że szukany przekrój jest trapezem równoramiennym,
Zauważenie, że dłuższa podstawa trapezu jest przekątną kwadratu i jest równa $a\sqrt{2}$, a krótsza podstawa $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ oraz obliczenie długości ramienia trapezu $\frac{a\sqrt{5}}{2}$,
Wyznaczenie wysokości trapezu: $h=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ i zauważenie, że trójkąty powstałe poprzez poprowadzenie przekątnych są podobne w skali: $k=\frac{1}{2}$ (cecha KKK),
Wyznaczenie wysokości jednego z trójkątów i obliczenie: $tg\frac{\alpha}{2}=45°$ skąd $tg\alpha=90°$

</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Zadanie 10.2. (0-2) Oblicz pole tego przekroju.

Przykładowe etapy rozwiązania:

Obliczenie pola trapezu: $P = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}+a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{8}a^2$.

Zadanie 11. (0–5)

Punkt (2, 6) jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 32 = 0$

Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Przykładowe etapy rozwiązania:

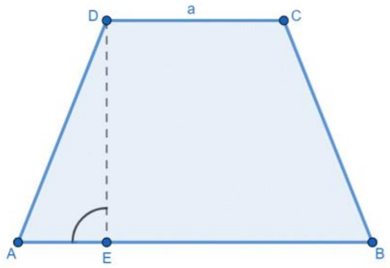
- Wyznaczenie promienia okręgu $r = 2\sqrt{5}$ oraz długości boku trójkąta $a = 2\sqrt{15}$
- Stwierdzenie, że punkty wspólne danego okręgu i okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 60$ są pozostałymi wierzchołkami trójkąta
- Zapisanie układu równań obu okręgów $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 8y + 32 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12y - 20 = 0 \end{cases}$
- Przekształcenie układu równań do postaci $\begin{cases} y = 2x - 13 \\ x^2 - 16x + 61 = 0 \end{cases}$
- Rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedz: $\left(8-\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3}\right), \left(8+\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}\right)$

Zadanie 12. (0–5)

Trapez równoramienny jest opisany na okręgu o promieniu 4.
Oblicz promień okręgu opisanego na trapezie, wiedząc, że jedna z jego podstaw jest cztery razy dłuższa od drugiej.

<table>
<tr>
<td>
Przykładowe rozwiązanie (zasady oceniania)

Wykonuje rysunek pomocniczy i wprowadźmy oznaczenia:
$a -$ $krótsza\ podstawa\ trapezu$,
$\alpha - kat\ ostry\ trapezu$
Zastosowanie własności trapezu równoramiennego i stwierdzenie, że: $|AE| = \frac{3}{2}a, |EB| = \frac{5}{2}a$,
Skorzystanie z własności trapezu równoramiennego opisanego na okręgu oraz wyznaczenie długości ramienia i wysokości trapezu: $|AD| = \frac{5}{2}a, |ED| = 8$,

</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

• Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów $AED\ i\ EBD$ oraz obliczenie długości boków i przekątnej trapezu: $\lvert CD \rvert = 4, \lvert AB \rvert = 16, \lvert AD \rvert = 10, \lvert BD \rvert = 2\sqrt{41}$, • Stwierdzenie, że okrąg opisany na trapezie jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD i zapisanie na podstawie twierdzenia sinusów $R = \frac{\lvert BD \rvert}{2sin\alpha}$, • Wyznaczenie promienia okręgu: $R = \frac{5}{4}\sqrt{41}$	